キルヒバーグ環上の従順作用とその応用

鈴木悠平

1. Introduction

局所コンパクト群 G を考える．群環 $C_c(G)$, より一般に，G の C* 環への作用 (C* 力学系) $G \curvearrowright A$ の接合積環 $C_c(G, A)$ は，C* 環にする標準的な完備化をふたつ持つ．ひとつは**普遍性**によるもの (普遍群 C* 環 $\mathrm{C}^*(G)$，普遍接合積 $A \rtimes G$)，もうひとつは**正則表現**による完備化 (被約群 C* 環 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(G)$, 被約接合積 $A \rtimes_{\mathrm{r}} G$) である．前者はその普遍性より，写像の拡張など，煩雑な問題が生じない利点があり，分野横断的な応用で重要となることが多い．後者はその完備化の取り方から，フーリエ変換のような調和解析的構造をもち，作用素環論の観点からは，こちらの構造のほうがふつうは圧倒的に面白い．それぞれに独自の利点があるため，**これらの完備化が一致する**，という状況が望ましい．次の定理は作用素環論の観点から，**局所コンパクト群の従順性**の重要さを強調する．

定理 1.1 (Hulanicki [6])**.** $\mathrm{C}^*(G) = \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(G) \Longleftrightarrow G$ は従順．

これを C* 力学系の場合に拡張できるか，という基本的な問いが今回の研究にある背景のひとつである．係数が可換 (すなわち普通の位相力学系) である場合には，離散完全群について，松村 [10] がこの問題を肯定的に解決している．(位相力学系の従順性とその応用については，[4], [12] など優れた本やサーベイがあるので，この予稿では詳しく説明しない．)

係数が非可換の場合，どうであろうか? 非可換の設定では，残念ながらそもそも作用の従順性の定義がまだ明確でない．いくつかの「定義」はあるが，これらは条件を確かめるのが現実的でなかったり（**第二双対**を用いる [2]，ここでは**従順性**と呼ぶ)，条件が強すぎる (**中心**を用いる [3, 4]，以下**強従順性**と呼ぶ) ため，満足のいく確定版とは言い難い．定義を導入した Delaroche 自身，これらの定義には納得していなかったようで，正しい定義が何であるべきかを追及するために，次の問題を挙げていた．(本講演に関係あるもののみ [3] より抜粋．) 以後，位相群 G について，G-C* **環**とは，G による連続作用つきの C* 環のことを意味する．

(c) *Is the property $A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ functorial in an appropriate sense? The strongest reasonable functoriality property is the following one: given any G-C*-algebra B and any non-degenerate G-representation $\Phi\colon A \to M(B)$ satisfying $\Phi(Z(M(A))) \subset Z(M(B))$, does the equality $A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ imply that $B \rtimes G = B \rtimes_{\mathrm{r}} G$?*

(d) *If A is a simple G-C*-algebra*[1]*, does the equality $A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ imply that G is amenable?*

今回の講演で解説したいことは，まずはこの**二つの問題の否定的解決**である．これは導入されていた従順性の二つの定義 [2], [3, 4] が真に異なることを立証する．

この問題を解決するのに用いた従順作用の構成のひとつは，その後私が当初予想していた以上に汎用性があり，応用が利くことが明らかになってきた．この予稿の後半では，これらの結果についても紹介したい．

従順作用は従順性と非従順性との橋渡しをしてくれるものだと思う．従順な対象から非従順な現象を引き出したり，非従順な対象の従順な側面を検出して理解したりするのに有用である．この類いの現象を捉え，応用するのに，現時点では従順作用のほかに強力な手段はないように思われる．強調したいことは，今回紹介するいずれの応用においても，従順作用の強い非可換化の成功は本質である．**非可換従順作用の実現が，不毛なアナロジーの形式的追及や，単なる技術的問題の解決ではないことを，この予稿から少しでも感じ取ってもらえれば幸いである．**

2. 従順作用の構成

まずは非従順群の単純環への従順作用の存在に関する定理を述べよう．単純 C* 環 (の multiplier 環) の中心は自明であるから，これは問 (c), (d) の決定的な反証となる．

定理 2.1 (鈴木 [16], Theorem A, Proposition B)**.** (1) G を非従順な第二可算局所コンパクト群とする．このとき単純な G-C* 環 A, B で，非退化同変表現 $A \to M(B)$ をもち，

$$A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G, \quad B \rtimes G \neq B \rtimes_{\mathrm{r}} G$$

を満たすものが存在する．さらに，$A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ は従順，$B \rtimes_{\mathrm{r}} G$ は非従順となるように調整できる．

(2) G が離散，完全であれば，可算条件なしに (1) の主張が成立する．さらにこのとき A, B は単位的にとれる．

これは作用素環論において，まったく新しい現象であり，C* 環特有の現象でもある．というのも，フォンノイマン環における類似の問題 (作用の従順性の定式化) には，すでに納得のいく解答が与えられているのだ [2]．フォンノイマン環は単位球のコンパクト性など，C* 環より強い構造上の制約を持つので，従順性を認めるには，どうしても中心上の作用が従順でなければならない．特に，非従順群は因子環に従順に作用することはできないし，従順因子環は (因子環)$\bar{\rtimes}$(離散非従順群) とは分解しない [1]．C* 環に対しても同様の期待があって，[3, 4] のような定義が導入されたのだろうが，実際の現象はそれ以上に複雑繊細で面白いことが明らかになってきた．

構成方法の紹介． (1) と (2) の証明は，独立の異なる構成法による．(1) で第二可算，非単位的であることと，(2) で G が離散，完全であることは，それぞれの構成において本質的である．応用上，大きいほうの環 B の構成は今のところさほど重要でないから，ここでは従順作用の構成のみ，要点を説明する．

[1] この予稿では，零でない環のみ扱う．

第一の構成法 [(1) の証明]. ベールの範疇定理を用いる．具体的には，次のような作用が必要で，その構成に範疇定理を使っている．「カントール集合 X 上，自由群 $\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty$ の従順作用 α で，第一自由積成分が極小[2]に作用するものが存在する.」これの証明は難しくはないが，本稿の内容に沿った面白さはないので，ここでは触れない．このような α から，次のようにして (1) の従順作用が構成できる．

ステップ 1: 像が密な準同型 $\varphi\colon \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \to G$ で，第一自由積成分が核に入るものを取る．

ステップ 2: 対角作用 $\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \curvearrowright X \times G$ を考える．ここで $\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty$ は X には α，G には φ を通しての右掛け算で作用している．

ステップ 3: $A := C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty$ と定めると，A は単純，従順となる．(α の取り方から，$\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \curvearrowright X \times G$ が従順，極小になることに注意！)

最後のステップ: G による $X \times G$ 上の自明作用と左掛け算の対角作用を考える．これはステップ 2 で作った $\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty$ の作用と交換するので，G-作用は自然に A に拡張する．接合積の順序の交換と，三つの作用

$$G \curvearrowright X \times G, \quad \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \curvearrowright X \times G, \quad \alpha$$

の従順性から，

$$\begin{aligned} A \rtimes G &= (C_0(X \times G) \rtimes \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty) \rtimes G \\ &= (C_0(X \times G) \rtimes G) \rtimes \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \\ &= (C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G) \rtimes \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \\ &= (C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G) \rtimes_{\mathrm{r}} \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \end{aligned}$$

が従う．ここで，最後の等式は，$\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \curvearrowright Z(M(C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G))$ が従順であること (=強従順性) から従う ([2], [4])($C(X)$ が同変かつ単位的に埋め込まれている！) これより $A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G$.

接合積 $A \rtimes G$ の従順性は，$\mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty \curvearrowright Z(M(C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G))$ の従順性と，$C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G \cong C(X) \otimes \mathfrak{K}(L^2(G))$ の従順性から従う．(表示

$$A \rtimes_{\mathrm{r}} G = (C_0(X \times G) \rtimes_{\mathrm{r}} G) \rtimes_{\mathrm{r}} \mathbb{F}_\infty * \mathbb{F}_\infty$$

を思い出そう．)

補足 2.2. この構成は，ベールの範疇定理を経由することもあって，いまだに謎めいたものに見える．これに関して私個人が気にしている問題をいくつか挙げる．

(1) 非可算自由群に対して，類似の性質をもつ従順作用が構成できれば，(1) の第二可算性を外すことができる．しかし非可算群にはベールの範疇定理が適用できず，どう構成すればよいのかわからない．

(2) α を具体的に構成できるかどうかもわからない．少なくとも境界作用や等質空間への作用 (典型例) をちょっといじって作るくらいでは無理そうだ．(ベールの範疇定理によって得られた，自由群のヘンテコな従順作用 [15] も参考に．)

---

[2] 群の空間への作用は，すべての軌道が密であるとき，極小であるといった．これは接合積が単純となるための必要条件である．

(3) Delaroche の定理 [2] より，この作用は ([2] の意味で) 従順である．なぜこの作用が従順であるか，直接的なよい説明は今のところ見つかっていない．

このように，第一の構成は定理 2.1(1) のような，局所コンパクト群に関するきれいで完全な主張を導くが，構成が具体的ではなく，融通が利かなさそうなことと，作用する環が構成の仕組み上どうしても非単位的になってしまうことから，今のところ使いどころはハッキリとしていない．

第二の構成法 [(2) の証明]. 次に紹介する第二の構成法は，(1) のものよりずっと簡単で，気づいてしまえば当たり前である．しかしこういった方法が，往々として人々の盲点となっており，一度発見されると，その汎用性の高さから，広く応用が利くのである．構成の仕組み上，この構成では群が離散であることは本質である．なぜこの構成がフォンノイマン環の設定ではうまくいかないのか，フォンノイマン環に興味のある人は少し自分で考えてみてほしい．

ステップ 1: なんでもいいので，コンパクト空間上の極小，自由，従順な作用 $G \curvearrowright X$ をとる．(完全性を特徴付ける小澤の定理 [11] を使った．)

ステップ 2: $A := \bigotimes_{\mathbb{N}}[C(X) \rtimes_{\mathrm{r}} G]$ と定め，$G \curvearrowright A$ を随伴作用 $G \curvearrowright C(X) \rtimes_{\mathrm{r}} G$ の対角作用として定める．(ここで G が離散でないと，$C(X) \rtimes_{\mathrm{r}} G$ が単位的でなくなり，A が定義できない！)

最後のステップ: A は (強) 従順 G-C* 部分環 $[\bigotimes_1^n C(X) \rtimes_{\mathrm{r}} G] \otimes C(X)$ の増大和 (の閉包) である．これから，$A \rtimes G = A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ と $A \rtimes_{\mathrm{r}} G$ の従順性が従う．

次の系は，定理 2.1 と Kirchberg の $\mathcal{O}_2$ のテンソル吸収定理 [8] からすぐに従う．クンツ環 $\mathcal{O}_2$ の変幻自在ぶりがよく表現されていると思う．

系 2.3. (1) G を第二可算局所コンパクト群とすると，

$$(\mathcal{O}_2 \otimes \mathfrak{K}(\ell^2(\mathbb{N}))) \rtimes G \cong \mathcal{O}_2 \otimes \mathfrak{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

となる作用が存在する．

(2) G を可算完全群とすると，$\mathcal{O}_2 \rtimes G \cong \mathcal{O}_2$ となる作用が存在する．

補足 2.4. フォンノイマン環で上の構成がうまくいかないのは，対角作用が拡張できるような無限テンソル積を定義できないから，である．

3. キルヒバーグ環の接合積分解とその応用

第二の構成法は，少し考えればわかるように，構成にかなり融通の利くつくり方である．この章では，特に自由群の場合に，構成を改良することでさらに面白い性質を持つ作用が構成できることを見て，それが C* 環の核型性や，キルヒバーグ環[3]の本質に迫る，いくつかの新しい性質を導くことを紹介する．

基本となるのは次の「存在定理」と「分解定理」である．(論文では応用で必要だった $\mathbb{F}_\infty$ の場合のみ証明してあるが，一般の自由群にも同じやり方で拡張できる．)

定理 3.1 (鈴木 [17], Theorem 5.1 の証明内)**.** Γ を可算自由群とする．このとき

[3]可分，核型，従順，単純純無限である C* 環のことを，完全分類に成功した Kirchberg を敬して**キルヒバーグ環**とよぶ．詳しくは [13] などを見よ．

(1) Γ はクンツ環 $\mathcal{O}_\infty$ 上従順に作用できる．
(2) キルヒバーグ環 A がクンツ標準系にある (すなわち $[1_A]_0 = 0$) もしくは非単位的なときは，キルヒバーグ環 B を係数にもつ接合積 $A = B \rtimes_{\mathrm{r}} \Gamma$ に分解する．

(1) は，自由群の C* 力学系を，K 理論的な情報を変えることなく，いつでも「従順化」できることを保証している．(こいつとテンソル積を取ればよい．) これがとても便利で，(2) の構成でもこれが効く．(2) におけるキルヒバーグ環の条件は外せない．これはピムスナー–ヴォイクレスク完全系列からくる制限で，たとえば $\mathcal{O}_\infty$ を自由群の接合積に分解することは決してできない．しかしキルヒバーグ環はいつでもクンツ標準系の遺伝部分環になることから，(2) の仮定は今のところ応用上邪魔にならない．私は初期の研究で，従順作用によってキルヒバーグ環のモデルを構成する，ということを試みていた．[14] では，具体的，連続個のキルヒバーグ環について，そのような実現を得ることには成功したが，残念ながら従順作用は具体例を構成するのが難しく，K 群を計算できる状況は限られているため，現在でもすべてのキルヒバーグ環がこのようなモデルをもつかどうかはわからない．(分解を持つときは，普遍係数定理を満たさなければならないことにも注意．) 今回の研究では単純 C* 環上の従順作用の発見によって，この K 群制御の難しさを，応用の豊かさを崩すことなく (むしろ高めた形で) 解決することができた．

補足 3.2. たとえば，K 群が一点と同じコンパクト距離空間上に，(非可換) 自由群が従順に作用できるか，というのはとても難しい問題のように思える．Cf. 定理 3.1(1)

定理 2.1, 3.1 より，キルヒバーグ環の中で，いつでも理解しやすい位置に非従順部分環 (すなわち $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)$) を捕まえられるようになった．これを用いた，いくつかの応用を紹介しよう．最初の応用は,「不動点環をとる」という操作に関するものである．この操作は同変 KK 理論や群作用の研究で基本的である．フォンノイマン環では，単射性が従順群の不動点環に遺伝することは，基本考察であった．C* 環ではどうか？残念ながら，UHF 環の内部自己同型 ($\mathbb{Z}$-作用) の時点で，Kirchberg [7] はこれが正しくないことを，かなり強い形で示している．紹介する第一の応用は，この Kirchberg の定理を補完するものである．我々の結果のいくつかのよい (新しい) 点は，任意の群でできること，群 C* 環の新しい表示方法を与えること，現われる不動点環 (のすべての非自明テンソル成分) を AF 環に埋め込めないように取れること，の三点である．以下，$\Gamma \curvearrowright A$ の不動点環を A^Γ と書く．

定理 3.3 (鈴木 [19]). (1) Γ を可算完全群，Λ を可算無限群とする．このとき，$\Lambda \curvearrowright \mathcal{O}_2$ で，$\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma) \subset \mathcal{O}_2^\Lambda \subset L(\Gamma)$ となるものが存在する．Γ が近似性質[4]を持っていれば，$\mathcal{O}_2^\Lambda = \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)$ となるようにとれる．
(2) A をキルヒバーグ環，Λ を可算無限群とする．このとき，$\Lambda \curvearrowright A$ で，A^Λ が *CBAP* (とくに核型性)，*LLP* を失うものが存在する．

構成の基本方針は単純で，(1) については，$\mathcal{O}_2$ を無限対角作用の接合積 $(\bigotimes_\Lambda B) \rtimes_{\mathrm{r}} \Gamma$ に分解することが要点である．Λ の作用は，ベルヌーイシフトからくるものを取ればよい．(2) の構成はもう少し複雑になるが，基本の考えは同じである．こちらの構

[4]近似性質の定義や基本的事実については，たとえば [4] の 12.4 をみよ．

成は詳しく言及しないが，現われる不動点環の従順性を排除するために，岸本-小澤-境の定理 [9] をうまく援用できたことは面白い．(安定部分群が非従順になるステイトをもつ良い作用を作るのに使った．) 今回の研究を通して認識したことだが， 接合積環 (核型環)$\rtimes_{\mathrm{r}}$(完全離散群) の従順性を否定する有意な方法は，自明なもの（ステイトの安定部分群の非従順性) を除いて，知られていないのではないか．

最後の応用は，これも純無限環上の従順作用の発見によって，はじめて観測することができた現象である．その基礎に立つ仕事として，最近私は，究極にきつい C* 環の包含をきわめて簡単な材料から構成する定理（枠組み) を発見した．

定理 3.4 (鈴木 [20], Main Theorem)**.** B : 単位的単純可分純無限 C* 環．$\beta\colon \mathbb{F}_\infty \curvearrowright B$: 近似内部作用 (自明作用でもよい)．このとき，β を内部自己同型でずらして，次の性質を満たす新しい作用 γ が作れる．$\alpha\colon \mathbb{F}_\infty \curvearrowright A$ を単純 C* 環上の任意の作用 ($A = \mathbb{C}$ でもよい) とすると，部分 C* 環 $A \rtimes_{\mathrm{r},\alpha} \mathbb{F}_\infty \subset (A \otimes B) \rtimes_{\mathrm{r},\alpha\otimes\gamma} \mathbb{F}_\infty$ は極大かつリジッド．

堅牢に結ばれた C* 環の特別な包含の構成や，性質を崩さずに C* 環をふくらます技術は，C* 環の構造解明における強力な道具である．バウム-コンヌ予想の決定的な定理 (a-T-menable(=ハーゲラップ) 群に対する強バウム-コンヌ予想の解決，完全群に対する組み立て写像の単射性)，C* 単純性やそれに類する最近のブレイクスルーは，その華々しい事例である．接合積の構造解析においても，充分大きな部分環や，部分環族がなす役割は大きい．これについては以前 (2017 年) 作用素論・作用素環論研究集会の私の予稿[5]でも解説した．自由群の作用は当然いくらでも簡単に作れるので，この定理は強烈な個性をもつ包含をたくさん与えてくれる．同様の性質をもつ包含の例は，[15] で初めて構成された (特に極小核型包囲環が初めて得られた)．その時の包含は，構成がベールの範疇定理を経由して得られており，範疇定理から出てくる材料そのものがきわめて超越的だったので，証明には成功したが，何が起こったのかは，長い間まったくの謎であった．また，[15] の方針では，係数環の可換性から来る，接合積の K 群への強い制限があるため，後で述べる応用群を得ることは不可能だ．ここにおいても，単純環上に従順作用を発見できたことが，本質的に重要なステップであった．この定理と，後で説明する応用では，いずれも範疇定理を必要とせず，定理 3.1 で述べたように，K 群に関する制限も現れない．今回の研究で，[15] で残されていた問題点がきれいな形で解決し，ミステリアスだった包含が，実はもっと身近にたくさん潜んでいて，簡単に構成できるものとなった．

キルヒバーグ環の新現象． 次の二つの定理は，キルヒバーグ環とワイルドな C* 環たちが，これまでの常識的な理解を破る，深い親和性をもつことを示している．これは今後，分類定理の完成に伴い発展していくであろう，非従順 C* 環の構造解析において，キルヒバーグ環が果たす特別な役割を期待させる，印象深い新発見である．

初めの定理は，キルヒバーグ環のある種の遍在性を示している．このような性質を持つ環はこれまで知られていなかったように思える．

定理 3.5 (鈴木 [20], Theorem C)**.** A を単位的キルヒバーグ環，B を任意の単位的可分 C* 環とする．このとき，C* 環 C で，A をリジッドな極大部分 C* 環として含み，B を条件付き期待値の像として含むものが存在する．

---

[5] http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜yuhei.suzuki/アブストラクト.pdf

証明を見ればわかるが，実は $C^*_r(\mathbb{F}_\infty)$ もこの性質は満たしている．さらに自由群フォンノイマン環 $L(\mathbb{F}_\infty)$ も類似の性質を満たしていることが，似たようにしてわかる．これは $L(\mathbb{F}_\infty)$ の無限自由度が内在的性質として現れているようで面白い．$L(\mathbb{F}_2)$ などが同様の性質を満たすかどうかは，確認すべき自然な問題であろう．

次の定理は，Dadarlat[5] が AF 環で得ていた「モデル化定理」の，キルヒバーグ環による類似現象である．これは私がキルヒバーグ環を調べる中で，目標の一つとして長らく設定していた主張であった．Dadarlat の構成の肝は，AF 環の帰納極限構造にある．キルヒバーグ環は，簡単な材料による標準的な帰納極限構造を持たないので，類似の方針を辿ることは出来なさそうだ．我々は帰納極限構造の代わりに，定理 3.1 で得た接合積分解を用いてこれを導いた．

定理 3.6 (鈴木 [20], Theorem B)**.** *A:*キルヒバーグ環．このとき，C* 環の包含 $B \subset A \subset C$ [A のはさみうち] で，

- B は従順でなく，C は完全でない．
- $B \subset A$, $A \subset C$ は極大，リジッド，
- $B \subset A$, $A \subset C$ は KK 同値を定める．

補足 3.7. 定理 3.6 は Dadarlat の定理 [5] と完全にパラレルではない．リジッドや極大といった強力な性質は，Dadarlat の元の定理では言及されていない (というか彼の構成ではまず満たさないだろう)．一方 [5] では，KK 同値より強い，ホモトピー論的な同値性が示されている．これは安定有限の世界では順序構造など，KK 理論だけでは拾いきれない情報がたくさんあるので，当然の要請であったのだろう．

似た現象を，キルヒバーグ環の自己相似として，この定理の少し前に確認していた．

定理 3.8 (鈴木 [17], Theorem 5.1)**.** 任意のキルヒバーグ環 A は，(同型でない) 自己準同型 $\rho\colon A \to A$ で，

- $\rho(A) \subset A$ はリジッド（特に条件付き期待値をもたない) で極大，
- $[\rho] = 1_A \in KK(A, A)$

を満たすものを持つ．

多くの場面で AF 環より行儀のよいキルヒバーグ環たちが，こうした奇妙で特異的な構造を備えていたことはたいへん不思議に思える．極限世界の様相を解明することは，ものごとの隠れた側面を発見したり，本質的な側面を浮き彫りにするために必要である．今回の研究で，また一つ，もっとも重要な C* 環のクラスの一つであるキルヒバーグ環の意外性ある新たな側面を発掘出来たのではなかろうか．

謝辞. 本稿で紹介した研究は，科研費 (17H06737，19K14550) と名古屋大学テニュアトラック資金の助成によって行われたものである．

References

[1] C. Anantharaman-Delaroche, *Action mentionable d'un groupe localement compact sur une algèbre de von Neumann.* Math. Scand. **45** (1979), 289–304.

[2] C. Anantharaman-Delaroche, *Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité.* Math. Ann. **279** (1987), 297–315.

[3] C. Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4153–4178.

[4] N. P. Brown, N. Ozawa, *C^*-algebras and finite-dimensional approximations.* Graduate Studies in Mathematics **88**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[5] M. Dadarlat, *Nonnuclear subalgebras of AF-algebras.* Amer. J. Math. **122** (2000), no. 2, 581–597.

[6] A. Hulanicki, *Means and Følner conditions on locally compact groups.* Studia Mathematica **27** (1966), 87–104.

[7] E. Kirchberg, *Commutants of unitaries in UHF-algebras and functorial properties of exactness.* J. reine angew. Math. **452** (1994), 39–77.

[8] E. Kirchberg, N. C. Phillips, *Embedding of exact C^*-algebras in the Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$.* J. reine angew. Math. **525** (2000), 17–53.

[9] A. Kishimoto, N. Ozawa, S. Sakai, *Homogeneity of the pure state space of a separable C^*-algebra.* Canad. Math. Bull. **46** (2003), 365–372.

[10] M. Matsumura, *A characterization of amenability of group actions on C^*-algebras.* J. Operator Theory, **72** (1) (2014), 41-47.

[11] N. Ozawa. *Amenable actions and exactness for discrete groups.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **330** (8) (2000), 691–695.

[12] N. Ozawa. *Amenable Actions And Applications.* International Congress of Mathematicians, Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich (2006), 1563–1580.

[13] M. Rørdam, *Classification of nuclear, simple C^*-algebras.* vol. 126 of Encyclopaedia Math. Sci., Springer, Berlin, 2002, 1–145.

[14] Y. Suzuki, *Amenable minimal Cantor systems of free groups arising from diagonal actions.* J. reine angew. Math. **722** (2017), 183–214.

[15] Y. Suzuki, *Minimal ambient nuclear C^*-algebras.* Adv. Math. **304** (2017), 421–433.

[16] Y. Suzuki, *Simple equivariant C^*-algebras whose full and reduced crossed products coincide.* To appear in J. Noncommut. Geom., arXiv:1801.06949.

[17] Y. Suzuki, *Complete descriptions of intermediate operator algebras by intermediate extensions of dynamical systems.* To appear in Comm. Math. Phys., arXiv:1805.02077.

[18] Y. Suzuki, *Rigid sides of approximately finite dimensional simple operator algebras in non-separable category.* To appear in Int. Math. Res. Not., arXiv:1809.08810.

[19] Y. Suzuki, *On pathological properties of fixed point algebras in Kirchberg algebras.* To appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, arXiv:1905.13004.

[20] Y. Suzuki, *Non-amenable tight squeezes by Kirchberg algebras.* Preprint, arXiv:1908.02971v2.

名古屋大学多元数理科学研究科
E-mail address: `yuhei.suzuki@math.nagoya-u.ac.jp`