周期と実数の 0-認識問題

吉永正彦

平成 28 年 2 月 27 日

まえがき

円周率を表す公式は膨大にある. 20 世紀に見つかったものだけでも山のようにあるし, 21 世紀に見つかったものすらある. 円周率を求める努力は紀元前のアルキメデスから始まるが, 決定的な出来事は微分積分の発見であろう. 微分積分以降, 円周率を表す公式の発見には実に多くの分野の知見が生かされている. 現在知られている公式のほとんどは微分積分なくしては発見されなかったであろう. 円周率が関係している公式の多様性は, 微分積分の大きな成功と繁栄の象徴と言えるかもしれない.

一方で歴史を振り返ってみると, 数学は単に diverse な発展だけからなるというわけではないはない. ユークリッド幾何は主に平面上の直線と円 (または円錐曲線) に関する数学で, 古代ギリシア以来膨大な蓄積があったが, 座標平面の発見により代数的な問題へと帰着された. 座標を使った代数的な図形の記述は, ユークリッド幾何に対する統一的な扱いを提供する一方で, 次数の高い曲線や高次元の図形を扱う道を拓いた. これら新しい図形に対しても, 微分積分のおかげで接線, 面積, 体積などを統一的に扱うことができるようになり, 微分幾何が生まれた. また, 図形の連続変形を許すという視点からトポロジーが, 「多項式を使って図形を表示する」という点に注目することで代数幾何が生まれ, この百数十年発達してきた. 話は飛ぶが, 最近の導来圏を使った代数幾何学は, 部分多様体, 多様体の上の層, 微分方程式など全く素性の違うと考えられていたものを統一的に扱う枠組みを提供しており, 空間とは何かという根源的な問いに対して新しい方向を提示していると考えられている.

このように, 数学は多様な研究とそれらを統一する概念や視点の導入, さらに新たなレベルでの深化を繰り返すことで発展してきた.

2001 年に発表された Kontsevich-Zagier の「周期」([52]) は, 円周率に代表されるような, 実数の「積分表示」の多様性に対して, 統一的な視点 (予想) を提供し, その先にある美しい世界を垣間見させてくれる論説である.

数学は歴史的に様々な必要性に応じて, 数の世界を広げてきた,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

現在では実数の集合 $\mathbb{R}$ は「有理数列の極限として得られる数全体」($\mathbb{Q}$ の完備化) として定めるというのが標準的である. つまり, $\mathbb{Q}$ というよく分かる集合から, 「極限」を付け加えることで $\mathbb{R}$ を得るのである. 我々は $\mathbb{Q}$ の中では様々なことを正確に行うことができる. 例えばふたつの有理数 $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ が等しいかどうかをアルゴリズミックに確かめることができる (0-**認識問題**). さらに, 四則演算を自由に正確に行う事ができる. 有理数ではない実数 (無理数) というのは定義から有理数列の極限であるから, これらの数の間の四則演算は「有理数列の極限」という定義を使って実行されるのであろうか?

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

という中学で習う公式は, 必ずしもそうではないことを教えてくれている. 我々は, $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ に収束する有理数列を具体的に知らなくても, 上の公式が正しいことを証明できる. これは, 有理数と同様の代数的な統制が有理数の外にも (すべての実数ではないが) 及んでいるということを意味している. さらに, $\sqrt{2}$ という数の定義を思い出すと, 「$x^2 - 2 = 0$ を満たす正の実数 x」であった. $\sqrt{2}$ を解にもつ (有理数係数) 方程式は無数にあるが (例えば $x^4 - 4 = 0$), それらはすべて多項式として $x^2 - 2$ で割り切れるという性質を持っている. この意味で, $\sqrt{2}$ が満たす方程式は本質的にただ一つであることが分かる. まとめると, $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ 達が住んでいる代数的数 $\overline{\mathbb{Q}}$ の世界でも,

- 極限を使わないで様々な操作をすることができという代数的な統制,
- 本質的に一意的な表示,

を持つことが分かる.

Kontsevich-Zagier のアイデアは「積分表示」に注目することで, 代数的数より広い世界を扱おうというものである. 例えば円周率は

$$\pi = \int_{x^2+y^2<1} dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

のような積分表示を持つ. 「周期」と呼ばれる積分表示を持つ実数たちを考えることで, 代数的数よりも広いクラスの数を扱うことができるようになるのである.

しかし, この「代数的数よりも広いクラス」で良いものを見つけたいという問題意識は古いもので, 数々の試みがあり, 本書でもいくつか触れることになる. 他と比べて, Kontsevich-Zagier の「周期」が独特であるのは, 有理数や代数的数と同じ意味での代数的統制を, 「周期」まで広げられるのではないかという予想を明示的に述べた点であると思う.

「代数的統制」と「表示の本質的な一意性」が, 代数的数を超えて, 積分表示を持つ実数たちの世界まで及んでいるという美しい世界観 (予想) は多くの人の心を打ち, 専門家からアマチュアまで, 物理学者から数理論理学者まで多くの人の実数観に影響を与えた. 積分を扱う上での新しい思考パターンを確立したと言える. 実は, 数論や代数幾何の専門家の間では「Grothendieck の周期予想」として近い内容のものが以前から知られていた. Kontsevich-Zagier の予想は, 「Grothendieck の周期予想」の核心の哲学を弱めることなく, より初等的な言葉で述べた点が大きかった. このようにして数学のすそ野が広がっていくのであろう.

Kontsevich-Zagier の予想を解くことは大変難しいと考えられ, 現時点では有効なアプローチのアイデアすらない. 個人的には, Kontsevich-Zagier の予想は, そこに予想としてあってくれるだけで幸せな予想, 解けなくてもよいが, その予想を心の中で唱え, それが予言する世界に思いを馳せるだけで幸せになり, 自分でもなにかやりたいという冒険心をかき立てられる予想である. 初等的な言葉で述べられる予想ではあるが, 今後長い期間, 人間の精神活動に喜びと活力を与え続け, 数学を進展させるエネルギーを与え続けるのではないかと考えている.

このような周期に関する Kontsevich と Zagier の予想が本書のテーマである. Kontsevich-Zagier の予想は本質的に「ふたつの周期が与えられた時に, それらが等しいかどうかを判定できるか?」という 0-認識問題に対して「積分の変形で移りあうかどうかを見ることで判定できる」という主張をするものである.

以下, 各章の内容を簡単にみてみよう.

第 1 章ではまずふたつの実数が等しい／異なるというのはどういうことかを考える. ギリシアの三大作図問題を、実数の代数的構造の理解を 2000 年以上にわたってリードしてきた問題と位置づけて紹介し, 代数的数の範囲に限れば, 我々は近似などを使うことなく, 正確に四則演算などの操作をすることができる

ことをみる．

第 2 章では本書の主要テーマである Kontsevich-Zagier の予想を紹介する．抽象的周期環を使ったものや, 最近の Ayoub による定式化なども紹介する．また,「代数的数より広い数のクラスの定義」の試みとして, 梅村の初等数, 古典数にも触れる．

第 3 章では Kontsevich-Zagier の予想の背景にあるアイデアの起源を歴史をさかのぼって探してみたい．微分積分の創始者のひとりの Leibniz が既に関数や積分の超越性に触れる発言や手紙を残している．Leibniz は記号やその変換規則を適切に定めれば, すべての真理を記号の操作に帰着できるという構想 (「普遍記号論」) を持っており, Kontsevich-Zagier の予想も (筆者の個人的見解では) 自然にその延長上にあるように思われる．Leibniz が現在使われている微分積分の記号を使い始めた時点から何十代にもわたって, 我々の思考法も大きな制約を受けているのかもしれない．

第 4 章は, 周期などの積分を扱う際に技術的に重要になる実代数幾何の枠組みをいくらか紹介する．

第 5 章では,「不可能性」に関する知られていることを紹介する．Kontsevich-Zagier の予想は, 周期が等しいかどうかを判定するアルゴリズムの存在を予想している (このこと自体は第 6 章で述べる)．他方, Turing にはじまる計算可能実数の範囲では, ふたつの実数 (を近似する有理数列が与えられた時) に対して, それらが等しいか否かを判定するアルゴリズムは存在しないことが知られている．そのことと, さらに初等的関数の範囲でも, 決定不可能な問題があるという結果を紹介する．

第 6 章では, Kontsevich-Zagier の予想と同様に, 積分に関連したふたつの大予想, Hodge 予想と Grothendieck の周期予想, の紹介をする．Hodge 予想を仮定すると, 代数多様体の与えられた位相的サイクルが代数的かどうかを判定するアルゴリズムの存在が示せることを Simpson の論文に沿って紹介する．またこれと同様の議論により, Kontsevich-Zagier の予想からは周期の 0-認識問題を解くアルゴリズムの存在を示すことができる．

第 7 章では, Kontsevich-Zagier の予想が示唆している事実として,「円周率に収束する級数は本質的に一つではないか」という予想の定式化をする．現在

知られている円周率に収束する多くの級数はホロノミック級数というクラスに属している. ホロノミック級数の変形規則をいくつか定式化して, ふたつのホロノミック級数の極限が等しくなるためには, これらいくつかの変形規則を使って互いに移りあうことが必要十分条件であろうという形で定式化を目指す.

第 8 章は Kontsevich-Zagier の予想の一つの簡単な類似の問題として, 多面体の格子点の問題を扱ってみる. 大雑把に説明すると, ふたつの多面体内の格子点の数が等しい時に, それらの格子点の間に自然な全単射を作ることができるか? という問題を扱う. 数学では難しい難問が解けなくても, 「似ているが解ける問題」を探すことそれ自体の楽しさを伝えたい.

各章の間には, あまり強い論理的なつながりはない. というわけで, 特に最初から読んでもらう必要はない. 予備知識についても, 特にモデルとなる読者のレベルを想定するようにはせず, 各章まちまちである. 例えば第 1 章 (の一部) は筆者が何度か大学一年生向けに講義した内容である. 高校数学程度の予備知識で読めるのではないかと思う. 一方, 第 6 章は定義は一通り述べたが, この章の内容を理解するにはある程度代数幾何に慣れていることが必要であろう. これも「周期」が関係した問題は, 初等的な装いをしている部分もあるが, 様々な深い数学と関係していることを反映しているのだと考えている.

最後に私事ではあるが, 筆者が周期との付き合いをもったいきさつを述べたい. 最初に Kontsevich-Zagier の論説「周期」の存在を知ったのは, 大学院生時代に指導教官の斎藤恭司先生から「皆が漠然と感じていたことをうまくまとめてある」というような評を聞いた時だったと思う. 斎藤先生の評を聞いて気になっていたのだが, 実際に論説そのものを読んだのは数年後にポスドクをしているころだった. すぐに引き込まれ, 自分でも何かやりたいと思い, 周期でない数に収束する数列を生成するアルゴリズムを書き下したプレプリントを 2008 年に ArXiv に投稿した. このプレプリントがきっかけで, 国内外で十数回講演させてもらう機会を頂き, 講演のたびに新しい人に興味を持ってもらい, 様々な分野の専門家と話す機会を持つことができた. 周期に関する Kontsevich-Zagier の予想や, Turing の計算可能実数の構想がもつ普遍的な重要性のゆえだろうと思っている. そのような事情で Kontsevich-Zagier の予想周辺の本の執筆依頼が筆者の

所に来たのだと思われる.

謝辞. これまで筆者が所属した神戸大学, 京都大学, 北海道大学の同僚, 事務や図書の職員, 学生の方々にまず感謝したい. 筆者が日常的に数学的刺激に満ちた生活を送ることができているのは皆様のおかげである. これまで講演機会を頂いた様々なセミナーや研究集会のオーガナイザーや聴衆の皆様, そこで頂いた多くのコメントにも感謝したい. 多すぎて一つ一つの出来事を挙げることはできないが, 本書の大部分は, これら多くの方々とのコミュニケーションから発展したものである.

数学の指導と「周期」を読むきっかけを与えてくれた斎藤恭司先生, 上述のプレプリントを書いた際に一番身近にいて, いち早く後押しして下さった齋藤政彦先生にも感謝したい. 両先生のサポートがなければ, 周期に関する本を執筆するという得難い機会は得られなかったと思う.

実はこのテーマは将来いつか自分で好きなように書きたいと思っていたテーマであった. 思いがけず, 数学書房から周期に関する本を書かないかというお誘いを頂き感謝している. 依頼を受けた時点では, 時期尚早であるというのが率直な思いであったが, しかしそのようなことを言っていてはいつまでたっても期は熟さないことを恐れて, 思い切って引き受けることにした. 機会を与えてくれた編集委員の加藤文元先生, 野海正俊先生, また筆者の筆が遅いのを我慢強く耐えてくださった数学書房の川端政晴氏に感謝したい.

最後になるが, 日常を支えてくれ, 執筆を優先するために色々と不便をかけた家族, とくに妻には, 感謝したい. 最初に (部分的に) 読んでコメントをくれたのは妻である. 執筆を引き受けた時点で一歳だった娘は三歳になった. その間, 言葉を覚え, 数を数えられるようになるプロセスに参加することができたことは, 本書の執筆の上でも影響があったと思う. 私にとって「数えたり積分したりすること」がなぜこんなに面白いのか自分でも分からないのだが, 娘 (おそらく多くの子供) にとっても「数えること」が面白いらしいことを知り, 数えたり積分したりすることには根源的な面白さがあるのだろうという自信をもらった.

2015 年 7 月
吉永正彦

目　次