2009 年 10 月 18 日, Workshop “Category Theory, Computer Science and Topology” 信州大学

周期と実数の計算論的複雑性について

吉永 正彦

京都大学

Abstract and Contents

KontsevichとZagierが2000年に導入した数のクラス「周期(Periods)」は有理／無理数，代数的／超越数という区分を一歩進め，数学で扱う実数$\mathbb{R}$に対して重要な視点を提供しているように思われる．本講演ではアルゴリズムの複雑性の観点から周期を近似する有理数列を調べる．

参考文献：

Masahiko Yoshinaga: Periods and elementary real numbers. (arXiv:0805.0349)

Abstract and Contents

1. Kontsevich-Zagier's “Periods(**周期**)”.
2. A problem and a strategy.
3. Elementary real numbers.
4. Periods are elementary.

1 Periods

1 Periods

$$\pi$$

$$\log 2$$

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000\ldots$$

これらの数は同じくらいに重要ですか?

1 Periods

$$\pi$$

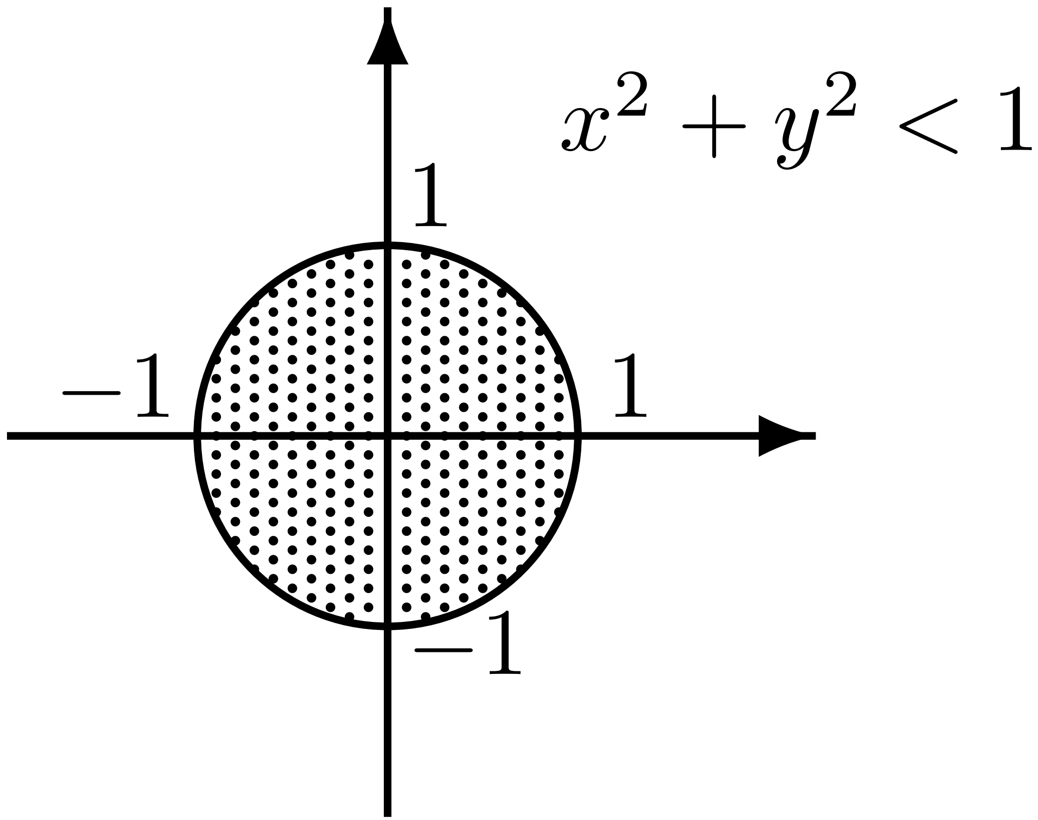
$$\log 2$$

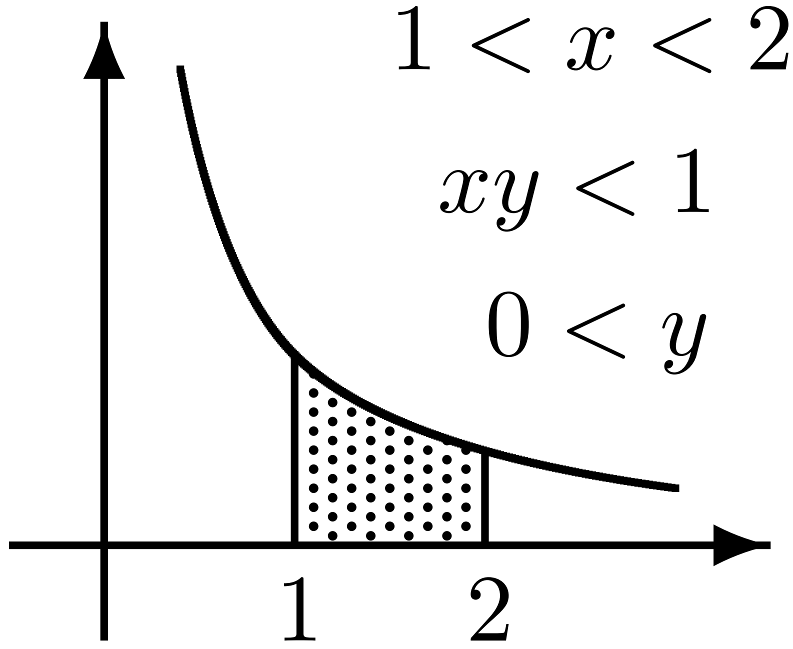
$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000\ldots$$

このギャップは何に由来するのでしょうか?

1 Periods

π と $\log 2$ は整数係数多項式で表される図形の体積としてあらわされる.





1 Periods

Kontsevich **と** Zagier **の指摘**：

$$\pi = \int_{x^2+y^2<1} dxdy,$$

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

$$\rho = \int \ldots$$ **多分そんな公式はない**.

1 Periods

Def. **有理係数多項式で定義された領域上, 有理関数を積分して得られる実数で生成される$\mathbb{Q}$-ベクトル空間を$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$で表す.**

$\alpha \in \mathcal{P}$**を周期***(period)***という.**

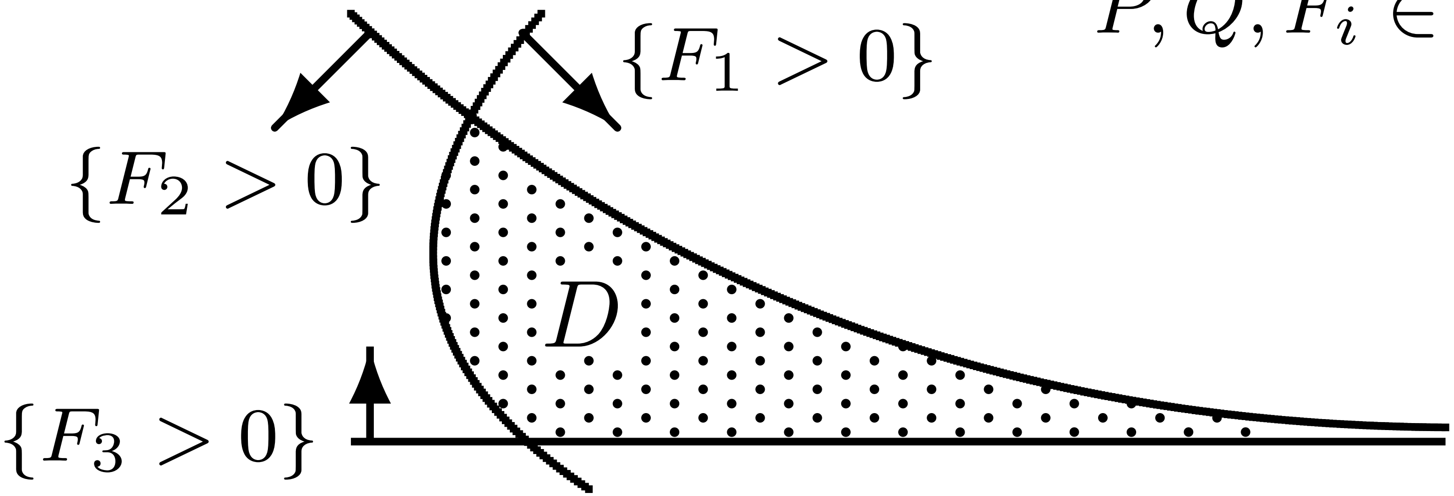
1　Periods

<u>Def.</u> $\mathcal{P}$ **は以下のような積分で生成される** $\mathbb{Q}$-**ベクトル空間である**.

$$\int_D \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \qquad \textbf{(絶対収束)}$$

where $D = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid F_1(x) > 0, \ldots, F_p(x) > 0\}$,

$$P, Q, F_i \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\ell].$$



1　Periods

周期$\mathcal{P}$について知られていること：

<u>Prop.</u> $\mathcal{P}$ **は**$\mathbb{Q}$-**上の代数(特に積で閉じている)**.

$(\because)$ Fubini's theorem. $\square$

<u>Prop.</u> $\mathcal{P}$ **は可算無限集合である**.

$(\because)$ $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ is countable. $\square$

<u>Prop.</u> $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathbb{R}$

1 Periods

Prop. $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathbb{R}$

$(\because)$

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2<1} dx$$

$\therefore \sqrt{2} \in \mathcal{P}$. **さらに**, $\pi \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ $\square$

例 $\pi,\ \log 2 \in \mathcal{P}$,

$$\zeta(n) = \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_n}{t_n} \in \mathcal{P}$$

1 Periods

Kontsevich-Zagier は$\mathcal{P}$に関する様々な問題を提出している．最も重要に思われるものは：

周期の間にはどのような関係式があるか?

<u>関係式の例．</u>次を示せ：

$$\log 6 = \log 2 + \log 3,$$

但し，$\log n = \int_1^n \frac{dx}{x}$．

1 Periods

Proof. $(x = 2x')$

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{dx}{x} &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^6 \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^3 \frac{dx'}{x'} \\ &= \log 2 + \log 3\end{aligned}$$

$\square$

1 Periods

この証明は実数の値については何も教えてくれない. (**例えば**1.8**より大きいかどうか**?)

単に一方の積分を変形してもう一方の積分を導いている.

$$\int_1^6 \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^3 \frac{dx}{x}$$

1 Periods

この証明は実数の値については何も教えてくれない. (**例えば**1.8**より大きいかどうか**?)

単に一方の積分を変形してもう一方の積分を導いている.

積分$\int_\Delta \omega$**の変形ルール：**

(i) **線形性**(on Δ and ω).

(ii) **変数変換**: $dy = \frac{dy}{dx}dx$.

(iii) **ストークスの定理**: $\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$.

1 Periods

Conjecture 1 (Kontsevich-Zagier). Periods coincide

$$\int_{\Delta_1} \omega_1 = \int_{\Delta_2} \omega_2 \in \mathcal{P},$$

only when (i), (ii) and (iii).

I.e.,

– No miraculous coincidences between periods.
– Analogous to Hodge conjecture.

1 Periods

Problem 1 Find an algorithm to determine whether or not two given numbers in $\mathcal{P}$ are equal?

Problem 2 Find an algorithm to determine whether a given real number known numerically to high accuracy, is equal (within that accuracy) to some simple period.

1 Periods

より素朴な疑問:

1 Periods

より素朴な疑問:

どんな数が$\mathcal{P}$に入っていないか?

1 Periods

より素朴な疑問:

どんな数が$\mathcal{P}$に入っていないか?

Conj. $\frac{1}{\pi}, e, \gamma, \rho \notin \mathcal{P}$.

現時点では全く手が出なさそうに思える.

Motivation: **とにかく何でも良いので一つ**
$\alpha \notin \mathcal{P}$**をつくりたい!**

1 Periods

Motivation: **実数の例**$\alpha \notin \mathcal{P}$**を作りたい**.

1 Periods

Motivation: 実数の例$\alpha \notin \mathcal{P}$を作りたい.

実数に関する何らかの定性的な性質であって, $\mathcal{P}$と非周期を区別できるものが必要である.

1 Periods

Motivation: 実数の例$\alpha \notin \mathcal{P}$を作りたい.

実数に関する何らかの定性的な性質であって, $\mathcal{P}$と非周期を区別できるものが必要である.

そもそも

実数$\alpha \in \mathbb{R}$を作る

とはどういうことなのか?

2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

2 Strategy — What "Exhibit a real" means?

Recall that $\mathbb{R}$ is

the completion of $\mathbb{Q}$ w.r.t. $d(x, y) = |x - y|$.

So any real number $\alpha \in \mathbb{R}$ is the limit

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$$

of a rational Cauchy sequence $x_n \in \mathbb{Q}$.

$$x_n = \frac{a(n)}{b(n)}, \text{ where } a \text{ and } b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

2 Strategy — What "Exhibit a real" means?

Summary so far:

A real number $\alpha \in \mathbb{R}$ *is expressed by a pair* a, b *of functions* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *as:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \alpha.$$

We are interested in $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, where

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}.$$

2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

Hierarchies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (after A. Turing 1936):

2 Strategy — What "Exhibit a real" means?

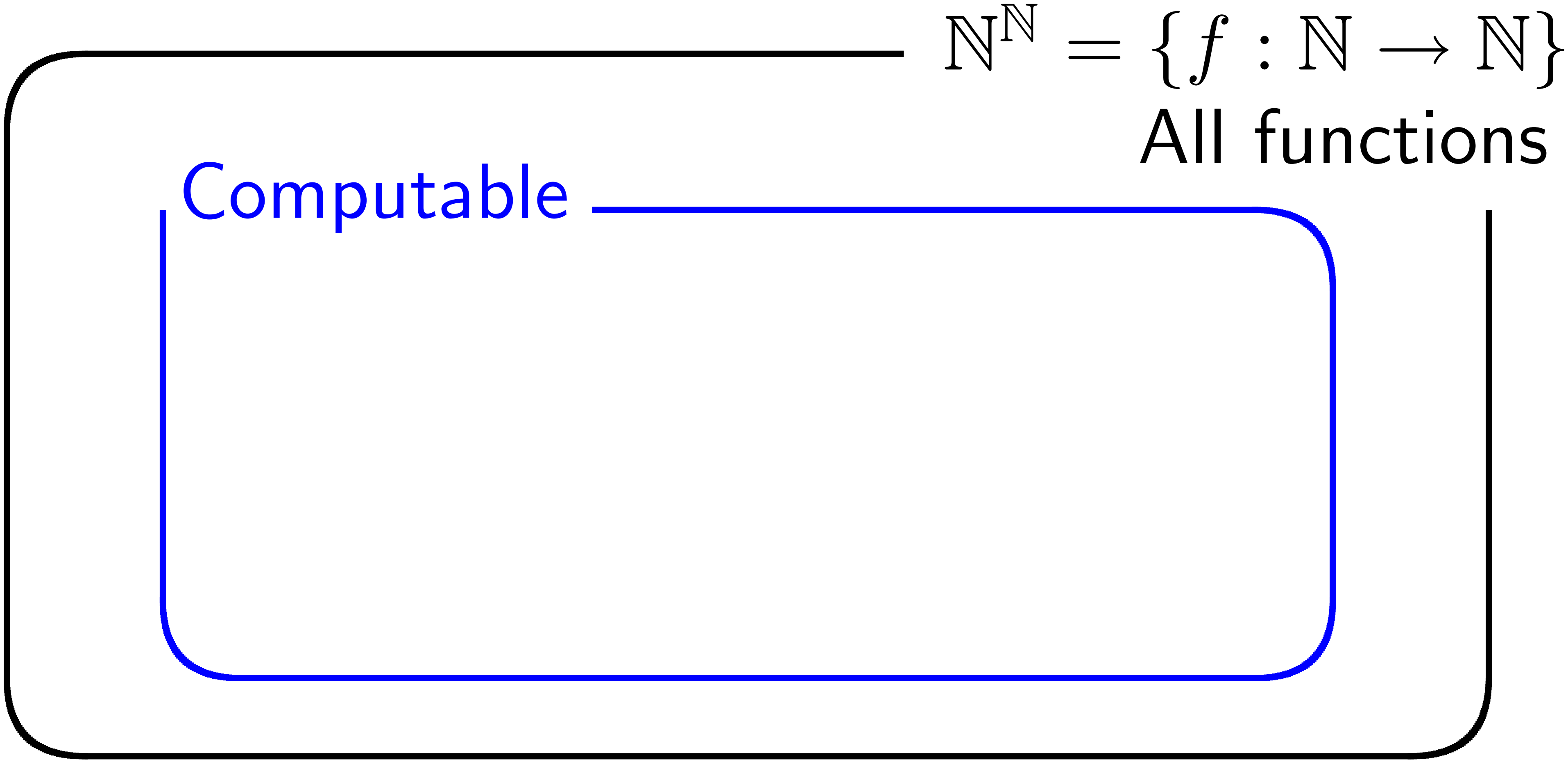
Hierarchies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (after A. Turing 1936):

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$$

All functions

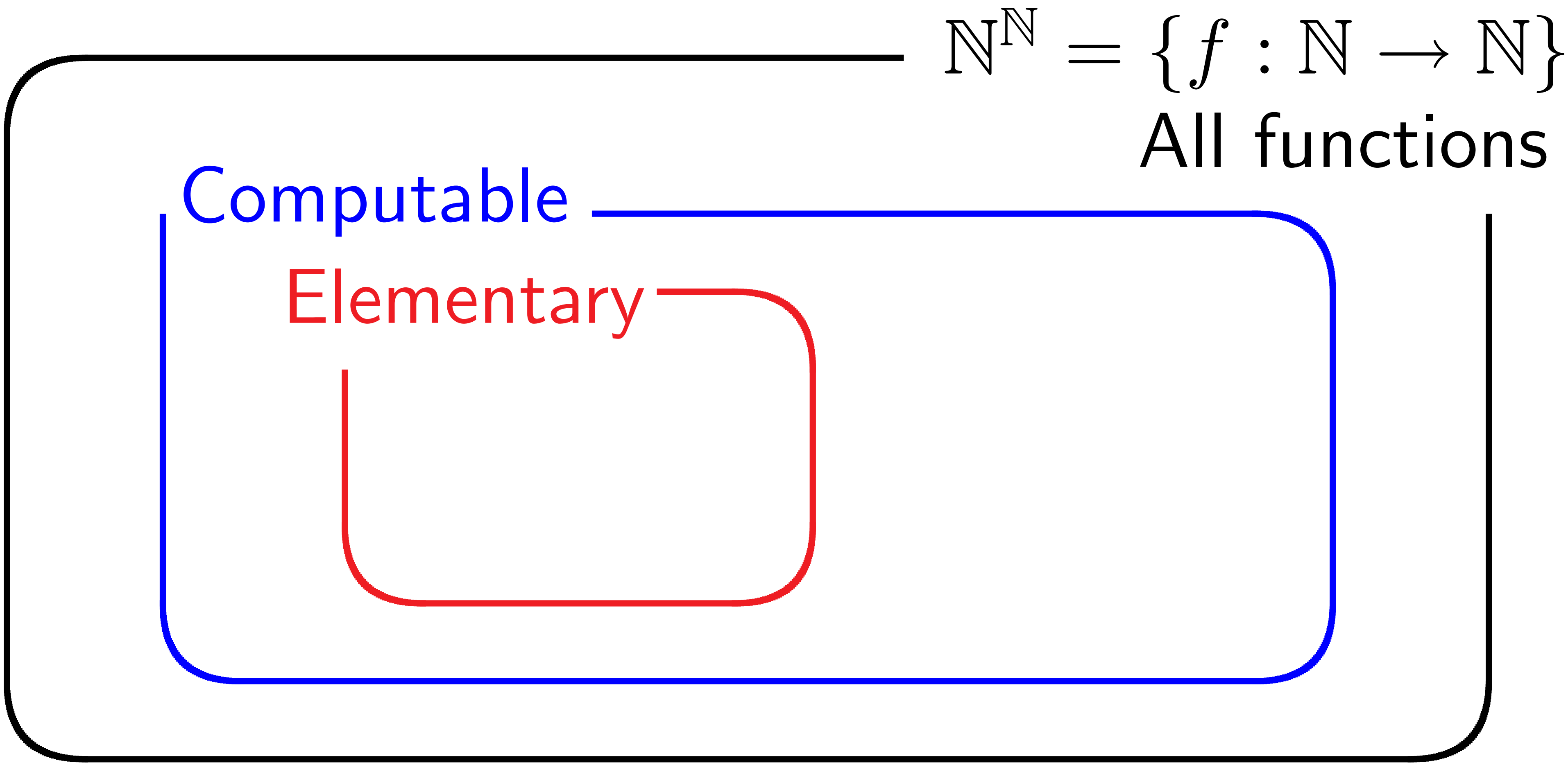
2 Strategy — What "Exhibit a real" means?

Hierarchies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (after A. Turing 1936):



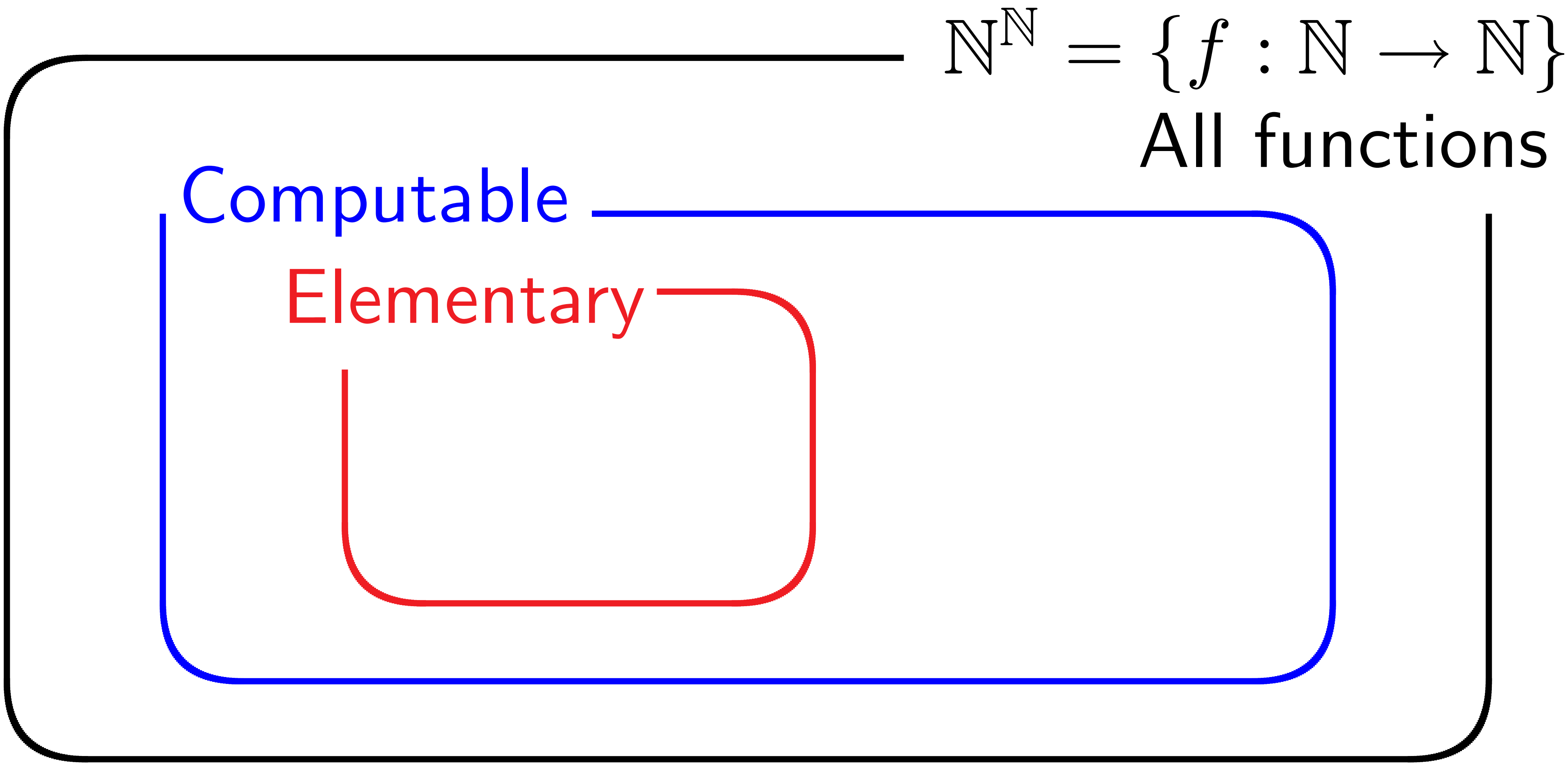
2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

Hierarchies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (after A. Turing 1936):



2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

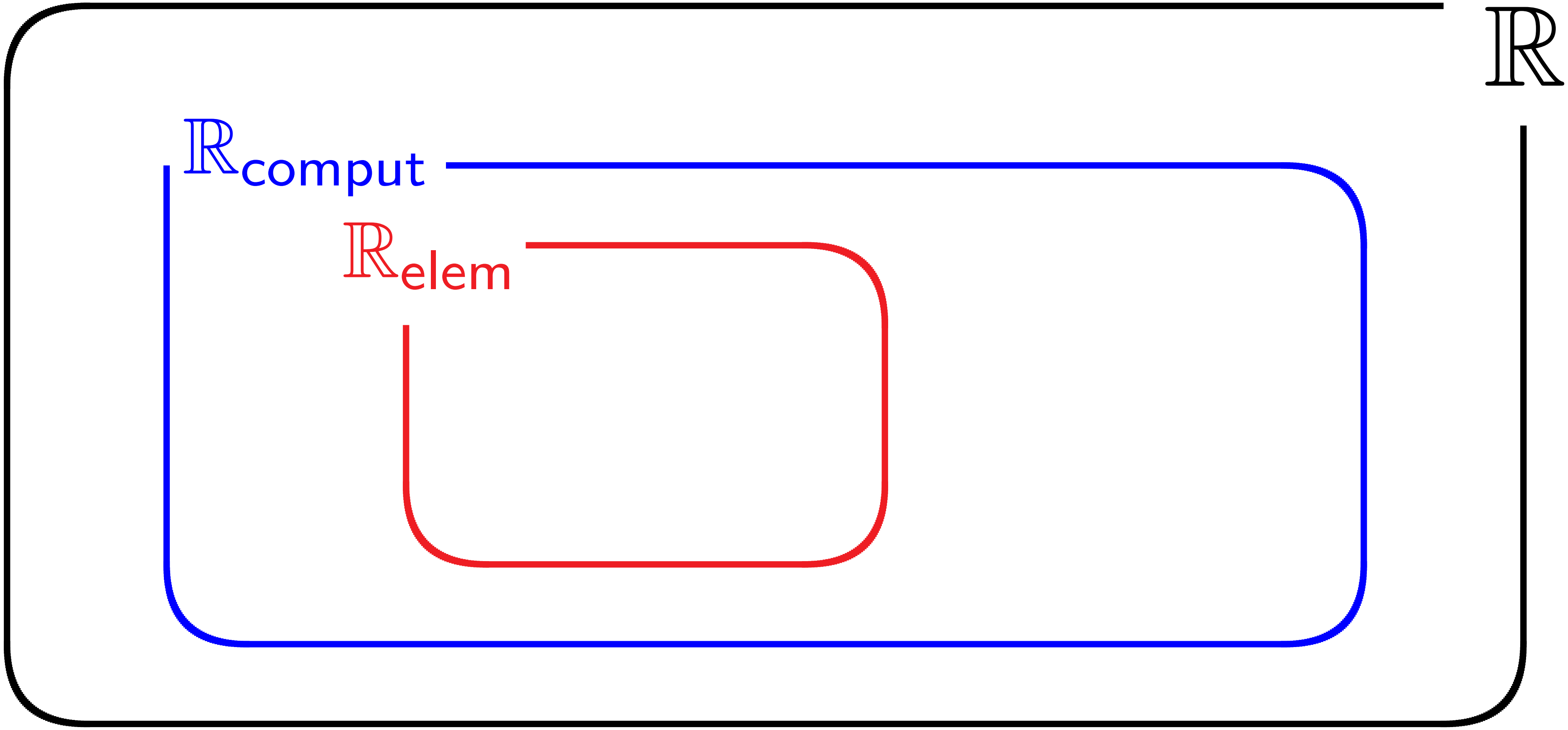
Hierarchies in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (after A. Turing 1936):



induces hierarchy on $\mathbb{R} = \{\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}\}$

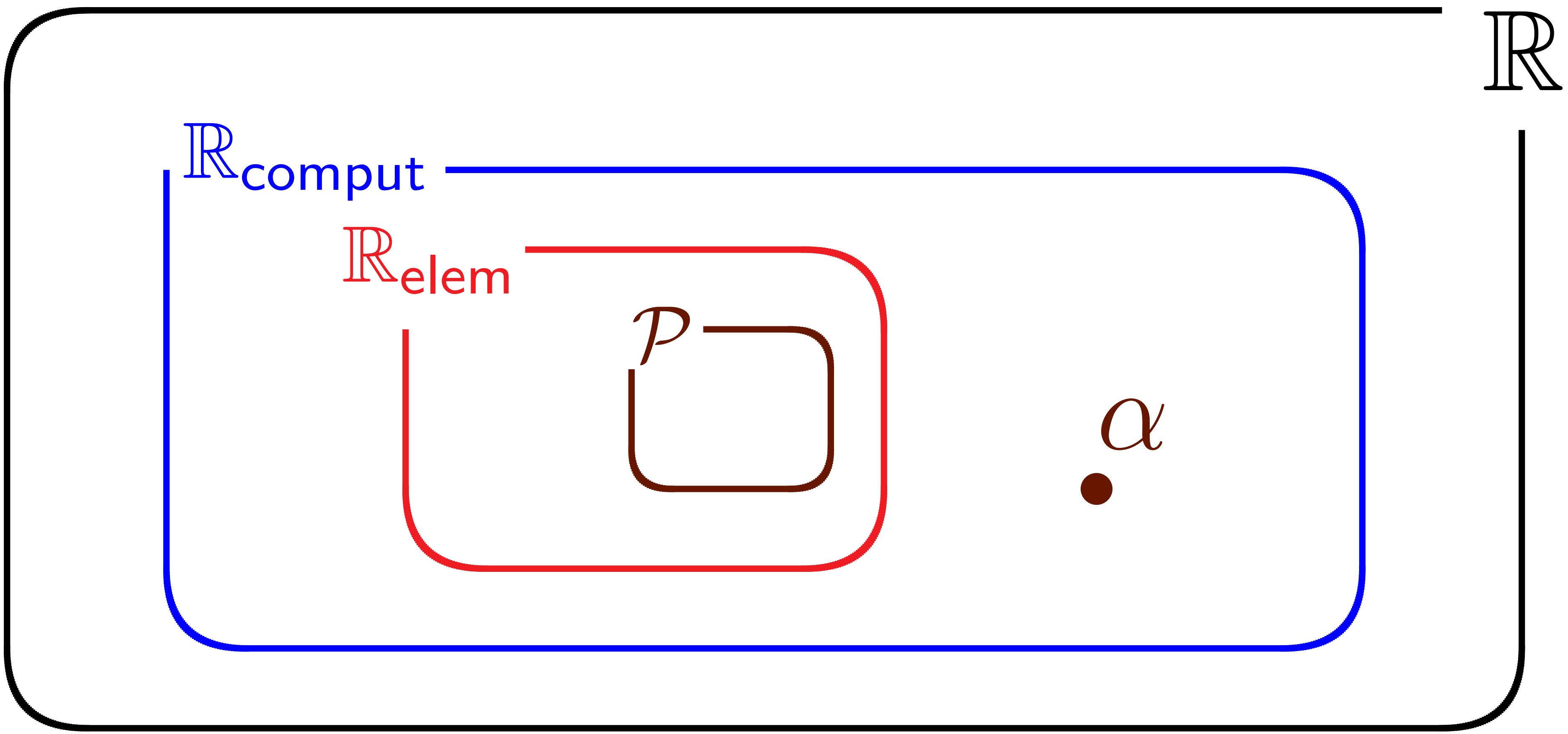
2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

Strategy:



2 Strategy — What “Exhibit a real” means?

Strategy: prove $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_{\text{elem}}$ and make $\alpha \notin \mathbb{R}_{\text{elem}}$.



3 Elementary real numbers

3 Elementary real numbers

$\alpha \in \mathbb{R}$ is an *elementary real number* if

$\exists a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: elementary functions, s.t.

$$\left|\alpha - \frac{a(n)}{b(n)}\right| < \frac{1}{n},$$

$\forall n > 0$. (i.e., $\frac{a(n)}{b(n)} \to \alpha$ + more.)

$\mathbb{R}_{\text{elem}}$ is the set of elementary real numbers.

3 Elementary real numbers

Elementary functions is the smallest class of functions which

1. contains initial functions, and
2. is closed under some operations.

From now,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}.$$

3 Elementary real numbers

Initial functions:

1. The zero function: $o(x) = 0$.
2. The successor function: $s(x) = x + 1$.
3. The i-th projection: $P_i^\ell(x_1, \ldots, x_\ell) = x_i$.
4. Addition $+$, multiplication $\times$ and modified subtraction

$$m(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{if } x \geq y, \\ 0 & \text{if } x < y. \end{cases}$$

3 Elementary real numbers

Operations:

1. Composition: $f(g_1(x), \ldots, g_\ell(x))$.
2. Bounded sum:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{t=0}^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_\ell).$$

3. Bounded product:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \prod_{t=0}^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_\ell).$$

3 Elementary real numbers

Elementary functions is the smallest class of functions which

1. contains initial functions, and
2. is closed under some compositions, bounded sum and bounded product.

$$(\mathrm{elem}) \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

elementary functions with one variable.

3 Elementary real numbers

Example:

$$\mathbf{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

is elementary.

$(\because)$

Similarly, so is

$$f_{>}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{if } x > y \\ 0 & \text{if } x \leq y \end{cases}$$

3 Elementary real numbers

Other examples:

1. Polynomial, power x^y, factorial $x!$,
2. Quotient:

$$(x, y) \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$$

3. Square root: $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, Logarithm: $\lfloor \log_x y \rfloor$,
4. n-th prime p_n, number of primes $\pi(x)$,

Fibonacci, etc.

3 Elementary real numbers

Example of a "non-elementary" function:

$$f(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}} \quad (x \text{ floors}).$$

i.e.,

$f(2) = 2^2 = 4,$

$f(3) = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987,$

$f(4) = 4^{4^{4^4}} = 4^{4^{256}} = 4^{1.34078\cdots\times 10^{154}}.$

3 Elementary real numbers

f diverges faster than any elementary function.

$$f(10) = 10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}}}}$$

$$\log_{10} 10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}}}} = 10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}}}$$

3 Elementary real numbers

Recall $\mathbb{R}_{\text{elem}}$ is the set of $\alpha \in \mathbb{R}$ s.t. $\exists a(n), b(n) \in$ (elem) with

$$\left| \frac{a(n)}{b(n)} - \alpha \right| < \frac{1}{n},$$

for $n > 0$.

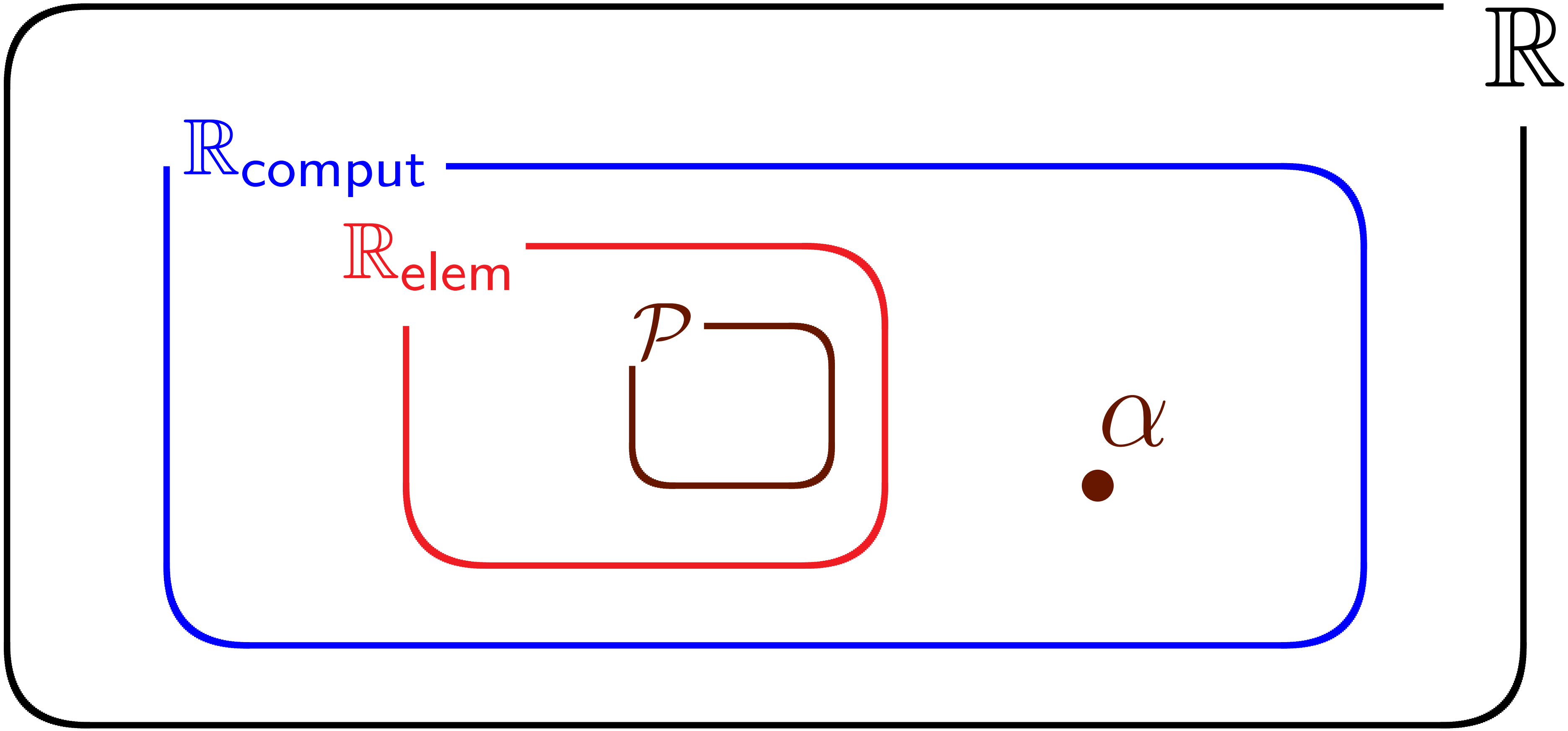
Prop. $\mathbb{R}_{\text{elem}}$ is a field.

Ex. $\overline{\mathbb{Q}}, \pi, e$ are elementary.

4 Periods are elementary

4 Periods are elementary

<u>Main Thm</u>. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$ and can make $\alpha \notin \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$.



4 Periods are elementary

<u>Main Theorem:</u> $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$.

For a bounded domain ($F_i \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\ell]$),

$$D = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid F_1(x) > 0, \ldots, F_p(x) > 0\},$$

we will prove $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$.
We may assume

$$D \subset [0,1]^\ell.$$

4 Periods are elementary

To prove $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$, we need an elementary map

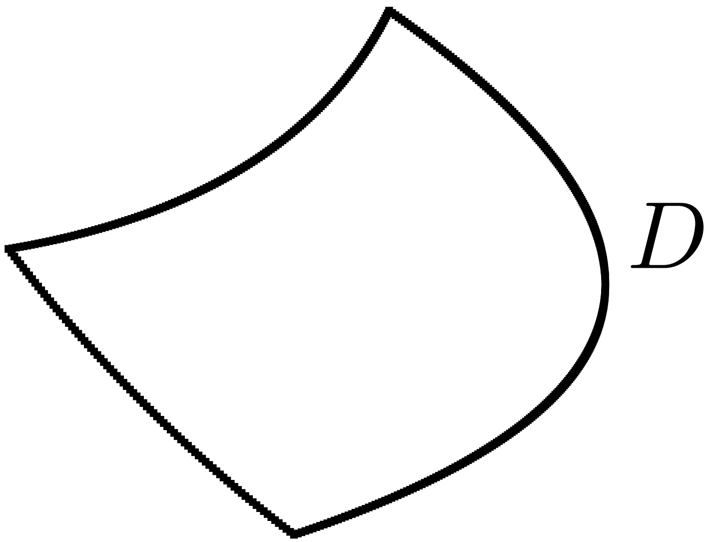
$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

such that

$$|\mathrm{vol}(D) - x(n)| \leq \frac{1}{n}.$$

4 Periods are elementary

Claim. $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$.

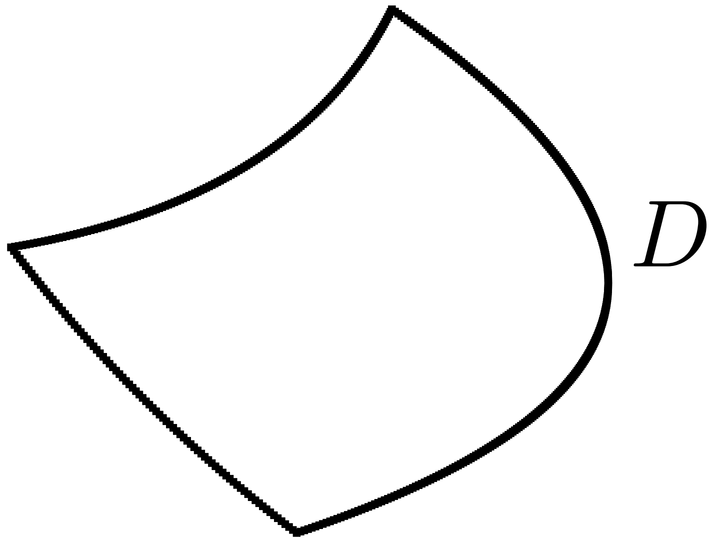


4 Periods are elementary

Claim. $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$.

We use Riemann sum.

(Approximate $D \subset \mathbb{R}^\ell$ by cubes.)

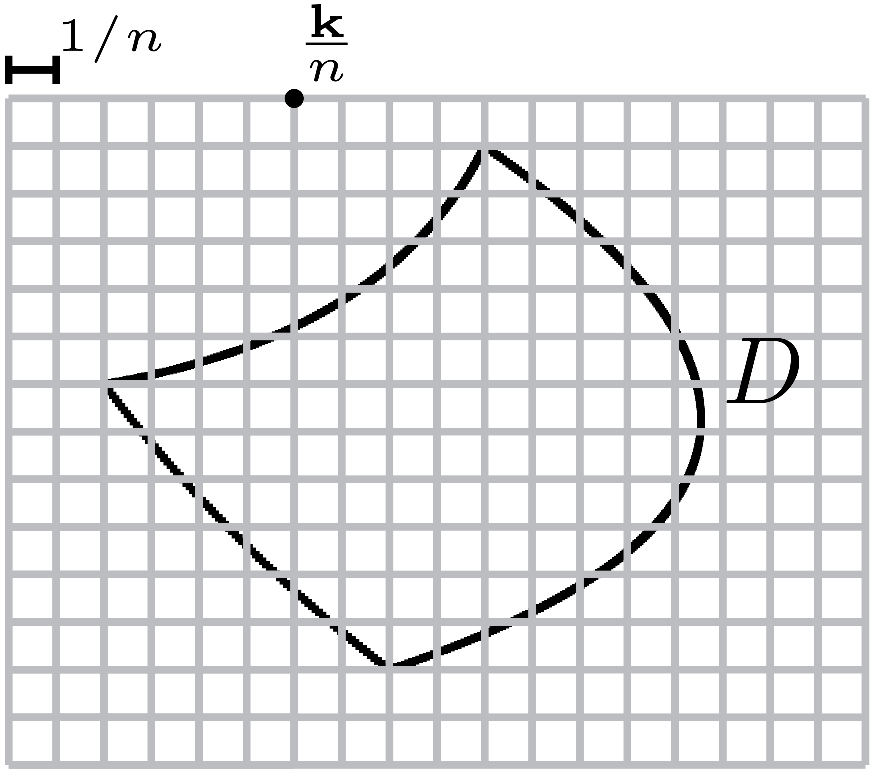


4 Periods are elementary

Claim. $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\text{elem}}$.

We use Riemann sum.

(Approximate $D \subset \mathbb{R}^\ell$ by cubes.)

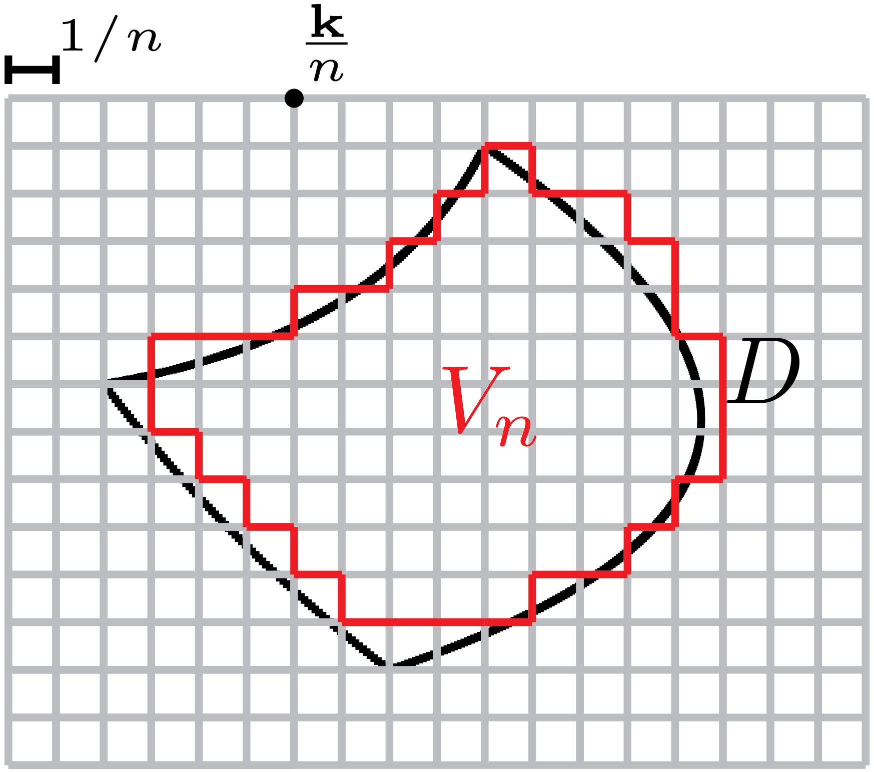


4 Periods are elementary

Claim. $\mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\text{elem}}$.

We use Riemann sum.

(Approximate $D \subset \mathbb{R}^\ell$ by cubes.)



$n \mapsto \mathrm{vol}(V_n) \in \mathbb{Q}$

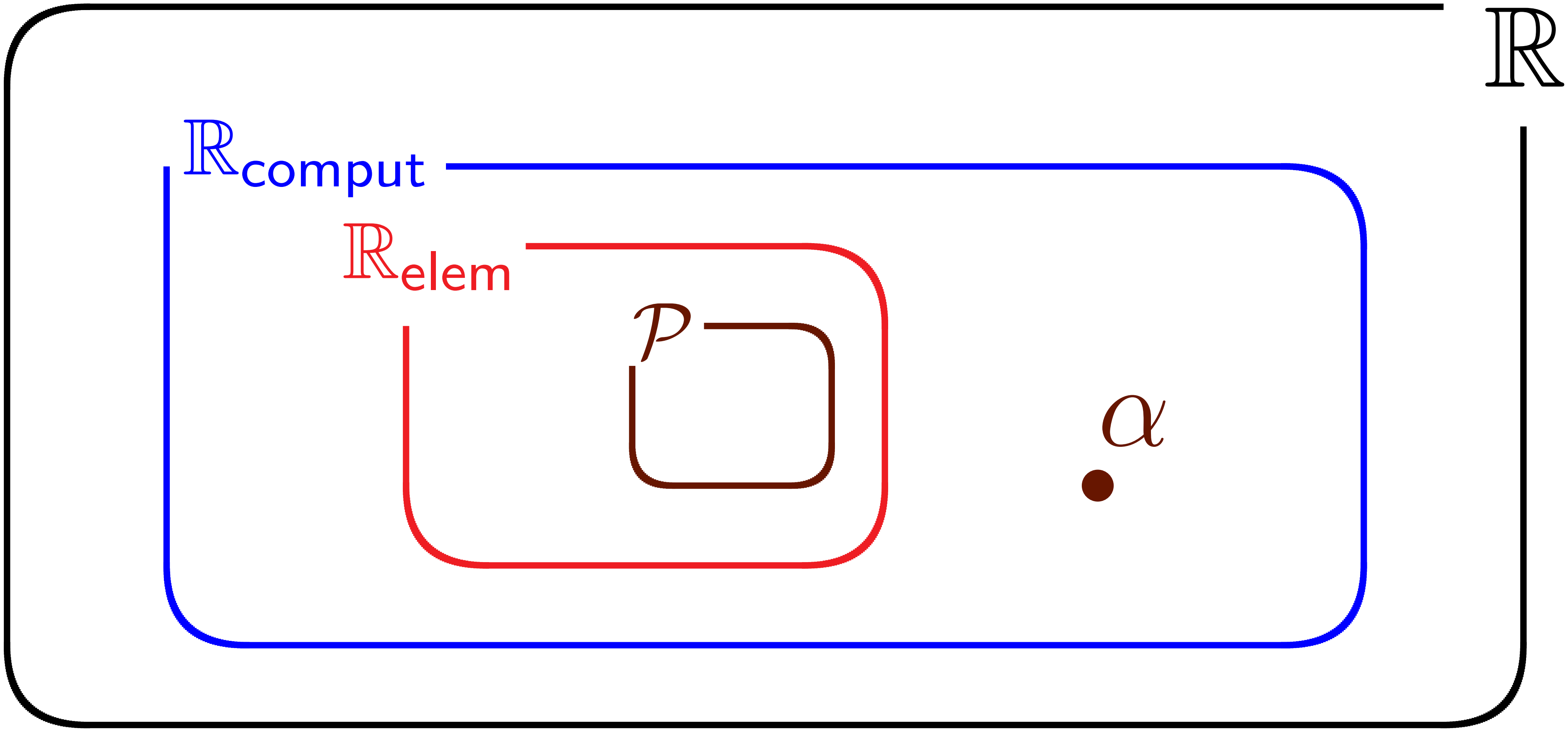
is elementary (on n).

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(V_n) = \mathrm{vol}(D)$$

$\therefore\ \mathrm{vol}(D) \in \mathbb{R}_{\text{elem}}$ $\square$

4　Periods are elementary

$\alpha \notin \mathbb{R}_{\mathrm{elem}}$ **の作り方のアイデア：**



4　Periods are elementary

1. $\mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$ を algorithmic に一列に並べる:

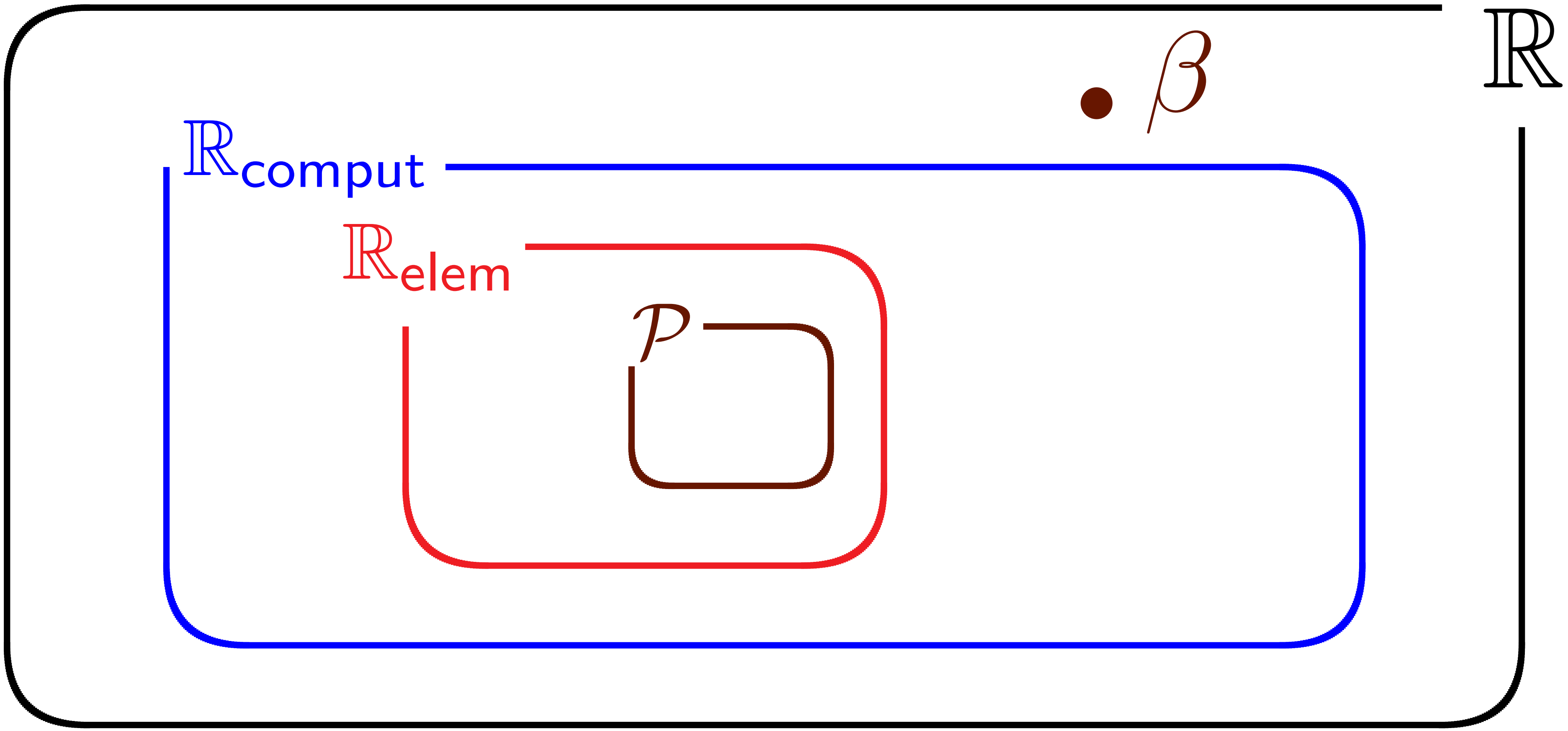
$$\mathbb{R}_{\mathsf{elem}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}.$$

2. 対角線論法を使って, $\alpha \in \mathbb{R}_{\mathsf{comput}} \setminus \mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$ に収束するcomputable な数列 $x(n) \in \mathbb{Q}$ を作る.

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の "作り方"

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の "作り方"

$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の "作り方"：



5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の “作り方”

無限変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ の数え上げをひとつ固定：

$$\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots] = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots\}.$$

数列 ε_k を次で定義する：

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & f_k(x) = 0 \text{が整数解をもつ} \\ 0, & f_k(x) = 0 \text{が整数解をもたない} \end{cases}$$

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の “作り方”

$$\beta := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{10^k} \in \mathbb{R}$$

Prop. $\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$.

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の "作り方"

$$\beta := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{10^k} \in \mathbb{R}$$

Prop. $\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$.

$(\because)$ $\beta \in \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ とすると,

$$|\beta - x(n)| < \frac{1}{n}$$

なる計算可能な有理数列 $x(n)$ が存在する.

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の “作り方”

$(\because)\ \beta \in \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ とすると,

$$|\beta - x(n)| < \frac{1}{n}$$

なる計算可能な有理数列 $x(n)$ が存在する.

5　おまけ：$\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ の "作り方"

$(\because)$ $\beta \in \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ とすると,

$$|\beta - x(n)| < \frac{1}{n}$$

なる計算可能な有理数列 $x(n)$ が存在する.
$\Longrightarrow$ β の小数展開 k 桁目を計算するアルゴリズムが存在する. これはヒルベルトの第10問題 (Diophantine 方程式の解の存在の決定不可能性) に反する. よって $\beta \notin \mathbb{R}_{\mathrm{comput}}$ $\square$

6　まとめ

- 「周期」$\mathcal{P}$ は近似列が計算可能な $\mathbb{R}_{\mathsf{comput}} \subset \mathbb{R}$ よりも小さい部分 $\mathbb{R}_{\mathsf{elem}}$ に入っている.
- 「周期」$\mathcal{P}$ は代数的数 $\overline{\mathbb{Q}}$ を超えたところでも美しく統制された数のクラスが存在する希望を持たせてくれる.

数学が続く限り実数の探求も続くだろう.