

# フィボナッチと射影幾何

吉永正彦

## 1 Fibonacci と黄金比

4月から9月までイタリアのピサ大学に滞在して数学の研究をしています。ピサといえば何と言っても斜塔とガリレオの実験で有名なので、以前セミナーの際に「ガリレオを初め、偉大な科学の伝統を持つピサ大学で講演できて光栄です」とあいさつすると、聴衆からすかさず「フィボナッチもいたぞ」というコメントが返ってきました。

Leonardo da Pisa, 通称フィボナッチ (Fibonacci, 「ボナッチの息子」という意味のあだ名), (1170頃~1250頃)の詳しい生涯は分かっていません。現在では「フィボナッチ数列」の名前で高校の教科書にも登場する有名人ですが、科学史的な重要性はむしろ別の点にあります。ギリシア以降数学は主に東方(アラブ)で栄えていました。フィボナッチは若い頃父親について、北アフリカに滞在し、当時最先端を走っていたアラブの数学者達から直接教えを受けました。そしてピサに帰国後の1202年“Liber abaci (計算の書)”を出版します。この本で当時ローマ世界で使われていた「ローマ式記数法<sup>1</sup>」の代わりに、より効率的なアラビア式記数法(現在使われているもの)がヨーロッパ世界に初めて紹介されました。後にヨーロッパが数学発展の中心になることを考えると、その歴史的意義は測り知れません。ちなみにフィボナッチ数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,$$

$$f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

もこの本に書かれているそうです。フィボナッチ数列は、この単純な定義からは想像もつかな

<sup>1</sup>10~20をX, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XXと表わすアレです。

い、多くの性質が知られ、現在でも活発に研究されています<sup>2</sup>。特に有名な性質として、黄金比との関係

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

を挙げておきます。

自然界でもフィボナッチ数列や黄金比が現れることが色々な場面で観察されています(本稿のテーマではないので詳しくは触れません<sup>3</sup>)。「様々な場面で観察される」ことの理由としては、フィボナッチ数列や黄金比を生成するメカニズムが非常に単純であること、が背景にあると思われまます。この「整数や有理数以外の無数に存在する数のなかで、黄金比はとりわけ単純な数である」という経験的事実に、数学的な根拠を与えるのが本稿の主テーマです。

目標 1 「最も単純な無理数とは何か?」という問いを射影幾何学的に定式化して、答を与える。

## 2 遠近法と射影幾何

ピサはイタリア中部のトスカーナ州に属し<sup>4</sup>、州都フィレンツェはルネッサンス文化の中心として世界的に有名で、質量とも圧倒的な絵画・彫刻コレクションを誇るウフィッツィ美術館、アカデミア美術館はおそらく今日も長蛇の列です。

<sup>2</sup>例えば The Fibonacci Association 発行の研究雑誌 The Fibonacci Quarterly なるものがあります。プレプリントサーバー ArXiv には今年に入ってから多くのフィボナッチ数列に関する論文が提出されています。

<sup>3</sup>おそらく多くの場所で触れられていますが、一冊だけ挙げると、Coxeter, Introduction to Geometry. ちくま学芸文庫から邦訳が出ています。

<sup>4</sup>他にもワインの産地として有名なキャンティ渓谷、エトルリア時代にさかのぼる町ヴォルテッラ、ナポレオンの流刑地エルバ島などもトスカーナ州内にあります

私は美術史については全くの素人ですが、数学的に見過ごすことのできない歴史的「事件」がこの地方でありました。それは1200年～1500年頃にかけてドゥッチオ、ジョット、ブルネレスキ、ピエロ・デッラ・フランチェスカ、レオナルド・ダ・ヴィンチ等トスカーナの芸術家たちによって行われた「遠近法」の発展です。

写真やテレビを物心つく前から見慣れた我々には想像しがたいですが、それらが生まれる遙か昔、絵画においていかにして立体的に（“リアルに”）見せるか、というのは一大問題でした。

三次元世界の景色を二次元平面に描くには様々な注意が必要です。遠近法とは元の（三次元）世界の幾何学的性質を二次元平面上のどのような幾何学的性質に対応させるか、という技術と言ってよいのではないかと思います。例えば三次元世界で「（地面と平行な）二本の平行な直線」を画用紙に描くことを考えましょう。現実世界では幅一定の平行線でも、観察者から遠ざかると、視角が狭まるので、画用紙上には狭くなっていくように書かねばなりません。どれくらいの割合で狭くなるのかを正確に定式化したのが、遠近法の決定的な重要性だと思います。答えは、画用紙上では「地平線で交わる二本の直線」として描けばよいのです。例えば図1では、建物の稜線や道路など平行な線ごとに、地平線上の一点で交わる直線となっています。

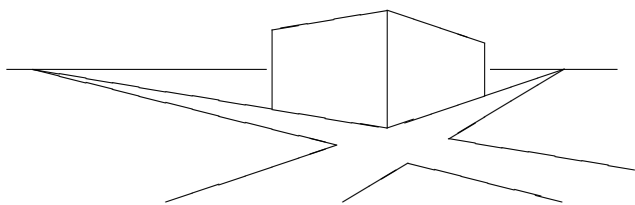


図 1: 交差点にある建物 (のつもり)

遠近法の確立からいわゆる「射影平面・射影幾何」への道はまた単純ではありませんが、一言で言うと、平面  $\mathbb{R}^2$  に仮想的な直線（無限遠直線） $L_0$  を付け加えたものが射影平面  $\mathbb{P}^2$  です。遠近法との関係を述べますと、地面を平面  $\mathbb{R}^2$  とみ

なした際に、地平線が無限遠直線に対応します<sup>5</sup>。元の平面  $\mathbb{R}^2$  上の平行な二直線は、射影平面  $\mathbb{P}^2$  上では交わります。ただしその交点は無限遠直線  $L_0$  上にあるわけです。このように射影平面上では「どんな二直線も必ず一点で交わる」という命題が成立し、その上の幾何学は単純になります。射影平面（及びその高次元化である射影空間）は現代数学でも重要な役割を果たします。

トスカーナの地平線は遠近法の創始者たちが見ていた無限遠直線なのだと考えると、日々射影空間を使っている一研究者として、感慨深いものがあります。

### 3 交差パターンの実現可能性

前々節の最後で、黄金比  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  が（例えばフィボナッチ数列という）非常に単純なメカニズムで生成されるために、様々な自然現象で観察される、と書きました。実は（私には本当の理由はまだ分かっていないような気がするのですが）、射影幾何学的な問題でも「黄金比が最も自然な無理数として現れる」という現象があります。そのような問題「交差パターンの実現可能性問題」を紹介したいと思います。

問題 1 (射影) 平面上の  $n$  本の直線  $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$  達の交差パターンをあらかじめ指定した際に、その交差パターンを実現する直線  $L_i$  の方程式を有理数係数で書き下せるか？

という問題を考えます。「交差パターン」や「それを実現する」という言葉の定義を与えていないので、上の文章だけでは意味不明かと思われるので以下簡単な例をみます。またこれ以降  $L_0$  は無限遠直線だと思ふことにして、「平面  $\mathbb{R}^2$  上の直線  $L_1, \dots, L_{n-1}$  の交差パターン」を考えることにします。

<sup>5</sup>地球がもっと小さい、または人間がもっと巨大で、自分が住んでいる星の丸さを実感できたとしたら、射影幾何は発達したのが気になります。それともどんな星でもその上の「生命体」は自分の星の丸さを実感できないサイズになってしまうのでしょうか。

例 1  $n = 6$ として ( $L_0$  は無限遠直線)  $L_1, \dots, L_5$  が次のような交差パターンを持つようにせよ:

- $L_1 // L_2$ ,
- $L_3 // L_4$ ,
- $L_1, L_3, L_5$  は一点で交わる,
- $L_2, L_4, L_5$  は一点で交わる.
- 他に特殊なことは起こらない(つまり  $L_1, L_4$  や  $L_2, L_3$  は普通に一点で交わり, それらの交点を他の直線が通ることはない).

「交差パターン」を文章で書くと上のように長くなりますが, 要するに, 図 2 で実現されている直線  $L_1, \dots, L_5$  の交わり方を文章で書き下したものが「交差パターン」です<sup>6</sup>. 実現性問題とは逆に「交差パターン」が先に与えられたときに, それを実現する直線達の方程式を書き下した際に係数がどうなるか, という問題です.

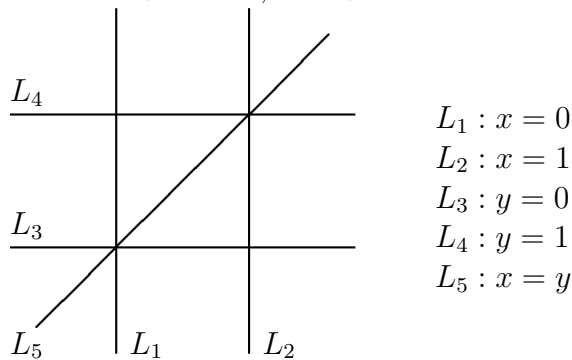


図 2: 例 1 の交差パターンの実現の例

例 2 ( $L_0$ )  $L_1, \dots, L_6$  が次の交差パターンを持つようにせよ:

- $L_1, L_2, L_3, L_4$  は一点で交わる.
- $L_1 // L_5$ ,
- 他は特別なことは起こらない.

これも例えば図 3 のように実現できます.

<sup>6</sup>本来数学者は  $L_0$  を特別視したくないので「平行」という言葉を使うのを避けたがります. その場合は交差パターンとは一点で交わっている三直線のデータです. 例 1 では  $\{012, 034, 135, 245\}$  となり, 例 2 では  $\{123, 124, 134, 234, 015\}$  です.

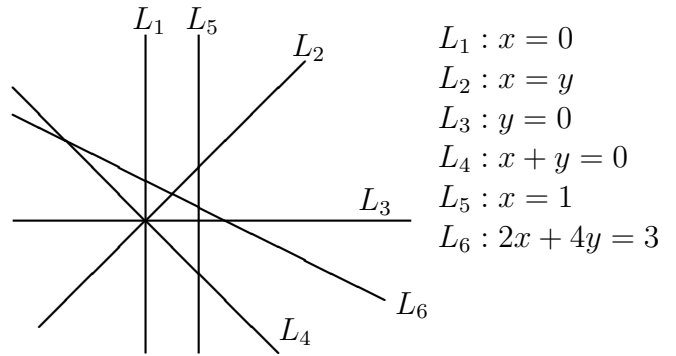


図 3: 例 2 の交差パターンの実現の例

以上二つの例では, 交差パターンを満たす直線達の方程式が有理数係数で表わすことが出来ました. どんな交差パターンでも必ず  $\mathbb{Q}$  係数で実現できるかという, 実はそうではないことが知られています. それどころか事態はもっと悪く, 全ての交差パターンを実現するには代数的数<sup>7</sup>全体  $\overline{\mathbb{Q}}$  が必要になることが知られています. 言い換えると全ての交差パターンを実現するには, あらゆる複雑な代数的数が必要となり, 例えば  $^{100}\sqrt{2} + ^{234}\sqrt{71} + ^{5000}\sqrt{1999}$  のような数を使わないと実現できないような交差パターンが存在するわけです. (興味をお持ちの方向けにキーワードだけ挙げておきます: “von Staudt construction”, “Mnëv の Universality Theorem”).

この辺りを学んだ際に, 直線の交差パターンというのは, 「数」やその「演算(加減乗除)」よりもはるかに原始的な対象で, 交差パターンの実現性問題は「数」や「演算」の複雑性に本質的に関わる非常に深い方向に伸びているように思われました.

では逆に  $\mathbb{Q}$  上実現できない最も単純な交差パターンは何なのでしょう? またその際に必要となる無理数はどのような数なのでしょう? それらが分かれば(交差パターンの実現性問題という非常に限られた視点からですが)「最も単純な無理数とは何か?」という問いに対する, 一つの定式化と答を与えることになります. 実はこの枠組みで最初に必要になる無理数は黄金比(というより  $\sqrt{5}$ )なのです. より正確には次のことが知られています.

<sup>7</sup>有理数係数の方程式の解を代数的数と言います.  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ , それらの加減乗除などは全て代数的数です.

定理 1  $\mathbb{R}$  上実現可能<sup>8</sup>な交差パターンを考える.

- (1)  $n = 8$  以下の交差パターンは  $\mathbb{Q}$  上実現可能.  
 (2)  $n = 9$  の場合は,  $\mathbb{Q}$  上実現できない交差パターンが一つあり (図 4), それは  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  を含む体上でのみ実現可能.

さて  $n = 9$  で  $\mathbb{Q}$  上実現不可能な交差パターンは次のように構成されます.  $t$  を実数として図 4 の交差パターンを持つ直線の配置を考えます. 図は何気なく書いていますが, この配置を実現するには,  $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  でないといけないことが分かります<sup>9</sup> ( $t$  をそれ以外の値に取ると, 交差パターンが崩れます).

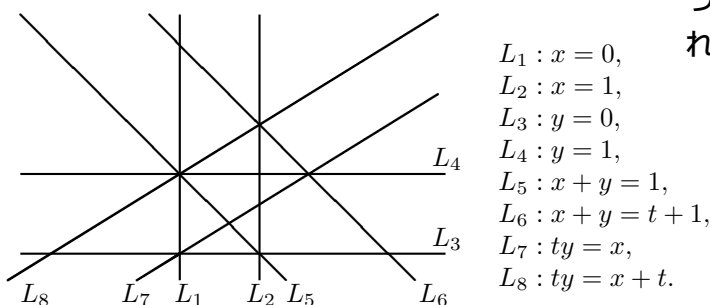


図 4:  $\mathbb{Q}$  で実現不可能な交差パターン

この定理の証明は基本的に「9本以下の交差パターンの分類」をするという方針でなされます.

定理より  $n \leq 9$  ではこれが唯一の例外です. また  $n = 10$  では  $\sqrt{2}$  が必要になる交差パターンが現れます. つまり, ある意味, 黄金比は  $\sqrt{2}$  など他の無理数よりも「単純な (交差パターンの実現に必要となる)」無理数なのです.

交差パターンの実現性問題の周辺はまだまだこれから開拓されるべき方向だと思います.

## 4 おわりに

C. R. Wylie, Introduction to Projective Geometry の冒頭で著者が次のように述べています.

The origins of projective geometry, like those of many other branches of mathematics, are to be found in man's concern with the world around him.

このような問題意識はいつまでも持ち続けたいものです. 座標概念の登場で初等幾何がある意味「完成」したように, フィボナッチ数列が「完成」する日がいつかやってくるのでしょうか. いつの日か, 黄金比がこのように色々な場面で現れる真の理由がはっきり分かるのでしょうか.

吉永正彦

京都大学数学教室

mhyo@math.kyoto-u.ac.jp

(2010年7月25日)

<sup>8</sup>ここで仮定を“ $\mathbb{C}$  上実現可能”に変えると  $n = 8$  で 1 の三乗根  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$  が必要な例が現れ,  $n = 9$  で  $\sqrt{-1}$  が必要な例が現れます.

<sup>9</sup>ここで  $t$  の値として黄金比が現れたのは「そうなるように座標を設定したから」です. しかしどのように座標を設定しても,  $\sqrt{5}$  は必ず必要になります.