

\mathbf{R}^N 内の曲線に現れる特異点の判定条件の構成法

東京科学大学 理学院 数学系 数学コース
柳田聖登 (Kiyoto YANAGIDA) *

概要

パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ に現れる特異点 ($\gamma'(c) = 0$ となる点 $t = c$) を \mathcal{A} -同値という同値関係に関して分類することを考える。これまで、(2,3)-カスプなどの代表的な特異点に対し判定条件が構成されてきたが、これらは平面曲線に限られており、また種類ごとの議論にとどまっていた。本講演では、これを一般次元に拡張し、 \mathbf{R}^N ($N \geq 2$) 内の曲線に現れる特異点について、判定条件を構成する系統的な枠組みと、それを用いて得られる判定条件の例を解説する。

1 準備

$m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して、 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$ の近傍で定義され、 \mathbf{R}^n に値を取り、 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たす C^∞ 級の写像芽 f を、 $f: (\mathbf{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^n, \mathbf{0})$ と書く。

注意 1.1. C^∞ 級の写像芽 $(\mathbf{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^n, \mathbf{0})$ の厳密な定義は、次の通り：

U, V を $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$ の開近傍とする。2つの C^∞ 級写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g: V \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$ で同じ写像芽を定めるとは、 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$ の開近傍 $W \subset U \cap V$ が存在して、 $f|_W = g|_W$ が成り立つことをいう。

この同値関係に関する同値類を写像芽 $[f]_0$ と呼び、特に $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ のとき $f: (\mathbf{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^n, \mathbf{0})$ と表記する。

このように、写像芽は厳密には写像の同値類であるが、ここでは単に ($\mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$ の十分小さな開近傍で定義された) 写像と思っても差し支えない。

1.1 曲線の特異点

ここでは、 $N \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ とし、写像芽 $\gamma: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ を \mathbf{R}^N 内の曲線と呼ぶ。特に、 \mathbf{R}^2 内の曲線を平面曲線、 \mathbf{R}^3 内の曲線を空間曲線と呼ぶ。また、曲線 γ に対し、 $\gamma'(c) = 0$ となる点 $t = c$

* Email: yanagida.k.8cd2@m.isct.ac.jp

を**特異点**と呼び、特異点をもたない曲線を**正則曲線**と呼ぶ^{*1}.

定義 1.2 (曲線の重複度 [3] (同値な定義)). $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. \mathbf{R}^N 内の曲線 γ が

$$\gamma^{(1)}(0) = \cdots = \gamma^{(m-1)}(0) = \mathbf{0} \neq \gamma^{(m)}(0)$$

を満たすとき、 γ は $t = 0$ において**重複度** m であると呼ぶ. また、すべての $i \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $\gamma^{(i)}(0) = \mathbf{0}$ となるとき、 γ は $t = 0$ において**flat** であると呼ぶ.

事実 1.3. 曲線 γ が $t = 0$ に特異点をもつことは、 γ が $t = 0$ において重複度 2 以上または flat であることと同値である.

以後、 $t = 0$ に特異点をもつ \mathbf{R}^N 内の曲線 $\gamma: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ を考える^{*2}.

例 1.4. $t = 0$ に特異点をもつ平面曲線の例として、標準的 (m, n) -カスプ $\text{Cusp}_{(m,n)}(t) := (t^m, t^n)$ ($m, n \in \mathbf{Z}$, $2 \leq m < n$) が挙げられる (重複度 m) (図 3 の一部).

また、 $a > 0$ を定数とするとき、次の 3 つの曲線も $t = 0$ に特異点をもつ (図 1). これらは Taylor 展開により、 $t = 0$ において重複度 2 であることがわかる.

- (サイクロイド) $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t) = a\left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}\right) + o(t^3)$,
- (カージオイド) $\gamma(t) = a(1 - \cos t)(\cos t, \sin t) = a\left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{2}\right) + o(t^3)$,
- (アステロイド) $\gamma(t) = a^3(\cos^3 t - 1, \sin^3 t) = a\left(-\frac{3}{2}t^2, t^3\right) + o(t^3)$.

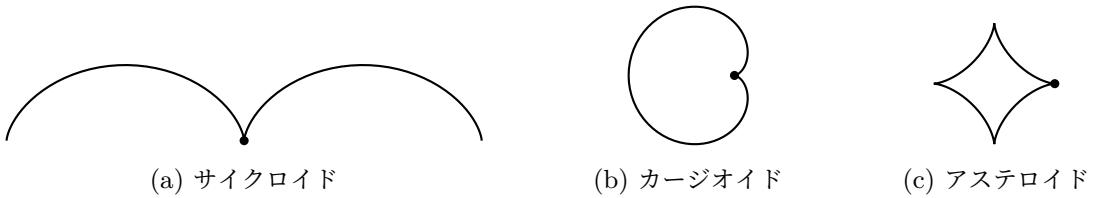


図 1: $t = 0$ に特異点をもつ平面曲線の例

平面上の正則曲線 Γ の左向き単位法線ベクトル場を $\mathbf{n}_L(t)$ とする. $\delta \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\Gamma_\delta(t) := \Gamma(t) + \delta \mathbf{n}_L(t)$$

で定まる曲線を、曲線 Γ の (距離 δ の) **平行曲線**と呼ぶ. 平面上を伝わる波の波面 (つまり最前線) は、Huygens の原理により、曲線 Γ の状態から時間 δ が経過すると平行曲線 Γ_δ に移る. そして、正則曲線の平行曲線には、特異点が“しばしば”現れる. したがって、特異点をもつ平面曲線について調べることは妥当である.

^{*1} 正則な平面曲線や空間曲線についての基礎事項は [15] など、特異点をもつ平面曲線や曲面については [14].

^{*2} 特異点 $t = c \neq 0$ を考えたいときや $\gamma(c) \neq \mathbf{0}$ のときは、 $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t+c) - \gamma(c)$ と変換すれば $\tilde{\gamma}$ が条件を満たす.

例 1.5. 楕円 $\Gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ は正則曲線である. この楕円の距離 $\delta = \frac{3}{2}$ の平行曲線 $\Gamma_{\frac{3}{2}}$ は図 2 のようになり, もとの楕円の縮閉線との共有点 (図では 4ヶ所) に特異点をもつ.

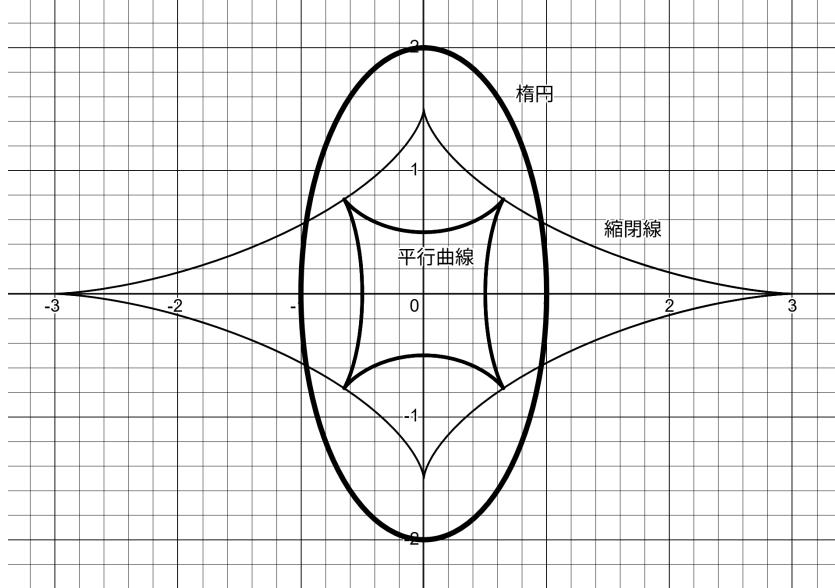


図 2: 楕円の平行曲線

1.2 曲線に現れる特異点の, \mathcal{A} -同値に関する判定条件

2つの曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ に対して,

$$\tilde{\gamma} = \Phi \circ \gamma \circ \varphi$$

となる微分同相写像芽 $\varphi: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ と $\Phi: (\mathbf{R}^N, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ が存在するとき, γ と $\tilde{\gamma}$ は \mathcal{A} -同値 (右左同値) であるという^{*3}.

事実 1.6. $t = 0$ における曲線の重複度は \mathcal{A} -同値で不变である. したがって, 事実 1.3 により, 「 $t = 0$ が特異点である」という条件も \mathcal{A} -同値で不变である.

このことから, \mathcal{A} -同値は「 $t = 0$ に特異点をもつ曲線」に関する同値関係である. この同値関係に関して, 曲線の特異点を分類することを考える. しかし一般に, 曲線の特異点が 2 つ与えられたとき, それらが \mathcal{A} -同値か否かを定義から直接判定することは困難である. そこで, 与えられた特異点が特定の \mathcal{A} -同値類に属するかを容易に判定できる必要十分条件を構成し, これを「判定条件」と呼ぶ. 多くの場合, まずは

$$\text{Cusp}_{(m_1, \dots, m_k)}(t) := (t^{m_1}, \dots, t^{m_k}) \quad (k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}, (m_1, \dots, m_k) \in \mathbf{Z}^k, m_1 < \dots < m_k)$$

^{*3} 微分同相写像芽 $\varphi: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ を“パラメータ変換”, $\Phi: (\mathbf{R}^N, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ を“ \mathbf{R}^N の座標変換”と呼ぶこととする.

を代表元とする \mathcal{A} -同値類の判定条件を構成することを考える.

なお, これまで, 既知の判定条件は微分係数を用いて記述されてきたが, 判定条件を構成する際には Taylor 展開の形式を用いたほうが扱いやすい. そのため, 以後, \mathbf{R}^N 内の曲線 γ に対して,

$$i^{[\gamma]} := \frac{1}{i!} \gamma^{(i)}(0) = \frac{1}{i!} \frac{d^i \gamma}{dt^i} \Big|_{t=0} \quad (i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

と表記する.

平面曲線に現れる特異点については, 次のような判定条件が知られている^{*4}:

事実 1.7 ([4, 6, 7, 9, 14]). 平面曲線 γ が

- (1) (i) (t^2, t^3) , (ii) (t^2, t^5) , (iii) (t^2, t^7) ,
- (2) (t^3, t^4) ,
- (3) (t^3, t^5) ,
- (4) $(t^4, t^5 + \sigma t^7)$ ($\sigma \in \{0, \pm 1\}$)

と \mathcal{A} -同値であるための必要十分条件は, $\gamma^{[1]} = \mathbf{0}$ および以下の各条件を満たすことである^{*5}:

- (1) (i) $\det(\gamma^{[2]}, \gamma^{[3]}) \neq 0$,
- (ii) $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して $\gamma^{[3]} = \lambda \gamma^{[2]}$ かつ $\det(\gamma^{[2]}, \gamma^{[5]} - 2\lambda \gamma^{[4]}) \neq 0$,
- (iii) $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ が存在して $\gamma^{[3]} = \lambda \gamma^{[2]}$, $\gamma^{[5]} - 2\lambda \gamma^{[4]} = \mu \gamma^{[2]}$,
かつ $\det(\gamma^{[2]}, \gamma^{[7]} - 3\lambda \gamma^{[6]} + (3\lambda^3 - 2\mu) \gamma^{[4]}) \neq 0$,
- (2) $\gamma^{[2]} = \mathbf{0}$ かつ $\det(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]}) \neq 0$,
- (3) $\gamma^{[2]} = \mathbf{0}$ かつ $\det(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]}) = 0 \neq \det(\gamma^{[3]}, \gamma^{[5]})$,
- (4) $\gamma^{[2]} = \gamma^{[3]} = \mathbf{0}$, $\det(\gamma^{[4]}, \gamma^{[5]}) \neq 0$,
かつそれぞれ $\operatorname{sgn}\left(\mu_2 - \frac{5}{4}\lambda_2 - \frac{11}{10}\mu_1^2\right) = \sigma$ ($\sigma \in \{0, \pm 1\}$).
ただし, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ は $\gamma^{[6]} = \lambda_2 \gamma^{[4]} + \mu_1 \gamma^{[5]}$ および $\gamma^{[7]} = \lambda_3 \gamma^{[4]} + \mu_2 \gamma^{[5]}$ を満たす.

この判定条件から, 例 1.4 で挙げたサイクロイド, カージオイド, アステロイドの特異点はすべて (t^2, t^3) と \mathcal{A} -同値であることがわかる.

^{*4} 平面曲線に現れる特異点について, [2] は, ここで紹介した判定条件とは別に, 曲率関数を用いた判定条件を与えて いる. その中では, 事実 1.7 の形式ではこれまで知られていなかった, (t^3, t^7) や $(t^3, t^7 + t^8)$ といった種類についても, 曲率関数を用いた判定条件が述べられている.

^{*5} ここで述べている判定条件は, Taylor 係数を用いて書き換えたものである. (t^2, t^3) と (t^3, t^4) については [14] に 記載あり. (t^2, t^5) は [9], (t^2, t^7) は [4], (t^3, t^5) は [6], (t^4, t^5) および $(t^4, t^5 \pm t^7)$ は [7].

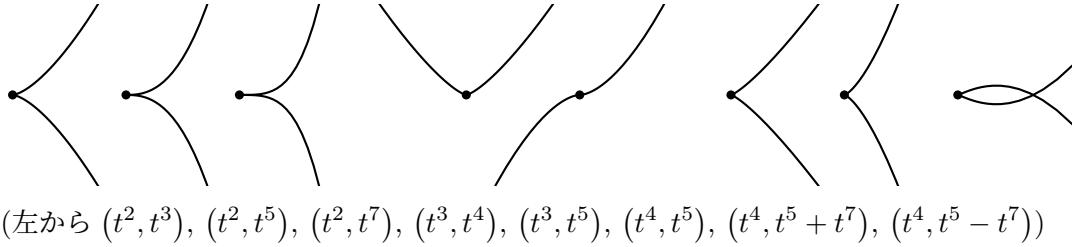


図 3: 平面曲線に現れる特異点のうち事実 1.7 の 8 種の標準形

2 主結果— \mathbf{R}^N 内の曲線に現れる特異点の判定条件の構成法

事実 1.7 では、平面曲線に現れる特異点について、既知の判定条件を紹介した。これまで、曲線に現れる特異点の判定条件の構成・証明は、

1. 標準的 (m, n) -カスプなどに \mathcal{A} -同値であるための十分条件の構成
2. 構成した条件が \mathcal{A} -同値で不变であること (必要性) の証明

という 2 つのステップに分けて行なわれており、どれも手順は似通っている。

しかし、判定条件の構成・証明は、種類ごとに都度行なわれてきており、統一的な議論は十分になされていなかった。また、これまでに構成・証明してきた判定条件は平面曲線に関するもののみであり、 \mathbf{R}^N ($N \geq 3$) 内の曲線の特異点の判定条件は明示的に与えられていない。

そこで本節では、 \mathbf{R}^N ($N \geq 2$) 内の曲線に現れる特異点について、判定条件を構成する系統的な枠組みを構築する。さらに、その枠組みを用いて得られる判定条件の例を紹介する。

例 2.1. 次に挙げる例のように、特異点をもつ曲面^{*6} f の特異曲線 $\gamma(t)$ の、 f による像 $(f \circ \gamma)(t)$ として、特異点をもつ空間曲線が“しばしば”現れる。したがって、平面曲線以外の曲線に対しても特異点を調べることは妥当である。

- (a) **(ツバメの尾)** 曲面 $f_{SW}(u, v) := (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$ の特異曲線は $\gamma(t) = (t, -6t^2)$ で与えられる。特異曲線 γ の f_{SW} による像は $(f_{SW} \circ \gamma)(t) = (-3t^4, 8t^3, -6t^2)$ となる。これは $t = 0$ に特異点をもち、 $\text{Cusp}_{(2,3)}(t) := (t^2, t^3, 0)$ と \mathcal{A} -同値である。
- (b) **(カスプ状バタフライ)** 曲面 $f_{CB}(u, v) := (u, 5v^4 + 2uv, uv^2 + 4v^5)$ の特異曲線は $\gamma(t) = (-10t^3, t)$ で与えられる。特異曲線 γ の f_{CB} による像は $(f_{CB} \circ \gamma)(t) = (-10t^3, -15t^4, -6t^5)$ となる。これは $t = 0$ に特異点をもち、 $\text{Cusp}_{(3,4,5)}(t) := (t^3, t^4, t^5)$ と \mathcal{A} -同値である。

^{*6} uv -平面上の開集合 $U \subset \mathbf{R}^2$ で定義された曲面 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して、 $f_u(p), f_v(p)$ が線型従属となる点 $p \in U$ を曲面 f の特異点と呼ぶ。フロンタル f の非退化特異点 p (定義は省略) を考えると、 f の特異点集合は $p \in U$ のまわりにおいて、 U 上の正則曲線となる。これを曲面 f の特異曲線と呼ぶ。

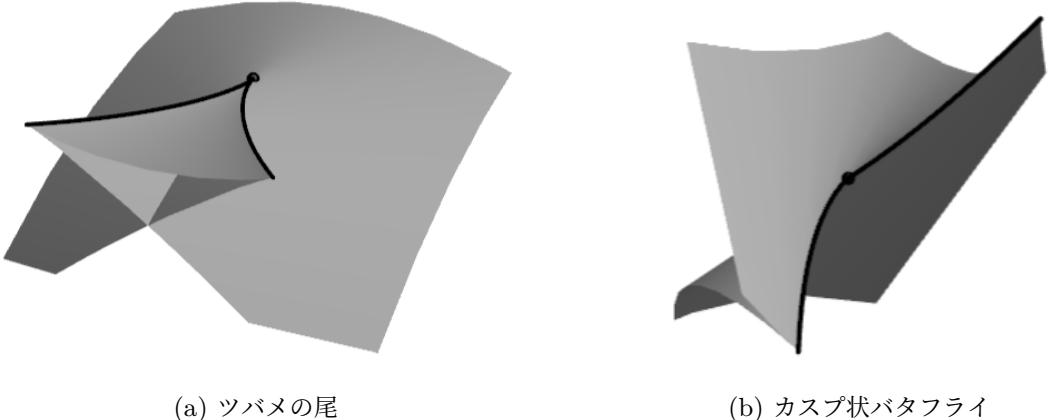


図 4: 特異点をもつ曲面とその特異曲線の像

2.1 \mathcal{A} -同値であるための十分条件の構成

平面曲線に現れる $(4, 5)$ -カスプ ($\text{Cusp}_{(4,5)}(t) := (t^4, t^5)$ と \mathcal{A} -同値な特異点) の判定条件を構成するために, [7] は次の命題を用いた:

命題 2.2 ([7, Proposition 4.6]). 平面曲線 $M: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$ が

$$\text{すべての } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\} \text{ に対して } M^{(i)}(0) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

を満たすとき, $\text{Cusp}_{(4,5)} + M: t \mapsto (t^4, t^5) + M(t)$ は $\text{Cusp}_{(4,5)}$ と \mathcal{A} -同値である.

これをもとに, 次のように一般化した:

定理 2.3. \mathbf{R}^N 内の曲線 $\Gamma: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ に対し,

$$\mathcal{NR}^2(\Gamma) := \{i \in \mathbf{Z}_{>0} \mid (f \circ \Gamma)(t) = t^i \text{ かつ } (df)_{\mathbf{0}} = 0 \text{ となる } f: (\mathbf{R}^N, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{R}, 0) \text{ が存在しない}\}$$

と定める. $\mathcal{NR}^2(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{>0}$ が有限集合であり, 曲線 M がすべての $i \in \mathcal{NR}^2(\Gamma)$ に対して $M^{(i)}(0) = \mathbf{0}$ を満たすとき, 曲線 $\Gamma + M$ は Γ と \mathcal{A} -同値である^{*7}.

この定理は, 以下のように理解できる:

- $\mathcal{NR}^2(\Gamma) \subset \mathbf{Z}_{>0}$ は, 「幕関数 t^i が Γ で“うまく表せない”」ような i の集合である.
- 代表の曲線 Γ からのズレ M に Γ で“うまく表せない”部分が無ければ, $\Gamma + M$ は Γ と \mathcal{A} -同値である.

^{*7} この定理は [1, Corollary 2.5.1] から得られる結果を, 判定条件の構成に適した形式に変形したものもある.

注意 2.4. 命題 2.2 の (2.1) は,

$$\mathcal{NR}^2(4,5) := \left\{ a \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid 4p + 5q = a \text{かつ } p + q \geq 2 \text{ となる } (p, q) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2 \text{ が存在しない} \right\}$$

とおくと $\mathcal{NR}^2(4,5) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$ であることに由来する^{*8}. また, 定理 2.3 が命題 2.2 の一般化である所以は,

$$\mathcal{NR}^2(\text{Cusp}_{(4,5)}) \subset \mathcal{NR}^2(4,5) \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$$

であることにある.

2.2 主結果— \mathbf{R}^N 内の曲線に現れる特異点の判定条件の構成法

定理 2.3 を用いて, \mathbf{R}^N 内の曲線に現れる特異点の判定条件の構成法を構築した.

判定条件を求める \mathcal{A} -同値類の代表の曲線 Γ を決め, 以下の手順で判定条件を構成する:

1. $\mathcal{NR}^2(\Gamma)$ を求め, 定理 2.3 から, Γ と \mathcal{A} -同値であるための十分条件を得る (大抵かなり強め).
2. より弱い十分条件 (判定条件と思しき条件) を構成する (パラメータ変換と \mathbf{R}^N の座標変換を用いる).
3. 線型独立性の条件に言い換える (\mathbf{R}^N の線型変換を用いる).
4. 必要条件でもあることを証明する (Faà di Bruno の公式とその一般化を用いた微分計算を行なう^{*9}).

例 2.5. 上記の手順を用いると, 以下のようにして, (3,4)-カスプ ($\text{Cusp}_{(3,4)}(t) := (t^3, t^4, 0, \dots, 0)$ を代表元とする \mathcal{A} -同値類) の判定条件が構成できる:

1. $\mathcal{NR}^2(\text{Cusp}_{(3,4)}) \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ と計算できるから, 定理 2.3 により, $(t^3, t^4, 0, \dots, 0) + o(t^5)$ という形式の曲線は $\text{Cusp}_{(3,4)}$ と \mathcal{A} -同値である.
2. $(t^3 + at^5, t^4 + bt^5, 0, \dots, 0) + o(t^5)$ ($a, b \in \mathbf{R}$ は定数) は $\text{Cusp}_{(3,4)}$ と \mathcal{A} -同値.
3. $\gamma^{[1]} = \gamma^{[2]} = \mathbf{0} \neq \gamma^{[3]}, \gamma^{[4]} \notin \text{span}(\gamma^{[3]}), \gamma^{[5]} \in \text{span}(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]})$ ならば γ は $\text{Cusp}_{(3,4)}$ と \mathcal{A} -同値である.
4. (微分計算)

注意 2.6. 例 2.5 の手順 2 は以下のように示す:

まず, 曲線 $\gamma(t) = (t^3 + at^5, t^4 + bt^5, 0, \dots, 0) + o(t^5)$ ($a, b \in \mathbf{R}$ は定数) を考える. このとき, 指数に着目すると, 第 1 成分について $5 - 3 = 2$, 第 2 成分について $5 - 4 = 1$ であるから, 適切

^{*8} 集合 $\mathcal{NR}^2(4,5)$ は Frobenius 数に関する文献 [5,10] における集合 $\mathcal{NR}(A)$ をもとに定義した. Frobenius 数については [11–13] など.

^{*9} Faà di Bruno の公式については [16] など, 一般化については [8].

なパラメータ変換

$$t = \varphi(s) = s + c_1 s^2 + c_2 s^3 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ は定数})$$

を用いて t^5 の項を消去し,

$$(\gamma \circ \varphi)(s) = (s^3 + \tilde{a}_1 s^4, s^4, 0, \dots, 0) + o(s^5) \quad (\tilde{a}_1 \in \mathbf{R} \text{ は定数})$$

へと変換することができる. ただし第1成分に余分な s^4 の項が生じる. そこで, さらに座標変換

$$\Phi(X_1, X_2, \dots, X_N) = (X_1 - \tilde{a}_1 X_2, X_2, \dots, X_N)$$

を施すことで第1成分の s^4 の項を消去し,

$$(\Phi \circ \gamma \circ \varphi)(s) = (s^3, s^4, 0, \dots, 0) + o(s^5)$$

へと変換することができる.

例 2.5 の手順により, (3,4)-カスプの判定条件を (同様にして (3,4,5)-カスプの判定条件も) 得た:

定理 2.7. \mathbf{R}^N 内の曲線 $\gamma: (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \mathbf{0})$ が

- (i) $\text{Cusp}_{(3,4,5)}: t \mapsto (t^3, t^4, t^5, 0, \dots, 0)$,
- (ii) $\text{Cusp}_{(3,4)}: t \mapsto (t^3, t^4, 0, \dots, 0)$

と \mathcal{A} -同値であるための必要十分条件は, γ が

$$\gamma^{[1]} = \gamma^{[2]} = \mathbf{0} \neq \gamma^{[3]}, \quad \gamma^{[4]} \notin \text{span}(\gamma^{[3]})$$

を満たし, さらにそれぞれ

- (i) $\gamma^{[5]} \notin \text{span}(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]})$,
- (ii) $\gamma^{[5]} \in \text{span}(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]})$

を満たすことである.

これにより, これまで平面曲線についてのみ知られていた (3,4)-カスプの判定条件を一般次元に拡張することができた. また, $N \geq 3$ の場合にのみ現れる^{*10}, (3,4,5)-カスプの判定条件も構成することができた.

定理 2.7 と同様にして, \mathbf{R}^N ($N \geq 2$) 内の曲線に現れる特異点のうち, 以下の 16 種について判定条件を得た:

- (1) (i) $(t^2, t^3, 0, \dots, 0)$,
- (ii) $(t^2, t^5, 0, \dots, 0)$,

^{*10} 判定条件のうち $\gamma^{[4]} \notin \text{span}(\gamma^{[3]})$ と $\gamma^{[5]} \in \text{span}(\gamma^{[3]}, \gamma^{[4]})$ から.

- (iii) $(t^2, t^7, 0, \dots, 0)$,
- (2) (i) $(t^3, t^4, t^5, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 3$),
 (ii) $(t^3, t^4, 0, \dots, 0)$,
- (3) (i) $(t^3, t^5, t^7, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 3$),
 (ii) $(t^3, t^5, 0, \dots, 0)$,
- (4) (i) $(t^4, t^5, t^6, t^7, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 4$),
 (ii) $(t^4, t^5, t^6, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 3$),
 (iii) $(t^4, t^5, t^7, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 3$),
 (iv) (a) $(t^4, t^5 + \sigma t^7, t^{11}, 0, \dots, 0)$ ($N \geq 3$, $\sigma \in \{0, \pm 1\}$),
 (b) $(t^4, t^5 + \sigma t^7, 0, \dots, 0)$ ($\sigma \in \{0, \pm 1\}$).

このうち, “ $N \geq 3$ ” または “ $N \geq 4$ ” と括弧書きしたものは, これらの場合にのみ現れる (平面曲線には現れない) ものである. また, 括弧書きがないものについて $N = 2$ とすれば, 事実 1.7 の判定条件はすべて系として得られる.

なお, 平面曲線に現れる $(t^3, t^7 + \sigma t^8, 0, \dots, 0)$ の 2 種の特異点の判定条件も構成した.

参考文献

- [1] J. W. Bruce, A. A. du Plessis, and C. T. C. Wall, *Determinacy and unipotency*, *Inventiones mathematicae* **88** (1987), 521–554.
- [2] T. Fukui and S. Hoshino, *Curvature criteria of \mathcal{A} -simple singularities $\mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ and their parallel curves*, 2025, arXiv:2512.23293 [math.DG].
- [3] T. Fukui, *Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities*, *Saitama Mathematical Journal* **31** (2017), 79–88.
- [4] Y. Hattori, A. Honda, and T. Morimoto, *Bour’s theorem for helicoidal surfaces with singularities*, 2024, arXiv:2310.16418v2 [math.DG].
- [5] F. Liu and G. Xin, *A combinatorial approach to Frobenius numbers of some special sequences (Complete Version)*, 2023, arXiv:2303.07149 [math.CO].
- [6] L. F. Martins, K. Saji, S. P. dos Santos, and K. Teramoto, *Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature*, *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **91** (2019), no. 03, e20170865.
- [7] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, 2024, arXiv:2402.12166 [math.DG].
- [8] R. L. Mishkov, *Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with a vector argument*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **24** (2000), no. 7, 481–491.
- [9] I. R. Porteous, *Geometric differentiation: for the intelligence of curves and surfaces*,

Cambridge University Press, 2001.

- [10] K. Subwattanachai, *Generalized Frobenius number of three variables*, 2024, arXiv:2309.09149 [math.NT].
- [11] J. J. Sylvester, *On the partition of numbers*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **1** (1857), 141–152.
- [12] J. J. Sylvester, *On subvariants, i.e., semi-invariants to binary quantics of an unlimited order*, American Journal of Mathematics **5** (1882), 119–136.
- [13] J. J. Sylvester, *Mathematical questions with their solutions*, Educational Times **41** (1884), 21.
- [14] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎. 特異点を持つ曲線と曲面の微分幾何学. 丸善出版, 2017.
- [15] 梅原雅顕, 山田光太郎. 曲線と曲面—微分幾何学的アプローチ— (改訂版). 裳華房, 2015.
- [16] 岡野 節, 奥戸 雄二, 清水 昭信, 新倉 保夫, 橋本 佳明, 山田 浩, *Faà di Bruno* の公式とその応用 (1), 名古屋市立大学 研究紀要 **5** (2001), 35–44.