高次元 Witt ベクトルの strict p 環構造

千葉大学大学院　融合理工学府　数学情報科学専攻
山中渓太 (Keita YAMANAKA) *

概要

近年, 松田氏により高次元の Witt 環が定義された. これは r 次元の級数 $l(T)$ が特定の関数等式を満たす場合に, その係数行列を用いて Witt 環を定義できるというものである. 古典的な Witt 環は完備離散付値環の一種 (strict p-ring) として特徴付けられる. 本講演ではこの性質を高次元の場合に一般化する.

1　導入

Witt 環は, 標数 $p(>0)$ の体の p^n 次拡大を記述する目的で導入された概念である. 現在では, 標数 p の可換環を標数 0 へ持ち上げる関手として整備されており, p 進微分方程式や代数幾何, K 理論など様々な分野への応用が知られている.

Witt 環にはいくつかの一般化があり, 体の分岐拡大に対応したものが分岐 Witt 環である. 分岐 Witt 環はより一般化され, Hazewinkel[5] は剰余体の Frobenius 写像の持ち上げを利用して Witt 多項式の係数を捻った場合にも分岐 Witt 環が構成できることを示した. その後, 松田 [2] は離散付値環上の可換環に対してねじれ分岐 Witt 環と π 指数関数 (π-exponential) を定義し, 収束半径が 1 より大きい (過収束) 関数であることや Witt 環の演算との関係を証明した.

近年, 松田はこの枠組みで高次元 Witt 環 [1] を定義した. 本稿では, 離散付値環 $\mathcal{O}$ の剰余体の r 次元 Witt 環が完備化の直積 $\hat{\mathcal{O}}^r$ と加群として同型になることを示す.

古典的な Witt 環

古典的な Witt 環について復習する. 証明は Bourbaki[6] の 9 章を参照頂きたい. 詳細に入る前に, Witt 環の定義がどのようなものであるかを述べる. 以下では可換環は単位的とし, $\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$ とする. Witt 環は可換環 A に対して定義できる. 直積環と演算を区別するために $W(A)=A^{\mathbb{N}}$ と書く. $W(A)$ における演算は, **ゴースト写像**と呼ばれる写像

$$\phi : W(A) \to A^{\mathbb{N}}\ ;\ (a_n)_{n\geq 0} \mapsto (\phi_n(a_0,\dots,a_n))_{n\geq 0}$$

が環準同型になるように定義したものである. 実際にこのような演算が存在することを示すには, 環 $\mathbb{Z}[X_0,X_1,\dots;Y_0,Y_1,\dots]$ の Witt 環の演算が存在することを利用する.

* E-mail:25wd0103@student.gs.chiba-u.jp

定義 1.1 $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 番目の **Witt 多項式**を

$$\phi_n(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}}$$

と定める.

定理 1.2 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $S_n, P_n, I_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_n]$ が一意的に存在して

$$\begin{aligned} \phi_n(S_0, \dots, S_n) &= \phi_n(X_0, \dots, X_n) + \phi_n(Y_0, \dots, Y_n) \\ \phi_n(P_0, \dots, P_n) &= \phi_n(X_0, \dots, X_n)\phi_n(Y_0, \dots, Y_n) \\ \phi_n(I_0, \dots, I_n) &= -\phi_n(X_0, \dots, X_n) \end{aligned}$$

が成り立つ.

定義 1.3 可換環 A に対して, $W(A) = A^{\mathbb{N}}$ と定める. $W(A)$ の演算を $\underline{a} = (a_n)_n, \underline{b} = (b_n)_n \in W(A)$ に対して

$$\begin{aligned} \underline{a} + \underline{b} &= (S_n(a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n))_n \\ \underline{a} \cdot \underline{b} &= (P_n(a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n))_n \end{aligned}$$

と定める. このように定義した環 $W(A)$ を A の (p-typical)**Witt 環**という.

例 1.4 実際に定理 1.2 の状況で, Witt 環の元 $(X_0, X_1, \dots)$ と $(Y_0, Y_1, \dots)$ の和と積を表す多項式 S_1 と P_1 を計算してみよう. $\phi_0(\underline{X}) = X_0$ だから, $S_0 = X_0 + Y_0$ である. $\phi_1(S_0, S_1) = \phi_1(X_0, X_1) + \phi_1(Y_0, Y_1)$ より, $pS_1 = X_0^p + Y_0^p - (X_0 + Y_0)^p + p(X_1 + Y_1)$ なので

$$S_1 = X_1 + Y_1 - \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} X_0^{p-i} Y_0^i\right) \in \mathbb{Z}[X_0, X_1; Y_0, Y_1]$$

である. 同様に $P_0 = X_0 Y_0$ で, $\phi_1(P_0, P_1) = \phi_1(X_0, X_1)\phi_1(Y_0, Y_1)$ より, $pP_1 = (X_0^p + pX_1)(Y_0^p + pY_1) - X_0^p Y_0^p$ なので

$$P_1 = p^2 X_1 Y_1 + X_1 Y_0^p + Y_1 X_0^p$$

である.

注意 1.5 A を可換環とする. このとき, $W(A)$ の加法の単位元は $(0, 0, \dots)$ で, 乗法の単位元は $(1, 0, \dots)$ である.

次に strict p 環の定義や性質を述べる.

定義 1.6 可換環 A における p 乗写像 $x \mapsto x^p$ が同型のとき, A を**完全**であるという.

定義 1.7 A を可換環とし, $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots$ を A のイデアルの降鎖列で, $\mathfrak{a}_m \cdot \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{m+n}$ をみたすとする. A が上のイデアルの降鎖列から定まる位相に関して完備であり, かつ剰余環 $A/\mathfrak{a}_1$ が標数 p の完全環のとき, A を p **環**という.

A を p 環とする．A のイデアルの降鎖列が $\mathfrak{a}_n = p^n A$ で与えられ, かつ p が A の非零因子であるとき, A を **strict** p 環という．

例 1.8 $\mathbb{Z}_p$ は strict p 環である．実際, $\{p^n\mathbb{Z}_p\}_{n\geq 1}$ から定まる p 進位相に関して $\mathbb{Z}_p$ は完備で, $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p$ は標数 p の完全環である．

Strict p 環に関しては以下のような性質が成り立つ．証明は [3] を参照.

命題 1.9 同じ剰余環を持つ 2 つの strict p 環は同型である．

定理 1.10 k を標数 p の完全環とする．このとき k の Witt 環 $W(k)$ は strict p 環で, その剰余環は k である．

例 1.11 $W(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ である．実際, 定理 1.10 より, $W(\mathbb{F}_p)$ は $\mathbb{F}_p$ を剰余体に持つ strict p 環で, 例 1.8 より, $\mathbb{Z}_p$ も $\mathbb{F}_p$ を剰余体に持つ strict p 環である．

分岐 Witt 環

本稿における Witt 環の高次元化は, ねじれ分岐 Witt 環の枠組みで定義される．そのため, 分岐 Witt 環について述べる．K を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, K の整数環を $\mathcal{O}_K$, 剰余体を $\mathbb{F}_q$ とする．このとき, $W(\mathbb{F}_q)$ において素元は p である．拡大 $K/\mathbb{Q}_p$ が不分岐のときは p は $\mathcal{O}_K$ において素元なので $W(\mathbb{F}_q) \cong \mathcal{O}_K$ である．一方, 拡大 $K/\mathbb{Q}_p$ が分岐しているときは, p は $\mathcal{O}_K$ において素元ではないので $W(\mathbb{F}_q)$ と $\mathcal{O}_K$ は同型ではない．このような場合に, $\mathbb{F}_q$ を $\mathcal{O}_K$ と同型な環に写す関手が分岐 Witt 環である．分岐 Witt 環の Witt 多項式は

$$\phi_n(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} \pi^i X_i^{q^{n-i}}$$

で定義される．この場合も, 古典的な議論と同様に Witt 環を構成することができる (例えば, [4] を参照)．剰余体における Frobenius 写像の K への持ち上げを $\sigma : K \to K$ とする．Hazewinkel は, 分岐 Witt 環の Witt 多項式を σ を用いて

$$\phi_n(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{q^n} + \sigma^{n-1}(\pi) X_1^{q^{n-1}} + \cdots + \sigma^{n-1}(\pi)\sigma^{n-2}(\pi)\ldots\sigma(\pi)\pi X_n$$

と捻った場合にも, 同様に Witt 環が構成できることを示した [5]．松田はこの概念をより一般化した [2].

考察

ここで, Artin-Hasse 指数関数と Witt 環の関係を考察してみよう．**Artin-Hasse 指数関数**は

$$\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^{p^i}}{p^i}\right)$$

で定義される関数であった．この対数関数を $l(T)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T^{p^i}}{p^i}$ とし，$\gamma_i=p^{-i}$ とする．$\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}=p^n\cdot p^{-(n-i)}=p^i$ である．なので，$l(T)$ は p-typical な Witt 環の Witt 多項式

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}X_i^{p^{n-i}}=\sum_{i=0}^{n}p^iX_i^{p^{n-i}}=\phi_n(X_0,\ldots,X_n)$$

を復元する．同様に，$l(T)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T^{q^i}}{\pi^i}$ とし，$\gamma_i=\pi^{-i}$ とすると，分岐 Witt 環の Witt 多項式

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}X_i^{q^{n-i}}=\sum_{i=0}^{n}\pi^iX_i^{q^{n-i}}$$

を復元する．

この考察は，Witt 多項式が形式的冪級数から得られることを示しており，係数環や素元を変更することで分岐や高次元の場合へ自然に拡張できることを示唆している．

2 高次元 Witt 環の構成

本稿で扱う高次元 Witt 環は，係数の付値に関する条件をみたす級数に対して定義できる．このような級数を Witt 型級数と呼ぶ．

以下では記号を述べる．p を素数，q を p のべきとする．$\mathcal{O}$ を離散付値環，$\mathfrak{m}$ を極大イデアル，$\pi\in\mathcal{O}$ を $\mathfrak{m}$ の生成元とする．K を $\mathcal{O}$ の商体，$\kappa=\mathcal{O}/\pi$ を $\mathcal{O}$ の剰余体で標数 p と仮定する．σ を K の自己同型で，$\sigma(\mathcal{O})\subset\mathcal{O}$，$\sigma(\pi)/\pi\in\mathcal{O}^{\times}$，各 $a\in\mathcal{O}$ に対して $\sigma(a)\equiv a^q \bmod \pi$ をみたすものとする．正整数 r を固定し，r 次元 Witt 関手を考察する．

A を可換環，$l\in\mathbb{N}$ とする．$m\times n$ 行列 $a=(a_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(A)$ に対して，各成分を l 乗した行列 $(a_{ij}^l)_{i,j}$ を $a^{\langle l\rangle}$ と書く．A において写像 $x\mapsto x^q$ が全単射であるとき，q^{-k} に対してもこの記号を用いる．$M_{m,n}(A)$ の元からなる列 $\underline{a}=(a_k)_k$ に対して，列 $(a_k^{\langle l\rangle})_k$ を $\underline{a}^{\langle l\rangle}$ で表す．I を A のイデアルとする．$a,b\in M_{m,n}(A)$ に対して $a-b\in M_{m,n}(I)$ のとき $a\equiv b \bmod I$ と書く．

定義 2.1 $T={}^t(T_1,\ldots,T_r)$ とする．$l(T)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_iT^{\langle q^i\rangle}\in K[\![T]\!]^r$ $(\gamma_i\in M_r(K))$ を r 個の形式的冪級数の組とする．$l(T)$ の各係数行列 γ_i が以下の条件をみたすとき，$l(T)$ を **Witt 型級数**という:

(1) $\gamma_0=I$.
(2) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $\pi^n\gamma_n\in GL_r(\mathcal{O})$.
(3) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sigma(\gamma_{n+1}^{-1}\gamma_n)\equiv\gamma_{n+2}^{-1}\gamma_{n+1} \bmod \pi^{n+2}$.

定義 2.2 $l(T)$ を Witt 型級数とする．各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$l(T)$ の n 番目の Witt 多項式を

$$\phi_n(X_0,\ldots,X_n)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}X_i^{\langle q^{n-i}\rangle}$$

と定義する．

以下，本稿では Witt 型級数 $l(T)$ を固定する．高次元 Witt 環の場合も，次の定理によって Witt 環の演算が定まる．

定理 2.3 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{O}$ 係数の多項式 $S_n, P_n, I_n, C_{n,a} \in \mathcal{O}[X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_n]^r$ が一意的に存在して

$$\begin{aligned}
\phi_n(S_0, \dots, S_n) &= \phi_n(X_0, \dots, X_n) + \phi_n(Y_0, \dots, Y_n) \\
\phi_n(P_0, \dots, P_n) &= \phi_n(X_0, \dots, X_n)\phi_n(Y_0, \dots, Y_n) \\
\phi_n(I_0, \dots, I_n) &= -\phi_n(X_0, \dots, X_n) \\
\phi_n(C_{0,t}, \dots, C_{n,t}) &= t\phi_n(X_0, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $t \in \mathcal{O}$ である.

定義 2.4 A を可換 $\mathcal{O}$ 代数とする. $W(A) = \prod_{n\in\mathbb{N}} A^r$ と定める. $\underline{a} = (a_n)_n, \underline{b} = (b_n)_n \in W(A)$ と $t \in \mathcal{O}$ に対して $W(A)$ の演算を

$$\begin{aligned}
\underline{a} + \underline{b} &= (S_n(a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n))_n \\
\underline{a} \cdot \underline{b} &= (P_n(a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n))_n \\
t \cdot \underline{a} &= (C_{n,t}(a_0, \dots, a_n))_n
\end{aligned}$$

と定める. このように定義した $\mathcal{O}$ 代数 $W(A)$ を A の r **次元 Witt 環**という.

3 Strict p 環による高次元 Witt 環の特徴付け

先ほども述べたように, 分岐拡大を扱う場合, p は整数環において素元ではないので, 離散付値環とその素元 π を中心に考える. そこで, strict p 環の一般化である strict π 環の定義や性質を述べる.

定義 3.1 A を可換 $\mathcal{O}$ 代数とし, $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots$ を A のイデアルの降鎖列で, $\mathfrak{a}_m \cdot \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{m+n}$ かつ $\pi \in \mathfrak{a}_1$ をみたすとする. A が上のイデアルの降鎖列から定まる位相に関して完備であり, かつ剰余環 $A/\mathfrak{a}_1$ が標数 p の完全環のとき, A を π **環**という.

π 環 A のイデアルの降鎖列が $\mathfrak{a}_n = \pi^n A$ で与えられ, かつ π が A の非零因子のとき, A を **strict** π 環という.

以下の命題 3.2, 3.3, 3.4 の証明は [3] を参照.

命題 3.2 A をイデアルの降鎖列 $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots$ から定まる π 環, $k = A/\mathfrak{a}_1$ を標数 p の剰余環とする. 以下が成り立つ:

(i) 任意の $\lambda \in k$ に対して $f(\lambda^q) = f(\lambda)^q$ をみたす唯一の k の代表系 $f : k \to A$ が存在する.

(ii) $a \in A$ が $f(k)$ の元であることと, a が任意の n に対して q^n 乗の形で表せることは同値である.

(iii) f は乗法的である. すなわち, 任意の $\lambda, \mu \in k$ に対して $f(\lambda\mu) = f(\lambda)f(\mu)$ が成り立つ.

命題 3.3 同じ剰余環を持つ 2 つの strict π 環は同型である.

命題 3.4 A を π 進付値に関して完備な離散付値環, k を剰余体とする. $f : k \to A$ を命題 3.2 の写像

とし, $S=f(k)$ を代表系とする. 任意の $a\in A$ は

$$a=\sum_{n=0}^{\infty}s_n\pi^n,\quad s_n\in S$$

の形で一意的に展開できる.

以下では, 命題 3.2 の代表系 $f:k\to A$ から定まる写像 $k^r\to A^r;(a_i)_{1\le i\le r}\mapsto(f(a_i))_{1\le i\le r}$ も同様に f と書く.

補題 3.5 $\underline{X}=(X_i)_i$, $\underline{Y}=(Y_i)_i$ をそれぞれ $X_i=(X_{i,j})_{1\le j\le r}$, $Y_i=(Y_{i,j})_{1\le j\le r}$ であるような変数の族とする. 環 A を $\mathcal{O}[X_{i,j}^{q^{-k}},Y_{i,j}^{q^{-k}}\mid i\ge 0,1\le j\le r,k\ge 0]$ と定め, $\hat{A}$ を A の π 進完備化とする. また, 写像 $f:\hat{A}/\pi\hat{A}\to\hat{A}$ を命題 3.2 の代表系とする.

さらに, $\mathcal{O}$ の剰余体 $\kappa=\mathcal{O}/\pi$ が完全体と仮定する. このとき, $\underline{a}\in W(\hat{A}/\pi\hat{A})$ に対して次のように定義される写像 $\theta:W(\hat{A}/\pi\hat{A})\to\hat{A}^r$

$$\theta(\underline{a})=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i^{-1}f(a_i^{\langle q^{-i}\rangle})$$

は $\mathcal{O}$ 加群の準同型である.

証明 κ は完全という仮定より, $\hat{A}$ が strict π 環であることに注意する. 変数の族 $\underline{X}$, $\underline{Y}$ に対して θ が加法的であることを示せば十分である. $\underline{S}=(S_i)_i$ を任意の n に対して $\phi_n(\underline{S})=\phi_n(\underline{X})+\phi_n(\underline{Y})$ となる $M_r(\mathcal{O})$ 係数多項式の列とし, $\theta(\underline{S})=\theta(\underline{X})+\theta(\underline{Y})$ を示す. 右辺は $\hat{A}$ の元より, 命題 3.4 からベクトルの列 $(\psi_i)_i\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\hat{A}^r$ で, $\theta(\underline{X})+\theta(\underline{Y})=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i^{-1}f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{-i}\rangle})$ となるものが存在する. ただし, $\overline{\psi_i}$ は ψ_i の $(\hat{A}/\pi\hat{A})^r$ における像である. $\hat{A}$ の完備性より, 展開は一意的なので, $f(X_i^{\langle q^{-i}\rangle})+f(Y_i^{\langle q^{-i}\rangle})=f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{-i}\rangle})$ が任意の i に対して成り立つ. この等式の各成分を q^n 乗することで, $f(X_i^{\langle q^{n-i}\rangle})+f(Y_i^{\langle q^{n-i}\rangle})\equiv f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{n-i}\rangle}) \bmod \pi^n$ が成り立つ. また, $X_{i,j}\mapsto X_{i,j}^{q^n}$, $Y_{i,j}\mapsto Y_{i,j}^{q^n}$ で定義される環準同型 $\hat{A}\to\hat{A}$ を等式 $\theta(\underline{X})+\theta(\underline{Y})=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i^{-1}f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{-i}\rangle})$ に適用すると

$$\theta(\underline{X}^{\langle q^n\rangle})+\theta(\underline{Y}^{\langle q^n\rangle})\equiv\sum_{i=0}^{n}\gamma_i^{-1}f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{n-i}\rangle}) \bmod \pi^{n+1}$$

が得られる.

以下, n についての帰納法で $S_n\equiv\psi_n \bmod \pi$ を証明する. $n=0$ のときは $X_0+Y_0\equiv\psi_0 \bmod \pi$ なので成り立つ. $n>0$ のとき, $0\le i\le n-1$ に対して $S_i\equiv\psi_i \bmod \pi$ と仮定する.

$$\begin{aligned}\phi_n(S_0,\dots,S_n)-\phi_n(\psi_0,\dots,\psi_n)&=\sum_{i=0}^{n}\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}(X_i^{\langle q^{n-i}\rangle}+Y_i^{\langle q^{n-i}\rangle}-\psi_i^{\langle q^{n-i}\rangle})\\&\equiv\sum_{i=0}^{n}\gamma_n^{-1}\gamma_{n-i}(f(X_i^{\langle q^{n-i}\rangle})+f(Y_i^{\langle q^{n-i}\rangle})-f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{n-i}\rangle}))\\&\equiv\sum_{i=0}^{n}\gamma_i^{-1}(f(X_i^{\langle q^{n-i}\rangle})+f(Y_i^{\langle q^{n-i}\rangle})-f(\overline{\psi}_i^{\langle q^{n-i}\rangle}))\\&\equiv\theta(\underline{X}^{\langle q^n\rangle})+\theta(\underline{Y}^{\langle q^n\rangle})-\theta(\underline{X}^{\langle q^n\rangle})-\theta(\underline{Y}^{\langle q^n\rangle})\equiv 0 \bmod \pi^{n+1}\end{aligned}$$

である．帰納法の仮定より, $0 \leq i \leq n-1$ に対して $S_i^{\langle q^{n-i}\rangle} \equiv \psi_i^{\langle q^{n-i}\rangle} \bmod \pi^{n-i+1}$ なので, 上式は $\gamma_n^{-1} S_n \equiv \gamma_n^{-1}\psi_n \bmod \pi^{n+1}$ を意味する．よって, $S_n \equiv \psi_n \bmod \pi$ が従う．同様に, $t \in \mathcal{O}$ に対して $\theta(t \cdot \underline{X}) = t\theta(\underline{X})$ が成り立つ． $\square$

よって, 次の主定理が得られる．

定理 3.6 $\mathcal{O}$ を離散付値環, π を $\mathcal{O}$ の素元, $\kappa = \mathcal{O}/\pi$ を剰余体とする．κ が完全体のとき, $\mathcal{O}$ 加群としての同型 $W(\kappa) \cong \hat{\mathcal{O}}^r$ が成り立つ．ただし, $\hat{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ の π 進完備化である．

証明 写像 $\theta : W(\kappa) \to \hat{\mathcal{O}}^r$ を

$$\theta(\underline{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^{-1} f(a_i^{\langle q^{-i}\rangle})$$

と定義する．任意の $\hat{\mathcal{O}}^r$ の元は $\alpha_i \in \kappa^r$ を用いて $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^{-1} f(\alpha_i)$ という形で一意的に書けるので, 補題 3.5 より, θ は $\mathcal{O}$ 加群としての同型を与える． $\square$

参考文献

[1] S. Matsuda. *Higher dimensional Witt vectors.* preprint. available at `https://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~matsu/preprint/hdwitt.pdf`

[2] S. Matsuda. *π-exponentials for generalized twisted ramified Witt vectors.* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 142 (2019), 145–179.

[3] J.P. Serre. *Local Fields*, volume 67 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1979.

[4] P. Schneider. *Galois Representations and (φ, Γ)-Modules*, volume 164 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 2017.

[5] M. Hazewinkel. *Twisted Lubin-Tate Formal Group Laws, Ramified Witt Vectors and (Ramified) Artin-Hasse Exponentials.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 259, no. 1, 1980, pp. 47–63.

[6] N. Bourbaki *Algèbre commutative Chapitres 8 et 9.* Springer Berlin Heidelberg, 2006.