

高階 Painlevé 系の量子化

皇學館大学 教育学部 教育学科

上野祐一 (Yuichi UENO) *

概要

本稿では、高階 Painlevé 系である n 変数量子 Garnier 系, Sasano 系, Fuji-Suzuki-Tsuda 系について正則性による特徴付けを行う。

1 Painlevé 方程式の Takano 理論, 高階 Painlevé 系とその量子化

Painlevé 方程式 P_J ($J = \text{I}, \dots, \text{VI}$) とは動く特異点は極のみ (これを Painlevé 性と呼ぶ) である 2 階の非線型常微分方程式である [18, 19]. 1980 年代の Okamoto の一連の研究により, Painlevé 方程式の Hamilton 構造が明らかにされ, Bäcklund 変換として作用する Affine Weyl 群対称性が示された [18]. また, Okamoto は, 各方程式 P_J に対してその初期値空間 (解を一意的にパラメトライズする空間) を定義し blow-up により構成した [17]. [13, 14, 15] において, Nagoya は古典版の Affine Weyl 群対称性をもつ Painlevé 方程式 $P_{\text{II}}, P_{\text{III}}, P_{\text{IV}}, P_{\text{V}}, P_{\text{VI}}$ の量子類似を構築した.

一方で, 1990 年代後半 Takano 等により各 Painlevé 方程式 P_J ($J = \text{II}, \dots, \text{VI}$) が, その初期値空間から一意的に再現できることが示された [10, 12, 16, 27, 30]. すなわち, Okamoto 初期値空間は, 元の $\text{chart}(q, p)$ にいくつかの $\text{chart}(x_i, y_i)$ を追加し, それらのある双有理正準変換により張り合わせることで構成できる. そして, 元の $\text{chart}(q, p)$ と追加した $\text{chart}(x_i, y_i)$ の全てにおいて, Hamiltonian が正準変数の多項式になる. さらに上記のように構成した初期値空間において, 全ての chart で正則な Hamiltonian により記述される Hamilton 系は Painlevé 方程式に限るという結果である. これを Takano 理論と呼ぶ. 本稿では, この Takano 理論と呼ばれる別の幾何的な観点から Painlevé 方程式の高階化である高階の量子 Painlevé 系についての報告を行う.

古典の Painlevé 方程式は正準変数 q, p の多項式 Hamiltonian を持つ次のような Hamilton 系で書ける.

$$\frac{df}{dt} = \{f, H_J\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1)$$

ここで, $\{\phi, \psi\} := \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p}$ は Poisson 括弧であり, f は正準変数 q, p の多項式である. このように Painlevé 方程式は Hamilton 系で書けるため, Poisson 括弧を交換子に置き換えるという意味での量子化が可能である. それを実際に Painlevé 方程式 P_J ($J = \text{II}, \dots, \text{VI}$) に対して行ったものが [34] である.

* E-mail: y-ueno@kogakkan-u.ac.jp

さらに 2000 年代に入ると Sakai により，対称性や初期値空間の観点から離散 Painlevé 方程式の分類が行われた [20]. すなわち，対称性と初期値空間は affine root 系の観点から分類され，離散 Painlevé 方程式の連続極限を取ることで Painlevé 方程式が得られることが分かった．また，Painlevé 方程式の高階化についての研究も行われている [4, 5, 6, 7, 8]. それらをまとめたものが表 1 である．本稿では，Painlevé 方程式の高階化にあたる Garnier 系，Sasano 系，Fuji-Suzuki-Tsuda 系について上記で述べた Takano 理論的な特徴付けの量子化について，今現在分かっていることを報告する．

Painlevé systems	初期値空間	Takano 理論	Takano 理論的量子化
Painlevé	Okamoto[17]	Takano-Matsumiya-Shioda[10, 12, 27, 30] Noumi-Takano-Yamada[16]	Ueno[34]
q-Painlevé	Sakai[20]		
Garnier	Kimura[9] Suzuki[28, 29] Takenawa[31]	Sasano[22, 23] Sasano-Yamada[26]	Ueno[35]
Sasano		Sasano[21, 25]	
Fuji-Suzuki-Tsuda	Takenawa[32] Matsugasita-Suzuki[11]	Sasano[24]	

表 1 高階 Painlevé 系

2 n 変数量子 Garnier 系

n 変数 Garnier 系 [3] とは， $n + 3$ 個の特異点と n 個の見かけ上の特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階 Fuchs 型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる n 個の時間変数を持つ Hamilton 系である．Garnier 系は Painlevé 方程式の多変数拡張であり， $n = 1$ のとき Painlevé VI 型方程式に一致する．古典の場合， n 変数 Garnier 系 $G(1, 1, \dots, 1)$ についての初期値空間の理論は Kimura によって構成されている [9]. また， $n = 2$ の場合の量子 Garnier 系の Takano 理論的な特徴付けは [35] によってなされており， $n = 3, 4$ の場合は昨年の発表で行った．今回は一般の n 変数量子 Garnier 系について考える．

Definition 2.1. n 変数量子 Garnier 系は独立変数が n 個あり，Hamilton 系は次で与えられる．

$$dq_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n [q_i, H_j] dt_i, \quad dp_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n [p_i, H_j] dt_i \quad (2)$$

ここで，

- $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h$ ($h \in \mathbb{C}$) を満たす正準変数であり， $[\cdot, \cdot]$ は交換子である．
- $t_1, \dots, t_n$ は n 個の時間発展 (*flow*) の独立変数 (全ての変数と可換)．
- Hamiltonian H_i は $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ の非可換多項式として，対応する *flow* の正則性の条件から決める．

また量子正準座標は次のように定める．

Definition 2.2. $i = 1, \dots, n+4$ に対して, *original chart* 上の座標 $(q, p) = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$ と i 番目の変換された *chart* 上の座標 $(x, y) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ との関係を与える変換 r_i を次のように定義する.

$$r_i : \quad q_i = -(x_i y_i - \alpha_i) y_i, \quad p_i = \frac{1}{y_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

$$r_i : \quad q_j = \begin{cases} \frac{1}{x_1} & (j = 1), \\ \frac{x_j}{x_1} & (j \neq 1), \end{cases} \quad p_j = \begin{cases} -x_1 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k + \alpha_i \right) & (j = 1), \\ x_1 y_j & (j \neq 1), \end{cases} \quad (i = n+1, n+2). \quad (4)$$

$$r_{n+3} : \quad q_j = \begin{cases} 1 + y_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_1 - \alpha_{n+3} \right) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \quad (5)$$

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \frac{1}{y_1} - y_1 & (j \neq 1). \end{cases} \quad (6)$$

$$r_{n+4} : \quad q_j = \begin{cases} t_1 + t_1 y_1^2 - \sum_{i=2}^n \frac{t_1}{t_i} x_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_1}{t_i} x_i y_1 - \alpha_{n+4} \right) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \quad (7)$$

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \frac{t_1}{t_j} \left(\frac{1}{y_1} - y_1 \right) & (j \neq 1). \end{cases} \quad (8)$$

Remark 2.1. r_i における座標 (x, y) と r_j における座標 (x, y) とは区別する必要がある. また, i 番目の変換 r_i はパラメータ α_i に, r_{n+4} は時間変数 $t_1, \dots, t_n$ に依存するものである.

これらの変換 $r_1, \dots, r_{n+4}$ は古典の場合の変換 [26] の一般化である. 各変換 r_i は双有理正準変換であり, その逆変換は (q, p) を (x, y) に置き換えたものである. このとき, 次が予想できる.

Conjecture 2.1. 正準変数 $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ に関する非可換 *Hamiltonian* H_i を持つ多項式 *Hamilton* 系を考え, 以下を仮定する:

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は $q_1, p_1, \dots, q_n, p_n$ に関して 5 次.
2. 対応する変換 r_i の下で, この系は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される.

このとき, そのような *Hamiltonian* H_i は次のようにただ一つに決まる.

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)\kappa H_i = & q_i \left(\sum_{j=1}^n q_j p_j + a_{n+1} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j p_j + a_{n+2} \right) \\ & + \left\{ q_i(a_{n+3}t_i + a_{n+4} - \kappa) + (t_i - t_i q_i - q_i)v_i \right\} p_i \end{aligned} \quad (9)$$

$$- \sum_{j(\neq i)=1}^n \left\{ q_j v_i(p_j X_{i,j} + p_i \tilde{X}_{i,j}) + q_i v_j(p_i X_{i,j} + p_j X_{j,i}) \right\},$$

ここで,

$$v_i = q_i p_i - a_i, \quad \kappa = \sum_{i=1}^{n+4} a_i - h, \quad X_{i,j} = \frac{t_i(t_j - 1)}{t_j - t_i}, \quad \tilde{X}_{i,j} = \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_j}.$$

この予想に対して, $n \leq 8$ までは確認済みである.

Remark 2.2. 量子 *Hamiltonian* (9) は既知の古典的な *Garnier* 系の *Hamiltonian* の [9] の量子化とみなすことができる.

3 Sasano 系とその量子化

Sasano 系とは D 型 Affine Weyl 群対称性をもつ高階 Painlevé 型微分方程式系である.

Definition 3.1. $D_{2n+2}^{(1)}$ 型 *Sasano* 系は *Painlevé VI* 方程式の *Hamiltonian*

$$H_{\text{VI}}(q, p : a, b, c, d) = q(q-1)(q-t)p^2 - \{(a-1)q(q-1) + bq(q-t) + c(q-1)(q-t)\}p + dq \quad (10)$$

を用いて定まる

$$t(t-1)H = \sum_{i=1}^k H_{\text{VI}}(q_i, p_i : a_i, b_i, c_i, d_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} p_i(q_i - t)q_j \{p_j(q_j - 1) + \alpha_{2j}\} \quad (11)$$

を *Hamiltonian* とする *Hamilton* 系 (正準方程式)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

として定式化される. ここで,

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2j+1}, & b_i &= \alpha_{2n+1} + \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_{2j+1} + 2 \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_{2j+2}, \\ c_i &= \alpha_{2n+2} + \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_{2j+1}, & d_i &= \alpha_{2i}(\alpha_i + \alpha_{2i} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2j+1}). \end{aligned}$$

但し, $\alpha_0 + \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}) + \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2} = 1$ とする.

Definition 3.2. $D_{2n+1}^{(1)}$ 型 *Sasano* 系は *Painlevé V* 方程式の *Hamiltonian*

$$H_{\text{V}}(q, p : a, b, c) = q(q-1)p(p+t) + ap + btq - cpq \quad (13)$$

を用いて定まる

$$tH = \sum_{i=1}^k H_{\text{V}}(q_i, p_i : a_i, b_i, c_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} p_i q_i \{p_j(q_j - 1) + \alpha_{2j-1}\} \quad (14)$$

を *Hamiltonian* とする *Hamilton* 系 (正準方程式)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

として定式化される．ここで，

$$a_i = \alpha_{2k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{2j}, \quad b_i = \alpha_{2i-1}, \quad c_i = \alpha_{2k} + \alpha_{2k+1} + \sum_{j=i}^{k-1} (\alpha_{2j} + \alpha_{2j+1})$$

但し， $\alpha_0 - \alpha_1 - 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}) + \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2} = 1$ とする．

次にその量子化の方法について述べる．

Definition 3.3. 量子 *Sasano* 系は独立変数が n 個あり，*Hamilton* 系は次で与えられる．

$$dq_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n [q_i, H] dt, \quad dp_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n [p_i, H] dt \quad (16)$$

ここで，

- $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_n, p_n$ は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h$ ($h \in \mathbb{C}$) を満たす正準変数であり， $[,]$ は交換子である．
- t は時間発展の独立変数 (全ての変数と可換)．
- *Hamiltonian* H は $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_n, p_n$ の非可換多項式として，正則性の条件から決める．

Definition 3.4. $D_{2n+2}^{(1)}$ 型量子 *Sasano* 系の双有理正準変換 $r_i (i = 0, \dots, n)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} r_0 : \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 + t y_1^2 + \alpha_0 y_1 + t, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \\ r_1 : \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) x_1, \\ r_{2i} : \quad & q_i = \frac{1}{x_i}, \quad p_i = -x_i^2 y_i - \alpha_{2i} x_i, \quad (i = 1, \dots, k) \\ r_{2i+1} : \quad & q_i = x_{i+1} - x_i y_i^2 + x_{i+1} y_i^2 + \alpha_{2i+1} y_i, \quad p_i = \frac{1}{y_i}, \\ & p_{i+1} = y_{i+1} + y_i - \frac{1}{y_i}, \quad (i = 1, \dots, k-1) \\ r_{n-1} : \quad & q_k = -x_k y_k^2 + y_k^2 + \alpha_{n-1} y_k + 1, \quad p_k = \frac{1}{y_k}, \\ r_n : \quad & q_k = -x_k y_k^2 + \alpha_n y_k, \quad p_k = \frac{1}{y_k}. \end{aligned} \quad (17)$$

Definition 3.5. $D_{2n+1}^{(1)}$ 型量子 *Sasano* 系の双有理正準変換 $r_i (i = 0, \dots, n)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} r_0 : \quad & q_1 = \frac{1}{x_i}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - t x_1^2 - \alpha_0 x_1 - t, \\ r_1 : \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - \alpha_1 x_1, \\ r_{2i} : \quad & q_i = x_{i+1} - x_i y_i^2 + x_{i+1} y_i^2 + \alpha_{2i} y_i, \quad p_i = \frac{1}{y_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{i+1} &= y_{i+1} + y_i - \frac{1}{y_i}, \quad (i = 1, \dots, k-1) \\
r_{2i+1} : \quad q_{i+1} &= \frac{1}{x_{i+1}}, \quad p_{i+1} = -x_{i+1}^2 y_{i+1} - \alpha_{2i+1} x_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, k-1) \\
r_{n-1} : \quad q_k &= -x_k y_k^2 + y_k^2 + \alpha_{n-1} y_k + 1, \quad p_k = \frac{1}{y_k}, \\
r_n : \quad q_k &= -x_k y_k^2 + \alpha_n y_k, \quad p_k = \frac{1}{y_k}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Conjecture 3.1 ([36]). このとき、次のことが予想できる.

1. *Sasano* の結果を元に構成した張り合わせ関数は自然に量子化され、双有理量子正準変換となる.
2. $n+1$ 個の量子正準変換に対して正則性を保つ *Hamilton* 系が一意に決まる.

この予想に対して、 $D_{n+2}^{(1)}$ 型については $k=2$, $D_{n+1}^{(1)}$ 型については $k=3$ のときまでは確認済みである. 以下に得られた Hamiltonian を述べる.

- $D_{2n+2}^{(1)}$ 型: $k=2$ のとき

$$\begin{aligned}
\kappa H &= -q_1^3 p_1^2 - 2q_1 q_2^2 p_1 p_2 - q_2^3 p_2^2 + (t+1)q_1^2 p_1^2 + 2q_1 q_2 p_1 p_2 + 2tq_2^2 p_1 p_2 \\
&\quad + (t+1)q_2^2 p_2^2 + (h-\alpha_1)q_1^2 p_1 - 2\alpha_4 q_1 q_2 p_1 + (h-\alpha_1-\alpha_3-2\alpha_4)q_2^2 p_2 \\
&\quad - tq_1 p_1^2 - 2tq_2 p_1 p_2 - tq_2 p_2^2 \\
&\quad + \{-h+\alpha_1+(1-2t)\alpha_3+2(1-t)\alpha_4+(1-t)\alpha_5-\alpha_6 t\}q_1 p_1 + 2\alpha_4 t q_2 p_1 \\
&\quad + \{-h+\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4+(1-t)\alpha_5-\alpha_6 t\}q_2 p_2 - \alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)q_1 \\
&\quad - \alpha_4(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)q_2 + (\alpha_3+\alpha_6)tp_1 + \alpha_6 t p_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

但し, $\kappa = t(t-1)(h-\alpha_0-\alpha_1-2\alpha_3-2\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6)$ とする.

- $D_{2n+1}^{(1)}$ 型: $k=3$ のとき

$$\begin{aligned}
\kappa H &= q_1^2 p_1^2 + 2tq_2^2 p_1 p_2 + q_2^2 p_2^2 + 2q_3^2 p_1 p_3 + 2q_3^2 p_2 p_3 + q_3^2 p_3^2 \\
&\quad + t(q_1^2 p_1 + q_2^2 p_2 + q_3^2 p_3) - q_1 p_1^2 - 2q_2 p_1 p_2 - q_2 p_2^2 - 2q_3 p_1 p_3 - 2q_3 p_2 p_3 \\
&\quad - q_3 p_3^2 - \{t+2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+\alpha_6+\alpha_7\}q_1 p_1 + 2\alpha_3 q_2 p_1 + 2\alpha_5 q_3 p_1 \\
&\quad + 2\alpha_5 q_3 p_2 - \{t+2(\alpha_4+\alpha_5)+\alpha_6+\alpha_7\}q_2 p_2 - (t+\alpha_6+\alpha_7)q_3 p_3 \\
&\quad + t(\alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_2 + \alpha_5 q_3) + (\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6)p_1 + (\alpha_4+\alpha_7)p_2 + \alpha_7 p_3.
\end{aligned} \tag{20}$$

但し, $\kappa = t(t-1)\{\alpha_0+\alpha_1+2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)+\alpha_6+\alpha_7\}$ とする.

4 Fuji-Suzuki-Tsuda 系とその量子化

Fuji-Suzuki-Tsuda 系について述べる.

Definition 4.1. *Fuji-Suzuki-Tsuda* 系は *Painlevé VI* 方程式の *Hamiltonian* を用いて定まる

$$t(t-1)H = H_{VI}(q_1, p_1; \alpha_2, \alpha_0 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_5, -\eta, \eta\alpha_1) + H_{VI}(q_2, p_2; \alpha_0 + \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_1, -\eta, \eta\alpha_5) \quad (21)$$

$$+ (q_1 - t)(q_2 - 1)\{(q_1 p_1 + \alpha_1)p_2 + p_1(q_2 p_2 + \alpha_5)\}$$

を *Hamiltonian* とする *Hamilton* 系 (正準方程式)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

として定式化される．但し, $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$ とする．

Remark 4.1. 上記で述べた *F-S-T* 系には独立した以下の 2 つの導出方法がある．

- “*UC* 階層” (*KP* 階層のある一般化) の *similarity reduction* による方法 [33]
- *Drinfeld-Sokolov* 階層 [1, 2]

次にその量子化の方法について述べる．

Definition 4.2. 量子 *Fuji-Suzuki-Tsuda* 系とは独立変数が 2 つあり, *Hamilton* 系は次で与えられる．

$$dq_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 [q_i, H] dt, \quad dp_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 [p_i, H] dt$$

ここで,

- q_1, p_1, q_2, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h$ ($h \in \mathbb{C}$) を満たす正準変数であり, $[,]$ は交換子である．
- t は時間発展の独立変数 (全ての変数と可換)．
- *Hamiltonian* H は q_1, p_1, q_2, p_2 の非可換多項式として, 正則性の条件から決める．

また, 双有理量子正準変換を次で定める．

Definition 4.3. 双有理正準変換 $r_i (i = 0, \dots, 6)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} r_0 : \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 + x_2 y_1^2 + \alpha_0 y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \\ & q_2 = x_2, \quad p_2 = y_1 + y_2, \\ r_1 : \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - \alpha_1 x_1, \\ & q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \\ r_2 : \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 + t y_1^2 + \alpha_2 y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \\ & q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \\ r_3 : \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 - x_2 y_1 y_2 + (\alpha_3 - \eta) y_1, \quad p_1 = y_1, \\ & q_2 = x_2 y_1, \quad p_2 = \frac{y_2}{y_1}, \\ r_4 : \quad & q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= -x_2 y_2^2 + y_2^2 + \alpha_4 y_2, & p_2 &= \frac{1}{y_2}, \\
r_5 : \quad q_1 &= x_1, & p_1 &= y_1, \\
q_2 &= \frac{1}{x_2}, & p_2 &= -x_2^2 y_2 - \alpha_5 x_2, \\
r_6 : \quad q_1 &= -X_1 Y_1^2 - X_2 Y_1 Y_2 + (\eta - \alpha_1 - \alpha_5) Y_1, & p_1 &= \frac{1}{Y_1}, \\
q_2 &= X_2 Y_1, & p_2 &= \frac{Y_2}{Y_1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Remark 4.2. 変換 r_6 における正準座標 (X_1, Y_1, X_2, Y_2) は次で与えられる.

$$r_5 \circ r_1 : (X_1, Y_1, X_2, Y_2) := \left(\frac{1}{x_1}, -x_1^2 y_1 - \alpha_1 x_1, \frac{1}{x_2}, -x_2^2 y_2 - \alpha_5 x_2 \right) \tag{24}$$

このとき、次が成り立つ.

Theorem 4.1 ([36]). *Sasano* による張り合わせ関数は自然に量子化され、双有理量子正準変換となる.

また、全ての量子正準変換に対して正則性を保つ *Hamilton* 系が一意に決まる.

なお、証明は数式処理ソフト Mathematica による計算によるものである. 以下に得られた Hamiltonian を述べる.

$$\begin{aligned}
\kappa H &= -q_1^3 p_1^2 - q_1^2 q_2 p_1 p_2 - q_1 q_2^2 p_1 p_2 - q_2^3 p_2^2 + (t+1)q_1^2 p_1^2 + q_1^2 p_1 p_2 + (t+1)q_1 q_2 p_1 p_2 \\
&\quad + t q_2^2 p_1 p_2 + (t+1)q_2^2 p_2^2 + (2h - \eta - \alpha_1)q_1^2 p_1 - \alpha_5 q_1 q_2 p_1 - \alpha_1 q_1 q_2 p_2 \\
&\quad + (2h - \eta - \alpha_5)q_2^2 p_2 - t(q_1 p_1^2 + q_1 p_1 p_2 + q_2 p_1 p_2 + q_2 p_2^2) \\
&\quad + \{-2h + (t+1)\eta + (1-t)\alpha_0 + \alpha_1 - t\alpha_3 + (1-t)\alpha_4 + (1-t)\alpha_5\}q_1 p_1 \\
&\quad + \alpha_1 q_1 p_2 + \alpha_5 t q_2 p_1 + \{-2h + (t+1)\eta - \alpha_3 t + (1-t)\alpha_4 + \alpha_5\}q_2 p_2 \\
&\quad + (h - \eta)(\alpha_1 q_1 + \alpha_5 q_2) - (h - \alpha_3)t(p_1 + p_2).
\end{aligned} \tag{25}$$

但し、 $\kappa = t(t-1)(2h - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)$ とする.

5 今後の課題

今後の課題としては、以下の2つが挙げられる.

1. KZ 方程式との比較

共形場理論の観点から、Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 = 量子 Garnier 系と考えられている. 今回の結果との比較は興味深い問題である.

2. q -差分系

q -差分系や楕円差分系についても良い量子化が期待される.

参考文献

- [1] K. Fuji and T. Suzuki, *Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac., **53** (2010), 143-167.
- [2] K. Fuji and T. Suzuki, *Higher order Painlevé systems of type A, Drinfeld-Sokolov hierarchies and Fuchsian systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B30** (2012), 181-208.
- [3] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.
- [4] H. Kawakami, *Four-Dimensional Painlevé-Type Equations Associated with Ramified Linear Equations III: Garnier Systems and Fuji-Suzuki Systems*, SIGMA, **13** (096) (2017), 1-50.
- [5] H. Kawakami, *Four-dimensional Painlevé-type equations associated with ramified linear equations II: Sasano systems*, Journal of Integrable Systems, **3** (2018), 1-36.
- [6] H. Kawakami, *Four-dimensional Painlevé-type equations associated with ramified linear equations I: Matrix Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac., **63** (1) (2020), 97-132.
- [7] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Toward a classification of four-dimensional Painlevé equations*, in: Algebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices, eds. A. Dzhamay, K. Maruno and V.U. Pierce, Contemp. Math., **593** (Providence: American Mathematical Society, 2013), 143-161.
- [8] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations*, MSJ Memoirs, **37** (2018), 25-111.
- [9] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$* , Anali. Scuola Norm. Sup. di Pisa, **20** (1993), 1-60.
- [10] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II*, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.
- [11] K. Matsugashita, T. Suzuki, *Initial value space of the fourth order Painlevé system with $A_5^{(1)} \times A_1^{(1)}$ symmetry*, preprint, arXiv:2508.05126.
- [12] A. Matumiya, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III*, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.
- [13] H. Nagoya, *Quantum Painlevé systems of type $A_l^{(1)}$* , Int. J. Math., **15**(10) (2004), 1007-1031.
- [14] H. Nagoya, *Quantum Painlevé systems*, (in Japanese) abstract for the meeting of the Mathematical Society of Japan (Saitama Univ., 2007).
- [15] H. Nagoya, *On quantum Painlevé systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B30** (2012), 209-221.
- [16] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.
- [17] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques*

- fixes de P. Painlevé*, Jap. J. Math., 5 (1979), 1-79.
- [18] K. Okamoto, *Painlevé equations*, (in Japanese) Iwanami, (2009) ISBN 978-4-00005836-0.
 - [19] P. Painlevé, *Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme*, Oeuvret. III, 187-271.
 - [20] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys., **220** (2001), 165-229.
 - [21] Y. Sasano, *Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$* , RIMS Kokyuroku, **1473** (2006), 143-163.
 - [22] Y. Sasano, *Studies on the Garnier system in two variables*, arXiv:0704.2869.
 - [23] Y. Sasano, *Symmetric Hamiltonian of the Garnier System and its degenerate systems in two variables*, arXiv:0706.0799.
 - [24] Y. Sasano, *Holomorphy conditions of Fuji-Suzuki coupled Painlevé VI system*, arXiv:0707.0112.
 - [25] Y. Sasano, *Coupled Painlevé systems with affine Weyl group symmetry of type $D_l^{(1)}$* , Proceedings of Representation Theory, (2006), 71-76.
 - [26] Y. Sasano and Y. Yamada, *Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.
 - [27] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.
 - [28] M. Suzuki, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system in two variables*, RIMS Kokyuroku, (2001), 41-52.
 - [29] M. Suzuki, *Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables*, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 1079-1117.
 - [30] K. Takano, *Defining manifolds for Painlevé equations*, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), Kyoto Univ. Press, (2000), 261-269.
 - [31] T. Takenawa, *Space of initial conditions for the four dimensional Fuji-Suzuki-Tsuda system*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B87** (2021), 99-111.
 - [32] T. Takenawa, *Space of initial conditions for the four-dimensional Garnier system revisited*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B96** (2024) 117-130.
 - [33] T. Tsuda, *UC hierarchy and monodromy preserving deformation*, J. Reine Angew. Math., **690** (2014), 1-34.
 - [34] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Painlevé equations*, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.
 - [35] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Garnier systems in two variables*, Int. J. Math., **36** (2025), 1-16.
 - [36] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum higher order Painlevé systems, in preparation*.