AUTOEQUIVALENCES OF DERIVED CATEGORIES OF BIELLIPTIC SURFACES

東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻
栃谷悠紀 (Yuki Tochitani) *

概要

双楕円曲面 X の連接層の導来圏に対して, 標数が 0 の場合には, X と導来同値な代数多様体の同型類は X 自身に限ることが知られている．標数が 5 以上の場合についても同様の結果が示されている．また, 自己同値群の生成元について, 標数が 0 の場合にある特殊な型に限って決定されている．今回はこれらの結果を任意標数のすべての型の双楕円曲面の場合に拡張した.

1　導入

1.1　双楕円曲面

Definition 1.1. 極小射影曲面 X が**双楕円曲面**であるとは, $K_X \equiv 0, b_2 = 2$ であって, アルバネーゼ写像の任意のファイバーが滑らかな楕円曲線であることをいう.

双楕円曲面 X は 2 つの楕円曲線 A, B と, A の有限部分群スキーム G を用いて, 商 $X = (A \times B)/G$ で表すことができる．ここで, G は A に平行移動で作用し, B には自己同型射で作用している．$\mathrm{Aut}(B) = B \rtimes \mathrm{Aut}_0(B)$ に注意すると, $H \leq B$ と $G_0 \leq \mathrm{Aut}_0(B)$ を用いて $G = H \times G_0$ と表せる.

X は自然な 2 つの楕円ファイブレーション

$$f_1 \colon (A \times B)/G \to A/G, \quad f_2 \colon (A \times B)/G \to B/G,$$

を持つ．これが双楕円曲面の名前の由来である．f_1 はアルバネーゼ写像であり、故に滑らかである．一方, f_2 は多重ファイバーを持つ．整数 μ を

$$\mu \coloneqq \mathrm{lcm}\{m_i | m_i \text{は } f_2 \text{ の多重ファイバーの重複度 }\}$$

と定める．また, $i \in \{1, 2\}$ に対して F_i を f_i の滑らかなファイバーの数値同値類とし, 整数 λ_i を

$$\lambda_i \coloneqq \min\{F_i \cdot D \mid D \text{ は } X \text{ 上の有効因子の数値同値類 }\}$$

と定める．このとき, 以下の分類表が知られている.

* E-mail:y.tochitani0112@gmail.com

Type	G_0	H	$\mathrm{char}(k)$	$\mathrm{ord}(\omega_X)$	λ_1	λ_2	μ	$F_1 \cdot F_2$
(2,1)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	e	$\neq 2$	2	1	2	2	2
(2,1)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	e	$= 2$	1	1	2	2	2
(2,2)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\neq 2$	2	2	2	2	4
(2,μ_2)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	μ_2	$= 2$	1	2	2	2	4
(3,1)	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	e	$\neq 3$	3	1	3	3	3
(3,1)	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	e	$= 3$	1	1	3	3	3
(3,3)	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\neq 3$	3	3	3	3	9
(4,1)	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	e	$\neq 2$	4	1	4	4	4
(4,1)	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	e	$= 2$	1	1	4	4	4
(4,2)	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\neq 2$	4	2	4	4	8
(6,1)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	e	$\neq 2, 3$	6	1	6	6	6
(6,1)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	e	$= 2$	3	1	6	6	6
(6,1)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	e	$= 3$	2	1	6	6	6

表 1.1　双楕円曲面の分類表

1.2　導来圏とは何か

$\mathcal{A}$ をアーベル圏とし, $C(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の複体のなす圏とする．つまり, $C(\mathcal{A})$ の対象は $\mathcal{A}$ の複体であり, 複体 $E^\bullet$ から $F^\bullet$ への射 $f^\bullet$ は

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E^{i-1} & \xrightarrow{d_E^{i-1}} & E^i & \xrightarrow{d_E^i} & E^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^i} & & \downarrow{\scriptstyle f^{i+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F^{i-1} & \xrightarrow{d_F^{i-1}} & F^i & \xrightarrow{d_F^i} & F^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

という図式の全ての四角形が可換となるような $\mathcal{A}$ の射 $f_i \colon E^i \to F^i$ たちから成る．

射 $f^\bullet \colon E^\bullet \to F^\bullet$ が**擬同型**であるとは, コホモロジーに誘導される射

$$H^i(f^\bullet) \colon H^i(E^\bullet) \to H^i(F^\bullet)$$

が同型であることをいう．$K(\mathcal{A})$ を $C(\mathcal{A})$ のホモトピー圏とし, $K(\mathcal{A})$ を擬同型射からなる積閉系で局所化することで, $\mathcal{A}$ の**導来圏** $D(\mathcal{A})$ が得られる．この操作は環の局所化と似ており, 擬同型は $D(\mathcal{A})$ の中で同型となる．本論文で扱う導来圏は, 連接層の有界な導来圏 $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ である．以下, $D(X) = D^b(\mathrm{Coh}(X))$ と表す．

X, Y を滑らかな射影代数多様体とし,

$$p_Y \colon Y \times X \to Y, \ \ p_X \colon Y \times X \to X$$

を自然な射影とする．

Definition 1.2. $\mathcal{P} \in D(X \times Y)$ とする．このとき, $\mathcal{P}$ によって誘導される**積分関手**とは,

$$\Phi_{\mathcal{P}} \colon D(Y) \to D(X); \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}p_{X*}(p_Y^*\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{P})$$

のことである．積分関手は同値のとき **Fourier–Mukai 変換**と呼ばれる．

$$F \colon D(Y) \to D(X)$$

を忠実充満な関手とする．このとき, ある対象 $\mathcal{P} \in D(Y \times X)$ が同型を除いて一意的に存在し, F が $\Phi_{\mathcal{P}}$ に同型になることが [Orl03, Theorem 3.2.1] によって知られている．関手を考えることは一般には難しいが, 代わりに関手を定める対象を考えれば良いという点が, 素晴らしい利点である。

1.3 相対的 Fourier–Mukai 変換

次に, 相対的な Fourier–Mukai 変換を構成しよう．$f \colon X \to C$ を相対的極小楕円曲面とし, 整数 λ を

$$\lambda := \min\{F \cdot D \mid D \text{ は } X \text{ 上の有効因子の数値同値類 }\}$$

と定める．ただし, F は f の滑らかなファイバーの数値同値類である．任意の $\mathcal{E} \in D(X)$ に対し, $\mathcal{E}$ の次数を

$$d(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E}) \cdot F$$

と定める．

$a \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \in \mathbb{Z}$ を $a\lambda$ と b が互いに素になるようにとる．このとき, C 上の楕円曲面 $J_X(a,b)$ であって, 点 $p \in C$ のファイバーが, ファイバー上でランク a, 次数 b の安定層のモジュライ空間と標準的に同一視されるようなものが構成できる．Bridgeland は同値 $\Phi_{\mathcal{P}} \colon D(J_X(a,b)) \to D(X)$ を構成した．

Theorem 1.3 ([Bri98, Theorem 5.3])**.** *$f \colon X \to C$ を相対的極小楕円曲面とし, F を f の滑らかなファイバーの数値同値類とする．行列*

$$\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

を λ が d を割り切り, $a > 0$ となるようにとる．このとき, $X \times J_X(a,b)$ 上の 層 $\mathcal{P}$ であって, 双方向に対して平坦かつ強く単純なものがとれる．さらに任意の点 $(x,y) \in X \times J_X(a,b)$ に対して, $\mathcal{P}_y$ は X 上でチャーン類 $(0, aF, b)$ を持ち, $\mathcal{P}_x$ は $J_X(a,b)$ 上でチャーン類 $(0, aF, -c)$ を持つ．このような $\mathcal{P}$ から誘導される関手 $\Phi_{\mathcal{P}} := \Phi^{\mathcal{P}}_{J_X(a,b) \to X} \colon D(J_X(a,b)) \to D(X)$ は同値となり, 任意の対象 $\mathcal{E} \in D(J_X(a,b))$ に対して, 次を満たす:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{rk}(\Phi(\mathcal{E})) \\ d(\Phi(\mathcal{E})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{rk}(\mathcal{E}) \\ d(\mathcal{E}) \end{bmatrix}.$$

関手に関する議論を行列に関する議論に還元できるのが, この定理の魅力である．上記の定理を, 双楕円曲面上の楕円ファイブレーション

$$f_1 \colon (A \times B)/G \to A/G, \quad f_2 \colon (A \times B)/G \to B/G.$$

にそれぞれ適用しよう．$a \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \in \mathbb{Z}$ を $a\lambda$ と b が互いに素になるようにとる．このとき, f_i に対応するモジュライ空間 $J_X(a, b)$ は, 実は X と同型になることが分かる．そこで, 同型をひとつ固定することで, $\Phi : D(J_X(a, b)) \to D(X)$ を $D(X)$ 上の自己同値として考えられる．この自己同値のことを**相対的 Fourier–Mukai 変換**と呼ぶ.

2　研究課題と主定理

2.1　自己同値群の決定

本論文では大きく分けて 2 つの問題を考える．まず 1 つ目の問題は, 代数多様体 X の導来圏の**自己同値群** $\operatorname{Auteq} D(X)$ の生成元を決定することである．$\operatorname{Auteq} D(X)$ はいつでも次の部分群を持つ:

$$A(X) := \operatorname{Pic}(X) \rtimes \operatorname{Aut}(X) \times \mathbb{Z}.$$

これらは, X 上の自己同型射により引き戻し, 直線束のテンソル, シフト関手で生成されている．$A(X)$ の元を**標準自己同値**と呼ぶ．X の（反）標準因子は豊富のときは $A(X) = \operatorname{Auteq} D(X)$ であることが知られている ([BO01, Theorem 3.1]).

群 $\operatorname{Auteq} D(X)$ はアーベル多様体 ([Orl02]), ピカールランク 1 の K3 曲面 ([BB17]), ある型の楕円曲面 ([Ueh16], [Ueh17]), 一般曲面 ([IU05]) に対して調べられている．しかしながら, まだ調べられていない対象も多い.

本論文では特に X が双楕円曲面の場合を考える．Potter によって, $\operatorname{char}(k) = 0$ のときに, 双楕円曲面が巡回的と呼ばれるある特殊な型の場合には, $\operatorname{Auteq} D(X)$ が標準自己同値と相対的 Fourier–Mukai 変換によって生成されることが知られている (([Pot15, Theorem 1.2]))．本論文では, 任意標数上の任意の型の双楕円曲面について考察し, 次の結果が得られた.

Main Theorem 1. *X を任意標数の代数閉体上の双楕円曲面とする．このとき, $\operatorname{Auteq} D(X)$ は標準自己同値と, 2 つの楕円ファイブレーションに沿った相対的 Fourier–Mukai 変換で生成される.*

[Pot15, Theorem 1.2] における主要な道具は, X の標準被覆である．$\operatorname{char}(k) = 0$ の場合, 双楕円曲面の標準被覆は常にアーベル曲面になることが直ちに分かる．そこで Potter はアーベル曲面のいくつかの幾何学的およびホモロジー的性質を用いている．一方, $\operatorname{char}(k) > 0$ の場合, 双楕円曲面の標準被覆はアーベル曲面とは限らず, 双楕円曲面にもなり得る．したがって, [Pot15, Theorem 1.2] を一般化するためには, 別のアプローチを取る必要がある.

2.2　Fourier–Mukai パートナーの決定

次に, 2 つ目の問題は 代数多様体 X の **Fourier–Mukai パートナー**である．代数多様体 Y は $D(X) \simeq D(Y)$ のとき, X の Fourier–Mukai パートナーであるという．X の（反）標準因子が豊富のときは, X の Fourier–Mukai パートナーは自明, すなわち自分自身しか持たないことが知られている ([BO01, Theorem 2.5])．一般には, 互いに Fourier–Mukai パートナーであるが, 互いに同型ではない多様体の組が存在する．このような組の最初の例は,Mukai によって [Muk81] において発見された．彼は, アーベル多様体 A とその双対 $\hat{A}$ が導来同値であることを証明した.

char(k) = 0 の場合, 曲面 X が自明でない Fourier–Mukai パートナーをもつならば, X は K3 曲面, アーベル曲面, あるいは 小平次元が 0 でない相対的極小楕円曲面のいずれかである ([BM01, Theorem 1.1], [Kaw02, Theorem 1.6]). 特に, char$(k) = 0$ における双楕円曲面は自明な Fourier–Mukai パートナーしかもたない. char$(k) \geq 5$ の場合, 双楕円曲面は持ち上げ可能であり, この性質から char$(k) \geq 5$ において双楕円曲面の自明でない Fourier–Mukai パートナーは存在しないことが知られている ([HLT21, Theorem 1.2]).

本論文では Main Theorem 1 の証明方法を活かすことで, この結果を [HLT21, Theorem 1.2] とは別のアプローチで任意標数上に拡張することができた.

Main Theorem 2. 任意標数の代数閉体上の双楕円曲面は*,* 非自明な *Fourier–Mukai* を持たない*.*

参考文献

[BB17] Arend Bayer and Tom Bridgeland, *Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 1, 75–124. MR 3592689

[BM01] Tom Bridgeland and Antony Maciocia, *Complex surfaces with equivalent derived categories*, Math. Z. **236** (2001), no. 4, 677–697. MR 1827500

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344. MR 1818984

[Bri98] Tom Bridgeland, *Fourier-Mukai transforms for elliptic surfaces*, J. Reine Angew. Math. **498** (1998), 115–133. MR 1629929

[HLT21] Katrina Honigs, Max Lieblich, and Sofia Tirabassi, *Fourier-Mukai partners of Enriques and bielliptic surfaces in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **28** (2021), no. 1, 65–91. MR 4247995

[IU05] Akira Ishii and Hokuto Uehara, *Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces*, J. Differential Geom. **71** (2005), no. 3, 385–435. MR 2198807

[Kaw02] Yujiro Kawamata, *D-Equivalence and K-Equivalence*, Journal of Differential Geometry **61** (2002), no. 1, 147 – 171.

[Muk81] Shigeru Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Mathematical Journal **81** (1981), 153 – 175.

[Orl02] D. O. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66** (2002), no. 3, 131–158. MR 1921811

[Orl03] ———, *Derived categories of coherent sheaves and equivalences between them*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), no. 3(351), 89–172. MR 1998775

[Pot15] Rory Potter, *Derived autoequivalences of bielliptic surfaces*, 2017, arXiv:1701.01015.

[Ueh16] Hokuto Uehara, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension*, Algebr. Geom. **3** (2016), no. 5, 543–577. MR 3568337

[Ueh17] ———, *Fourier-Mukai partners of elliptic ruled surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 8, 3221–3232. MR 3652778