ある 3 変数 3 次不定方程式の整数解について

名古屋工業大学大学院 工学研究科 工学専攻 情報数理プログラム
高橋統士 (Toshi TAKAHASHI) *

概要

$34^3+10^3+67^3=341067$ のような例を見つけるために, 3 変数 3 次不定方程式 $x^3+y^3+z^3=10^{2n}x+10^ny+z$ の整数解を計算機実験により求め, 解の系列をいくつか発見したのでそれを紹介する．なお, 2 変数 2 次不定方程式 $x^2+y^2=10^nx+y$ は, $10^{2n}+1$ を素因数分解できれば解けることが知られている． 本講演ではさらに, m 変数 m 次不定方程式 $\sum_{i=0}^{m-1} x_i^m=\sum_{i=0}^{m-1} 10^{ni}x_i$ についても言及する．

1 導入

次の等式を偶然見かけ関心を持った．

$$
\begin{aligned}
&1^3+5^3+3^3=153,\\
&16^3+50^3+33^3=165033,\\
&166^3+500^3+333^3=166500333,\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

このような式の系列を見つけるために 3 変数 3 次不定方程式

$$x^3+y^3+z^3=10^{2n}x+10^ny+z \tag{1}$$

について考える．

数学者ハーディは [2] で以下のように述べている．

> 「(1 より大きい) 数で，各桁の 3 乗の和になる数は四つしかない，それは
>
> $$
> \begin{aligned}
> &153=1^3+5^3+3^3,\quad 370=3^3+7^3+0^3,\\
> &371=3^3+7^3+1^3,\quad 407=4^3+0^3+7^3.
> \end{aligned}
> $$
>
> これらは変わった事実であり，パズル欄にはうってつけのもので，素人を喜ばせそうだ．しかし，数学者に強く訴えるものは何もない．証明は難しくもなく，興味も引かない――ただ少々煩わしいだけである．これらの定理は重くない．そしてその理由の一つは（それが最も重要というわけではないだろうが），定理そのものも，その証明も極端に特殊なもので，何ら意味のある一般化の可能性を持たないことである．」

* E-mail:cmj14078@ict.nitech.ac.jp

本研究では，3 変数 3 次不定方程式 (1) の整数解を計算機実験により求め，そこから解の系列をいくつか発見した．例えば，

$$\begin{aligned} 4^3+0^3+7^3 &= 407 \\ 34^3+0^3+67^3 &= 340067 \\ 334^3+0^3+667^3 &= 334000667 \\ &\vdots \end{aligned}$$

などを 10 種類ほど見つけた．ハーディが挙げた 4 例は，これらの解の系列に漏れなく含まれている．さらに，発見した解の系列から新たな解の系列を組織的に構成することができる．例えば

$$34^3+00^3+67^3 = 34|00|67$$

から，

$$0000^3+0034^3+0067^3 = 0000|0034|0067$$

を得ることができる．

ところで，2 変数 2 次不定方程式

$$x^2+y^2 = 10^n x + y$$

は，$10^{2n}+1$ を素因数分解できれば，すべての解が得られることが知られている [4]．例えば，$n=2$ の場合 $10^4+1 = 73\cdot 137$ と因数分解でき，$(x,y) = (12,33),(88,33)$ という解が得られ

$$\begin{aligned} 12^2+33^2 &= 1233, \\ 88^2+33^2 &= 8833 \end{aligned}$$

となる．

本研究では，より一般に m 変数 m 次不定方程式

$$\sum_{i=0}^{m-1} x_i^m = \sum_{i=0}^{m-1} 10^{ni} x_i$$

についても考察した．整数解を計算機実験によって求め，解の系列を発見した．また，発見した解の系列から，新たな解の系列を組織的に構成することができた．

2　2 変数 2 次不定方程式

n を正の整数とし，2 変数の方程式

$$x^2+y^2 = 10^n x + y, \quad (0 \le x, y < 10^n) \tag{2}$$

を満たすような整数の組 (x,y) を考える．[4] にしたがって解き方を紹介する．

方程式 (2) を変形すると，

$$(10^n-2x)^2+(2y-1)^2 = 10^{2n}+1.$$

したがって，$10^{2n}+1$ を 2 つの整数の平方和で表すことができれば x, y を見つけることができる．すぐ気づくように，$10^{2n}+1=(10^n)^2+1^2$ と平方和で表せるが，自明な解 $x=0, y=0,1$ が出てくるだけである．そこで，$10^{2n}+1$ の各素因数 p を 2 つの整数の平方和で表し（このとき -1 は法 p で平方剰余であるから $p \equiv 1 \pmod 4$，したがって p は 2 つの整数の平方和で表せる），恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac \pm bd)^2+(ad \mp bc)^2 \tag{3}$$

を繰り返し使うことで，$10^{2n}+1$ を 2 つの整数の平方和で表すことができる．方程式 (2) はこの方法ですべての解を求めることができる．

例 2.1: $n=2$

$10^4+1=73 \cdot 137$ と $73=8^2+3^2, 137=11^2+4^2$ より，

$$\begin{aligned} 10^4+1 &= (8^2+3^2)(11^2+4^2) \\ &= (8 \cdot 11-3 \cdot 4)^2+(8 \cdot 4+3 \cdot 11)^2=76^2+65^2 \\ &= (10^2-2x)^2+(2y-1)^2. \end{aligned}$$

よって，先述の解 $x=12, 88$，$y=33$ が得られる．

一般の整数を 2 つの整数の平方和で表すために次のアルゴリズムを紹介する．

補題 2.2: Cornacchia's algorithm[3]

d と m を互いに素な整数とする．2 次方程式 $x^2+dy^2=m$ の整数解 (x, y) は次の手順で求められる．

① まず，合同式 $r_0^2 \equiv -d \pmod m$ を満たす正の整数 $r_0 \leq \dfrac{m}{2}$ を探す．$r_0 > \dfrac{m}{2}$ の場合は $m-r_0$ に置き換える．もしそのような r_0 が存在しない場合，整数解は存在しない．

② ユークリッドの互除法を繰り返し適用することで，剰余列 $r_1 \equiv m \pmod{r_0}$，$r_2 \equiv r_0 \pmod{r_1}, \ldots$ を生成する．

③ $r_k < \sqrt{m}$ かつ $s=\sqrt{\dfrac{m-r_k^2}{d}}$ が整数なら，$x=r_k, y=s$ が解となる．

次の例では，Cornacchia's algorithm で $d=1$ とする．$10^{2n}+1$ の素因数を m とし，r_0 の取り方として $r_0 \equiv 10^n \pmod m$ とすると $r_0^2 \equiv -1 \pmod m$ を満たす．

例 2.3: $n=5$

$n=5$ の場合の方程式 (2) を解く．右辺は $10^{10}+1=101 \cdot 3541 \cdot 27961$ と素因数分解できるが，これらの素因数を Cornacchia's algorithm によって 2 つの整数の平方和で表す．なお 101 については，$101=10^2+1^2$ とすぐに分かる．

3541 について，$10^5 \equiv 852 = r_0 \pmod{3541}$，$3541 \equiv 133 = r_1 \pmod{852}$，$852 \equiv 54 = r_2 \pmod{133}$．ここで，$54 < \sqrt{3541}$ かつ，$s=\sqrt{3541-54^2}=25$ が整数だから，

$3541 = 54^2 + 25^2$ と分解できる．

同様に 27961 については，$27961 = 144^2 + 85^2$ と分解できる．したがって，$101 \cdot 3541 \cdot 27961 = (10^2+1^2)(54^2+25^2)(144^2+85^2)$ であり，恒等式 (3) より，

$$\begin{aligned}(10^2+1^2)(54^2+25^2)(144^2+85^2) &= \{(10\cdot 54+1\cdot 25)^2+(10\cdot 25-1\cdot 54)^2\}(144^2+85^2)\\ &= (565^2+196^2)(144^2+85^2)\\ &= (565\cdot 144+196\cdot 85)^2+(565\cdot 85-196\cdot 144)^2\\ &= 98020^2+19801^2,\\ (10^2+1^2)(54^2+25^2)(144^2+85^2) &= (565^2+196^2)(144^2+85^2)\\ &= (565\cdot 144-196\cdot 85)^2+(565\cdot 85+196\cdot 144)^2\\ &= 64700^2+76249^2,\\ (10^2+1^2)(54^2+25^2)(144^2+85^2) &= \{(10\cdot 54-1\cdot 25)^2+(10\cdot 25+1\cdot 54)^2\}(144^2+85^2)\\ &= (515^2+304^2)(144^2+85^2)\\ &= (515\cdot 144+304\cdot 85)^2+(515\cdot 85-304\cdot 144)^2\\ &= 100000^2+1^2,\\ (10^2+1^2)(54^2+25^2)(144^2+85^2) &= (515^2+304^2)(144^2+85^2)\\ &= (515\cdot 144-304\cdot 85)^2+(515\cdot 85+304\cdot 144)^2\\ &= 48320^2+87551^2\end{aligned}$$

と変形できる．

$$\begin{aligned}(10^5-2x)^2+(2y-1)^2 &= 10^{10}+1\\ &= 98020^2+19801^2\\ &= 64700^2+76249^2\\ &= 100000^2+1^2\\ &= 48320^2+87551^2\end{aligned}$$

から $0 \leq x, y < 10^5$ の範囲で非自明な解 x, y を求めると

$$\begin{aligned}(x,y) = &(990, 9901), (99010, 9901), (17650, 38125),\\ &(82350, 38125), (25840, 43776), (74160, 43776).\end{aligned}$$

よって，$n = 5$ の場合の問題 (2) の解

$$\begin{aligned}&990^2+9901^2 = 99009901\\ &99010^2+9901^2 = 9901009901\\ &17650^2+38125^2 = 1765038125\\ &82350^2+38125^2 = 8235038125\\ &25840^2+43776^2 = 2584043776\\ &74160^2+43776^2 = 7416043776\end{aligned}$$

が求まった．

$10^{2n}+1$ の素因数分解さえできてしまえば，この方法によって問題 (2) の解を見つけることができるが，一般に桁数が大きくなると整数の素因数分解は困難になる．Cunningham Project[1] では，$b^n \pm 1$ $(b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12)$ の素因数分解の結果が記されており，次にそれを利用した例を示す．

Cunningham Project より，$10^{314}+1$ の素因数分解は，素因数が 4 つで

$$
\begin{aligned}
&101 \cdot 28415783195151364586816438858689 \cdot \\
&266488455430283106331412078955889415011373032402631355734921 \cdot \\
&13074966836663120162722709105541123648726298723670646687814307407224950010 \\
&18180216778815507880392549954497547773871479441360810765355506828775300078 \\
&80771154323329365744604970190894619006639304519735250462582580835231610629
\end{aligned}
$$

である．したがって，$n = 157$ の場合の (2) の解の例を一つ挙げると，

$$
\begin{aligned}
x =& 2480979093248471461616787137729396787731060155999262683580823712474249 \\
& 1708194623982562209262341342999997188836202160833902059614323424417410 \\
& 05345291678640780, \\
y =& 4319089449334049965520607836514822805806474154623416580267521517493279 \\
& 4750328769983688452931024127797079798315359691487330249138027257991456 \\
& 12761091042431601.
\end{aligned}
$$

3　3 変数 3 次不定方程式

n を正の整数とし，3 変数の方程式

$$
x^3 + y^3 + z^3 = 10^{2n}x + 10^n y + z, \quad (0 \leq x, y, z < 10^n)
$$

を満たすような整数の組 (x, y, z) を考える．例えば $(1, 5, 3)$ は $n = 1$ の場合の解であり，

$$
1^3 + 5^3 + 3^3 = 153
$$

となる．計算機によって実験的に求めた解の中で系列になっているものをいくつか発見したため紹介する．それらは一般の桁数 n でも有効であることが分かる．

定理 3.1

$$
\begin{aligned}
&1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \\
&16^3 + 50^3 + 33^3 = 165033 \\
&166^3 + 500^3 + 333^3 = 166500333 \\
&1666^3 + 5000^3 + 3333^3 = 166650003333 \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&16\cdots6^3 + 50\cdots0^3 + 3\cdots3^3 = 16\cdots650\cdots03\cdots3
\end{aligned} \tag{4}
$$

証明は，$N=10^n$ とし，

$$x = 16\cdots 6 = \frac{N-4}{6},$$
$$y = 50\cdots 0 = \frac{N}{2},$$
$$z = 33\cdots 3 = \frac{N-1}{3}$$

とおくとことで，$x^3+y^3+z^3 = N^2x+Ny+z$ が確かめられる．

以下まとめて紹介する．

定理 3.2

$$\underbrace{3\cdots 3}_{n}{}^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n}{}^3 + 0^3 = \underbrace{3\cdots 3}_{n}\underbrace{6\cdots 67}_{n}\underbrace{0\cdots 0}_{n} \tag{5}$$

$$\underbrace{3\cdots 3}_{n}{}^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n}{}^3 + 1^3 = \underbrace{3\cdots 3}_{n}\underbrace{6\cdots 67}_{n}\underbrace{0\cdots 01}_{n} \tag{6}$$

$$\underbrace{3\cdots 34}_{n}{}^3 + 0^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n}{}^3 = \underbrace{3\cdots 34}_{n}\underbrace{0\cdots 0}_{n}\underbrace{6\cdots 67}_{n} \tag{7}$$

$$\underbrace{3\cdots 34}_{n}{}^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n}{}^3 = \underbrace{3\cdots 34}_{n}\underbrace{0\cdots 01}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}\underbrace{6\cdots 67}_{n}\ (n: \text{偶数}) \tag{8}$$

$$\underbrace{3\cdots 34}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + 0^3 = \underbrace{3\cdots 34}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}\underbrace{6\cdots 67}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{3n/2}\ (n: \text{偶数}) \tag{9}$$

$$\underbrace{3\cdots 34}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + \underbrace{6\cdots 67}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + 1^3 = \underbrace{3\cdots 34}_{n/2}\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}\underbrace{6\cdots 67}_{n/2}\underbrace{0\cdots 01}_{3n/2}\ (n: \text{偶数}) \tag{10}$$

$$1\underbrace{0\cdots 0}_{n/4}{}^3 + 0^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{3n/4}{}^3 = 1\underbrace{0\cdots 01}_{6n/4}\underbrace{0\cdots 0}_{3n/4}\ (n: 4\text{ の倍数}) \tag{11}$$

$$1\underbrace{0\cdots 0}_{n/4}{}^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{2n/4}{}^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{3n/4}{}^3 = 1\underbrace{0\cdots 01}_{3n/4}\underbrace{0\cdots 01}_{3n/4}\underbrace{0\cdots 0}_{3n/4}\ (n: 4\text{ の倍数}) \tag{12}$$

$$0^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + 0^3 = 1\underbrace{0\cdots 0}_{3n/2}\ (n: \text{偶数}) \tag{13}$$

$$0^3 + 1\underbrace{0\cdots 0}_{n/2}{}^3 + 1^3 = 1\underbrace{0\cdots 01}_{3n/2}\ (n: \text{偶数}) \tag{14}$$

$$0^3+\underbrace{3\cdots34}_{n/2}{}^3+\underbrace{6\cdots67}_{n/2}{}^3=\underbrace{3\cdots34}_{n/2}\underbrace{0\cdots0}_{n/2}\underbrace{6\cdots67}_{n/2}\ (n:\text{偶数}) \tag{15}$$

式 (15) については，少しわかりにくいが次のようなイメージである．

$$\underbrace{0\cdots0}_{n}{}^3+\underbrace{0\cdots0}_{n/2}\underbrace{3\cdots34}_{n/2}{}^3+\underbrace{0\cdots0}_{n/2}\underbrace{6\cdots67}_{n/2}{}^3=\underbrace{0\cdots0}_{3n/2}\underbrace{3\cdots34}_{n/2}\underbrace{0\cdots0}_{n/2}\underbrace{6\cdots67}_{n/2}$$

以下の集合を定義する．

$$T(3,n)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3|x^3+y^3+z^3=10^{2n}x+10^ny+z,\ (0\leq x,y,z<10^n)\right\}$$

上で列挙した系列を $T(3,n)$ の要素として $N=10^n$ を使ってまとめる．

$$\begin{aligned}T(3,n)\ni&\left(\frac{N-4}{6},\frac{N}{2},\frac{N-1}{3}\right),\left(\frac{N-1}{3},\frac{2N+1}{3},0\right),\left(\frac{N-1}{3},\frac{2N+1}{3},1\right),\\&\left(\frac{N+2}{3},0,\frac{2N+1}{3}\right),\left(\frac{N+2}{3},N^{\frac{1}{2}},\frac{2N+1}{3}\right)\ (n:\text{偶数}),\\&\left(N^{\frac{1}{2}}\frac{N^{\frac{1}{2}}+2}{3},N^{\frac{1}{2}}\frac{2N^{\frac{1}{2}}+1}{3},0\right)\ (n:\text{偶数}),\left(N^{\frac{1}{2}}\frac{N^{\frac{1}{2}}+2}{3},N^{\frac{1}{2}}\frac{2N^{\frac{1}{2}}+1}{3},1\right)\ (n:\text{偶数}),\\&\left(N^{\frac{1}{4}},0,N^{\frac{3}{4}}\right)\ (n:4\text{の倍数}),\left(N^{\frac{1}{4}},N^{\frac{2}{4}},N^{\frac{3}{4}}\right)\ (n:4\text{の倍数}),\left(0,N^{\frac{1}{2}},0\right)\ (n:\text{偶数}),\\&\left(0,N^{\frac{1}{2}},1\right)\ (n:\text{偶数}),\left(0,\frac{N^{\frac{1}{2}}+2}{3},\frac{2N^{\frac{1}{2}}+1}{3}\right)\ (n:\text{偶数}),\end{aligned}$$

次の写像を考える．

$$\begin{aligned}\phi_{YX}&:T(3,n)\ni(x,0,z)\mapsto(0,x,z)\in\mathbb{Z}^3\\\phi_{YZ}&:T(3,n)\ni(x,0,z)\mapsto(Nx,Nz,0)\in\mathbb{Z}^3\end{aligned}$$

定理 3.3: 写像によって得られる解

$(x,0,z)\in T(3,n)$ に対して，$\phi_{YX}(x,0,z)=(0,x,z)\in T(3,2n)$.
$(x,0,z)\in T(3,n)$ に対して，$\phi_{YZ}(x,0,z)=(Nx,Nz,0)\in T(3,2n)$.

定理 3.4

$N=10^n$，n は 8 の倍数とする．

$$\left(0,N^{\frac{1}{8}},N^{\frac{3}{8}}\right),\left(N^{\frac{5}{8}},N^{\frac{7}{8}},0\right)\in T(3,n)$$

写像を利用することで，n が 8 の倍数における新たな系列を発見することができた．

4　m 変数 m 次不定方程式

この章ではより一般に，m 変数 m 次不定方程式の解の集合

$$T(m,n)=\left\{(x_{m-1},\ldots,x_0)\in\mathbb{Z}^m \,\middle|\, \sum_{i=0}^{m-1}x_i^m=\sum_{i=0}^{m-1}10^{ni}x_i,\ (0\le x_0,\ldots,x_{m-1}<10^n)\right\}$$

について考える．

式 (12) の一般化として次の定理が見つかった．

定理 4.1

$N=10^n$，n は $m+1$ の倍数とする．

$$\left(N^{\frac{1}{m+1}},N^{\frac{2}{m+1}},\ldots,N^{\frac{m}{m+1}}\right)\in T(m,n)$$

系 4.2

$N=10^n$，n は $m+1$ の倍数とし，$\delta_i\in\{0,1\}$ $(i=1,2,\ldots\lceil m/2\rceil)$ とする．

$$\left(\delta_1N^{\frac{1}{m+1}},\delta_2N^{\frac{2}{m+1}},\ldots,\delta_2N^{\frac{m-1}{m+1}},\delta_1N^{\frac{m}{m+1}}\right)\in T(m,n)$$

定義 4.3

$m-1\ge i_1>i_2>\cdots>i_k\ge 0$ に対し，

$$T_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(m,n)=\{(x_{m-1},\ldots,x_0)\in T(m,n)\,|x_j=0,\forall j\notin\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\}$$

と定義する．言いかえると，各成分 x_l が 0 でない添え字 l の全体が集合 $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ に含まれるということである．

ここで，写像を定義する．

定義 4.4

正の整数 d が $m\equiv 1 \pmod d$ を満たすとき，$(x_{m-1},\ldots,x_0)\in T_{m-1,m-1-d,\ldots,d,0}(m,n)$（添え字が公差 d の等差数列）に対して，以下のような写像を定義する．

$$\phi^{\mathrm{R}}_{m,d}(x_{m-1},\ldots,x_0)=(\underbrace{0,\ldots,0}_{\frac{m-1}{d}(d-1)},\underbrace{x_{m-1},x_{m-1-d},\ldots,x_0}_{\frac{m-1}{d}+1})\in\mathbb{Z}^m,$$

$$\phi^{\mathrm{L}}_{m,d}(x_{m-1},\ldots,x_0)=(\underbrace{N^{d-1}x_{m-1},N^{d-1}x_{m-1-d},\ldots,N^{d-1}x_0}_{\frac{m-1}{d}+1},\underbrace{0,\ldots,0}_{\frac{m-1}{d}(d-1)})\in\mathbb{Z}^m$$

これらの写像を利用することで定理 3.3 を拡張することができる．

定理 4.5: 写像によって得られる解

正の整数 d が $m \equiv 1 \pmod d$ を満たすとき，$(x_{m-1},\dots,x_0) \in T_{m-1,m-1-d,\dots,d,0}(m,n)$ に対して，

$$\phi^{\mathrm{R}}_{d,m}(x_{m-1},\dots,x_0) \in T_{\frac{m-1}{d},\frac{m-1}{d}-1,\dots,1,0}(m,dn),$$
$$\phi^{\mathrm{L}}_{d,m}(x_{m-1},\dots,x_0) \in T_{m-1,m-2,\dots,m-1-\frac{m-1}{d}}(m,dn).$$

例 4.6

n が 8 の倍数のとき，$\left(N^{\frac{1}{8}},0,N^{\frac{3}{8}},0,N^{\frac{5}{8}},0,N^{\frac{7}{8}}\right) \in T_{6,4,2,0}(7,n)$ に対して，定理 4.5 の $d=2$ より，

$$\left(0,0,0,N^{\frac{1}{8}},N^{\frac{3}{8}},N^{\frac{5}{8}},N^{\frac{7}{8}}\right) \in T_{3,2,1,0}(7,2n),$$
$$\left(N^{\frac{9}{8}},N^{\frac{11}{8}},N^{\frac{13}{8}},N^{\frac{15}{8}},0,0,0\right) \in T_{6,5,4,3}(7,2n)$$

という新しい解の系列を見つけることができる．また，$\left(N^{\frac{1}{8}},0,0,N^{\frac{4}{8}},0,0,N^{\frac{7}{8}}\right)$ $\in T_{6,3,0}(7,n)$ に対して，定理 4.5 の $d=3$ より，

$$\left(0,0,0,0,N^{\frac{1}{8}},N^{\frac{4}{8}},N^{\frac{7}{8}}\right) \in T_{2,1,0}(7,3n),$$
$$\left(N^{\frac{17}{8}},N^{\frac{20}{8}},N^{\frac{23}{8}},0,0,0,0\right) \in T_{6,5,4,}(7,3n)$$

という新しい解の系列を見つけることができる．

参考文献

[1] The Cunningham Project, `https://homes.cerias.purdue.edu/~ssw/cun/`, October 13, 2025.

[2] G.H. ハーディ, C.P. スノー著 ; 柳生孝昭訳, ある数学者の生涯と弁明, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1994).

[3] A. Nitaj, L'algorithme de Cornacchia, Exposition. Math. **13** (1995), no. 4, 358–365; MR1358213

[4] A.v.d. Poorten, K. Thomsen & M. Wiebe, A curious cubic identity and self-similar sums of squares, Math. Intelligencer **29** (2007), no. 1, 39–41; `https://doi.org/10.1007/BF02986204`