逆半群作用に付随する KS 亜群及び KS 接合積

慶應義塾大学大学院　理工学研究科　基礎理工学専攻
關山輝流 (Hikaru SEKIYAMA) *

概要

逆半群論と亜群論の間の深い関係の一つに、逆半群に付随する普遍亜群と呼ばれる、もとの逆半群の性質を反映したエタール亜群の構成が知られている。本稿では、逆半群に対するこの構成を、KS 接合積と呼ばれる C*環の構成を通して、空間への逆半群作用に対して一般化する。

0　導入

著者の専門とする C*環論は、von Neumann による量子力学の定式化や、Gelfand や Naimark による表現論の研究に端を発する、関数解析学の一分野である。「無限次元の線形代数」とも形容されるこの分野は、非可換・無限次元といった数学的な難しさを持つ。それに対する一つのアプローチとして、ある C*環のクラスを別の数学的対象と紐付けて、その描像で性質や構造を調べることがよくなされる。特に、群や群作用、有向グラフなどによる C*環の構成や、その性質は長らく調べられてきた。

このような数ある構成の中で、本稿では逆半群作用や位相亜群 (特にエタール亜群) に付随する C*環の構成に注目する。ここで逆半群や亜群とは、群における単位元の一意性を緩めたような代数形であり、逆半群における “単位元” の集まりは半束をなし、位相亜群における “単位元” の集まりは位相空間になっている。群作用が、作用する対象の大域的な対称性に注目するのに対して、逆半群作用は作用する対象の局所的な対称性に注目する。

逆半群作用に付随する C*環の構成は、Sieben による接合積の構成 ([Sie97]) と Khoshkam-Skandalis による KS 接合積の構成 ([KS04]) の 2 つが知られている。前者は命題 4.9 で見るように、亜群論と深く関係している。後者は、逆半群 C*環の構成を、逆半群の一点空間への恒等作用に対する KS 接合積とする形で一般化しており、逆半群論と深く関係している。一方で KS 接合積の特殊な場合である逆半群 C*環は、逆半群に付随する普遍亜群というエタール亜群によって実現される (Paterson の定理) ことが知られており、この事実によって広いクラスの C*環を、逆半群を通して組み合わせ論的に扱えることが知られている ([Exe08, ES17])。著者は、一般の逆半群作用に対して、その KS 接合積を実現するエタール亜群はあるのか、あるとしたらそれはどのようなエタール亜群なのかに興味を持ち、これに対しての結果を得た。

本稿では著者が行なった、空間への逆半群作用に対する KS 接合積を実現する、具体的な亜群 (KS 亜群) の構成 (定理 5.1, 定理 5.2) について説明する。この構成は、逆半群による普遍亜群の構成を自然に拡張するものであり (定理 5.5)、Paterson の定理の逆半群作用への一般化 (系 4.11, 定理 5.8) を与える。また、KS 亜群の Hausdorff 性に関する部分的な結果 (定理 5.6) についても紹介する。

* E-mail:hika-sekky777@keio.jp

1　C*環

本節では、C*環の定義や、その構成について簡単に説明する。

定義 1.1. *代数 A とは $\mathbb{C}$ 上の代数であり、任意の $a, b \in A$ に対して

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*$$

を満たすような共役線形写像 $*\colon A \ni a \mapsto a^* \in A$ を備えたものである。A のイデアル N が*演算で閉じているとき、N は A の*イデアルであると言う。

定義 1.2. A, B を*代数とする。線形写像 $\varphi\colon A \to B$ が積と*演算を保つとき、φ を*準同型という。

注意 1.3. N が*代数 A の*イデアルであるとき、商 A/N は自然に*代数の構造を持つ。また、商写像 $A \ni a \mapsto a + N \in A/N$ は*準同型である。

定義 1.4. *代数 A 上の (セミ) ノルム $p\colon A \to [0, \infty)$ であって、任意の $a, b \in A$ に対して

$$p(ab) \leq p(a)p(b), \quad p(a^*a) = p(a)^2$$

を満たすものを、A 上の (セミ)C*ノルムという。完備な C*ノルムを備えた*代数を C*環という。

例 1.5. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする。X 上の複素数値連続関数であり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して集合 $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ が X でコンパクトになるような関数 f 全体を $C_0(X)$ と表す。このとき、$C_0(X)$ は各点ごとの積、複素共役、そして sup ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ に関して C*環をなす。また、$C_c(X)$ を X 上のコンパクト台を持つ複素数値連続関数全体とする。このとき、$C_c(X)$ は $C_0(X)$ における稠密な*イデアルである。

この C*環 $C_0(X)$ は積に関して可換である。逆に、可換な C*環はこのような C*環と同型であることが知られている。

定理 1.6. (Gelfand-Naimark)　A を可換な C*環とする。このとき A から $\mathbb{C}$ への 0 でない*準同型全体に、各点収束の位相を入れた位相空間 $\mathrm{Sp}(A)$ (これを A のスペクトラムと呼ぶ) は、局所コンパクト Hausdorff であり $A \cong C_0(\mathrm{Sp}(A))$ を満たす。

注意 1.7. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X と一点 $x \in X$ に対して、写像 $\mathrm{ev}_x\colon C_0(X) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ は 0 でない*準同型である。さらに、この対応 $X \ni x \mapsto \mathrm{ev}_x \in \mathrm{Sp}(C_0(X))$ は同相である。

観察 1.8. *代数 A 上のセミ C*ノルム p に対して、部分集合 $\{a \in A \mid p(a) = 0\}$ は A の*イデアルになる。このとき商 A/N において演算 $\|a + N\| := p(a)$ は well-defined であり、*代数 A/N 上の C*ノルムを定める。このとき A/N の完備化として得られる C*環を A の Hausdorff 完備化と言う。このとき A から A の Hausdorff 完備化に自然な*準同型がある。

何かしらの数学的対象から C*環を構成する際には、まずは代数的に*代数を構成し、その*代数に対して以下の手順で C*環を構成するという手順がよくなされる。

命題 1.9. A を*代数とする。任意の $a \in A$ に対してある定数 $C_a > 0$ が存在して、任意の C*環 D と任意の*準同型 $\pi\colon A \to D$ に対して $\|\pi(a)\| \leq C_a$ を満たすとする。このとき、$p(\cdot) = \sup\{\|\pi(\cdot)\| \mid D : \text{C*環},\ \pi\colon A \to D : \text{*準同型}\}$ は A 上のセミ C*ノルムを定める。

定義 1.10. 上のような条件を満たす*代数 A に対して、上記のセミ C*ノルムに関する Hausdorff 完備化を A の普遍包絡 C*環と呼ぶ。

注意 1.11. 普遍包絡 C*環は次のような普遍性を持つ: A を命題 1.9 の仮定を満たす*代数とし、B_A を A の普遍包絡 C*環とする。このとき任意の C*環 D と*準同型 $\pi\colon A \to D$ に対して、次の図式を可換にする*準同型 $\overline{\pi}\colon B_A \to D$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & B_A \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & D \end{tikzcd}$$

例 1.12. A を C*環とし、A^0 をその稠密な*イデアルとする。このとき A^0 は命題 1.9 の条件を満たし、その普遍包絡 C*環は自然に A と同型である。特に、局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対して $C_c(X)$ の普遍包絡 C*環は $C_0(X)$ である。

2 逆半群

この節では逆半群とその作用について簡単に説明する。逆半群についての文献としては [Law98] と、その作用や C*環との関係については [Exe08] や [Pat99] などに書かれている。

定義 2.1. S を半群とする。任意の $s \in S$ に対して、条件 $ss^*s = s,\ s^*ss^* = s^*$ を満たす元 $s^* \in S$ が一意に存在するとき、S を逆半群と言う。この $s^* \in S$ を s の一般化逆元と呼ぶ。

記号 2.2. 逆半群に対して、冪等元全体を $E(S)$ と表す。つまり、$E(S) = \{e \in S \mid ee = e\}$ である。

例 2.3. $(E, \wedge)$ を半束とする。このとき E は演算 $ef := e \wedge f$ に関して逆半群をなす。

注意 2.4. 逆半群 S において、$E(S)$ は可換な部分半群である。特に、$E(S)$ は半束の構造を持つ。

例 2.5. 群は、冪等元がちょうど 1 個の逆半群である。逆に、$|E(S)| = 1$ なら S は群である。

例 2.6. X を集合とし、$\mathcal{I}(X)$ を X の部分集合の間の全単射全体とする。$\mathcal{I}(X)$ の 2 元 $f\colon U_1 \to V_1$、$g\colon U_2 \to V_2$ に対して、その部分合成

$$g \circ f\colon f^{-1}(V_1 \cap U_2) \ni x \mapsto g(f(x)) \in g(V_1 \cap U_2)$$

が定義できて、これは再び $\mathcal{I}(X)$ の元である[*1]。この演算に関して、$\mathcal{I}(X)$ は逆半群である。このとき、$\mathcal{I}(X)$ の元 $f\colon U \to V$ に対する一般化逆元は逆写像 $f^{-1}\colon V \to U$ である。また、$\mathcal{I}(X)$ の冪等元はある部分集合上の恒等写像である。つまり、$E(\mathcal{I}(X)) = \{\mathrm{id}_U \mid U \subset X\}$ である。

[*1] つまり、$g \circ f$ は X の部分集合 $f^{-1}(V_1 \cap U_2)$ と $g(V_1 \cap U_2)$ の間の全単射になる。

定義 2.7. X を位相空間、S を逆半群とする。このとき半群準同型 $\theta\colon S \ni s \mapsto \theta_s \in \mathcal{I}(X)$ が

(1) 各 $e \in E(S)$ に対して $\theta_e = \mathrm{id}_{X_e}$ を満たす $X_e \subset X$ は開集合、
(2) 各 $s \in S$ に対して写像 θ_s は連続、そして
(3) $X = \bigcup_{e\in E(S)} X_e$

を満たすとき、θ を S の X への作用と言う。

注意 2.8. 各 $s \in S$ に対して、$\theta_{s^*} \circ \theta_s = \mathrm{id}_{X_{s^*s}}$ と $\theta_s \circ \theta_{s^*} = \mathrm{id}_{X_{ss^*}}$ が成り立つ。したがって、θ_s は X_{s^*s} から X_{ss^*} への同相写像である。

例 2.9. S を逆半群とする。$\widehat{E(S)}$ を $E(S)$ から半束 $\{0, 1\}$ への 0 でない半群準同型全体のなす集合とし、そこに各点収束の位相を考える。すると、$X^u = \widehat{E(S)}$ は局所コンパクト Hausdorff 空間になる。さらに、この位相空間には次のようにして S の作用 $\theta^u\colon S \to \mathcal{I}(X^u)$ が入る。

(i) 各 $e \in E(S)$ に対して $X^u_e = \{\chi \in \widehat{E(S)} \mid \chi(e) = 1\}$ とすると、これは X^u の (コンパクト) 開集合であり、さらに $X^u = \bigcup_{e\in E(S)} X^u_e$ を満たす。
(ii) 各 $s \in S$ に対して $\theta^u_s\colon X^u_{s^*s} \to X^u_{ss^*}$ を

$$\theta^u_s(\chi)(e) = \chi(s^*es)$$

で定めると、これは well-defined な同相写像を定める。

定義 2.10. S を逆半群、X, Y を位相空間、θ, σ を S の X, Y への作用とする。写像 $f\colon X \to Y$ が以下を満たすとき、$f\colon X \to Y$ は S 同変であると言う。

(1) 各 $e \in E(S)$ に対して $f(X_e) \subset Y_e$ が成り立つ。
(2) 各 $s \in S$ に対して、$f|_{X_{ss^*}} \circ \theta_s = \sigma_s \circ f|_{X_{s^*s}}$ が成り立つ。

例 2.11. θ を逆半群 S の局所コンパクト Hausdorff 空間への作用とする。このとき各 $x \in X$ に対して $f^u(x)\colon E(S) \to \{0, 1\}$ を、$x \in X_e$ なら $f^u(x)(e) = 1$ で $x \notin X_e$ なら $f^u(x)(e) = 0$ と定める。すると $f^u(x) \in \widehat{E(S)}$ であり、さらに写像 $f^u\colon X \to \widehat{E(S)}$ は S 同変になる。

3 エタール亜群

亜群とは、一言で言えば、全ての射が可逆な小圏である。これを明示的に表すと以下のようになる。

定義 3.1. 集合 G が亜群であるとは、ある部分集合 $G^{(0)} \subset G$(この集合を G の unit space という) と、写像 $d, r\colon G \to G^{(0)}$(それぞれ domain map、range map と呼ぶ) そして積演算

$$G^{(2)} := \{(\gamma_2, \gamma_1) \in G \times G \mid d(\gamma_2) = r(\gamma_1)\} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta \in G$$

さらに逆元をとる演算 $G \ni \gamma \mapsto \gamma^{-1} \in G$ を備えており、これらが以下の条件を満たすことを言う。

(1) 任意の $x \in G^{(0)}$ に対して $d(x) = x = r(x)$ が成り立つ。
(2) 任意の $\gamma \in G$ に対して $r(\gamma)\gamma = \gamma = \gamma d(\gamma)$ が成り立つ。

(3) 任意の $(\gamma_2,\gamma_1)\in G^{(2)}$ に対して $r(\gamma_2\gamma_1)=r(\gamma_2)$ と $d(\gamma_2\gamma_1)=d(\gamma_1)$ が成り立つ。
(4) 任意の $(\gamma_3,\gamma_2),(\gamma_2,\gamma_1)\in G^{(2)}$ に対して $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1=\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$ が成り立つ。
(5) 任意の $\gamma\in G$ に対して $\gamma^{-1}\gamma=d(\gamma)$ と $\gamma\gamma^{-1}=r(\gamma)$ が成り立つ。

定義 3.2. G,H を亜群とする。写像 $f\colon G\to H$ が亜群準同型であるとは、$f(G^{(2)})\subset H^{(2)}$ であり、任意の $(\alpha,\beta)\in G^{(2)}$ に対して $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha\beta)$ が成り立つことである。

定義 3.3. 積演算 $G\times G\supset G^{(2)}\ni(\alpha,\beta)=\alpha\beta\in G$ と逆元をとる演算 $G\ni\gamma\mapsto\gamma^{-1}\in G$ がどちらも連続になるような位相を備えた亜群を位相亜群と呼ぶ。位相亜群 G がエタールであるとは、$G^{(0)}$ が局所コンパクト Hausdorff であり[*2]、$d,r\colon G\to G^{(0)}$ がそれぞれ局所同相[*3]であることである。

例 3.4. 位相群 G は $|G^{(0)}|=1$ を満たす位相亜群である。位相群 G が亜群としてエタールであるための必要十分条件は、G が離散であることである。

例 3.5. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X は $X=X^{(0)}$ なるエタール亜群である。

定義 3.6. 部分集合 $U\subset G$ がエタール亜群 G の bisection であるとは、制限 $d|_U, r|_U$ がどちらも単射になることである。$\mathrm{Bis}(G)$ をエタール亜群 G の開な bisection 全体のなす集合とする。

注意 3.7. $U\in\mathrm{Bis}(G)$ なら、制限写像 $d|_U\colon U\to d(U),\ r|_U\colon U\to r(U)$ はともに同相である。特に、U は局所コンパクト Hausdorff である。実は、$\mathrm{Bis}(G)$ は G の開基であることがわかる。

空間への逆半群作用から得られる変換亜群は、本稿における最も重要なエタール亜群である。

例 3.8. θ を逆半群 S の局所コンパクト Hausdorff 空間 X への作用とする。このとき $S*X\subset S\times X$ を $x\in X_{s^*s}$ を満たす組 $(s,x)\in S\times X$ 全体のなす集合とする。この $S*X$ 上に関係 $\sim$ を

$$(s,x)\sim(t,y)\iff x=y\quad\text{and}\quad\exists e\in E(S)\quad x=y\in X_e,\ se=te$$

で定めると、これは $S*X$ 上の同値関係になる。この同値関係に関する商を $S\ltimes X$ で表し、$(s,x)\in S*X$ の同値類を $[s,x]$ と記すことにする。このとき、対応 $\{[e,x]\mid e\in E(S),\ x\in X_e\}\ni[e,x]\mapsto x\in X$ は全単射である。従って、X を $S\ltimes X$ の部分集合と思うことにする。$S\ltimes X$ は次のようにしてエタール亜群をなす。

- unit space に関しては $(S\ltimes X)^{(0)}=X$ とする。
- domain map, range map は $d([s,x])=x, r([s,x])=\theta_s(x)$ により定める。
- 上の d,r の定義から $(S\ltimes X)^{(2)}=\{([t,y],[s,x])\mid y=\theta_s(x)\}$ である。そこで、積演算を $[t,\theta_s(x)][s,x]=[ts,x]$ によって定める。
- 逆元をとる演算は $S\ltimes X\ni[s,x]\mapsto[s^*,\theta_s(x)]$ により定める。
- 各 $s\in S$ と X_{s^*s} の開集合 U に対する $[s,U]=\{[s,x]\in S\ltimes X\mid x\in U\}$ 全体を開基として $S\ltimes X$ の位相を定める。

[*2] この条件は亜群論において一般的ではないが、C*環との関係においては必要となる。
[*3] ここで位相空間の間の写像 $f\colon X\to Y$ が局所同相であるとは、各点 $x\in X$ に対して開近傍 $U\subset X$ が存在して、$f(U)$ は Y で開集合かつ制限 $f|_U\colon U\to f(U)$ が同相写像になること言う。

気持ち的には、元 $[s,x] \in S \ltimes X$ を x から $\theta_s(x)$ への矢印だと思うと良い。

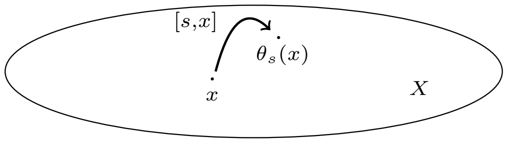

図 1: 変換亜群のイメージ図

例 2.9 から構成される変換亜群 $S \ltimes \widehat{E(S)}$ は、S の普遍亜群と呼ばれている。

注意 3.9. X, Y を S 作用付き局所コンパクト Hausdorff 空間とし、$f\colon X \to Y$ を S 同変な写像とする。このとき対応 $\widetilde{f}\colon S \ltimes X \ni [s,x] \mapsto [s, f(x)] \in S \ltimes Y$ は well-defined な亜群準同型である。

G をエタール亜群とする。エタール亜群からは次のようにして C*環を構成することができる。詳細は [Exe08] や [Pat99] などに書いてある。

観察 3.10. 各 $U \in \mathrm{Bis}(G)$ に対して、$C_c(U)$ の元を、U の外の元に対しては 0 を返す関数と考えることで、G 上の複素数値関数と考えることにする。つまり、$C_c(U) \subset \mathbb{C}^G$ とする。そこで、$\mathcal{C}(G) = \mathrm{span} \bigcup_{U \in \mathrm{Bis}(G)} C_c(U) \subset \mathbb{C}^G$ とすると、これは以下の演算に関して*代数になる。

$$f * g(\gamma) = \sum_{\beta \in G_{d(\gamma)}} f(\gamma\beta^{-1}) g(\beta), \quad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \quad (f, g \in \mathcal{C}(G)).$$

さらに、この*代数は命題 1.9 の仮定を満たすことが示せる。

定義 3.11. $\mathcal{C}(G)$ の普遍包絡 C*環を $C^*(G)$ と表し、これを G の充足亜群 C*環などと呼ぶ。

4 C*環への逆半群作用とその (KS) 接合積

C*環への逆半群作用は、1997 年に Sieben により導入された [Sie97]。

定義 4.1. S を逆半群とし、A を C*環とする。半群準同型 $\alpha\colon S \ni s \mapsto \alpha_s \in \mathcal{I}(A)$ が以下を満たすとき、α を S の C*環 A への作用という。

(1) 各 $e \in E(S)$ に対して $\alpha_e = \mathrm{id}_{A_e}$ なる部分集合 $A_e \subset A$ は A の閉な*イデアルである。
(2) 各 $s \in S$ に対して写像 θ_s は*準同型。
(3) $A = \overline{\mathrm{span}} \bigcup_{e \in E(S)} A_e$ が成り立つ。

注意 4.2. 各 $s \in S$ に対して、$\alpha_{s^*} \circ \alpha_s = \mathrm{id}_{A_{s^*s}}, \alpha_s \circ \alpha_{s^*} = \mathrm{id}_{A_{ss^*}}$ が成り立つ。従って α_s は A_{s^*s} から A_{ss^*} への同型写像である。

例 4.3. S を逆半群、X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする。θ が S の空間 X への作用であるとき、次のようにして C*環 $C_0(X)$ に S からの作用が入る。

- 各 $e \in E(S)$ に対して $C_0(X)_e = \{f \in C_0(X) \mid f|_{X \setminus X_e} = 0\}$ とする。
- 各 $s \in S$ に対して $\alpha_s\colon C_0(X_{s^*s}) \to C_0(X_{ss^*})$ を

$$\alpha_s(f)(x) = f(\theta_{s^*}(x)) \quad (f \in C_0(X_{s^*s}))$$

によって定める。これは well-defined な同型写像である。

逆に、スペクトラムを考えることにより、$C_0(X)$ への S の作用はこの形で書ける。

逆半群作用に対する C*環の構成について説明する。α を逆半群 S の C*環 A への作用とする。

観察 4.4.
$$S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A = \bigoplus_{s\in S} A_{s^*s} \quad (\text{ベクトル空間としての直和})$$
とする。このベクトル空間の元として、$s \in S$ に対しては成分 $x \in A_{s^*s}$ を持ち、それ以外の S の元に対しては 0 を成分とするような元を $\delta_s\,x$ と表すことにする。すると、$S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ の任意の元 T はある $s_1,\ldots,s_n$ と $x_i \in A_{s_i^*s_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ を用いて $T=\sum_{i=1}^n \delta_{s_i}\,x_i$ と表せる。各 $s,t\in S$ と $x \in A_{s^*s}$ 及び $y \in A_{t^*t}$ に対して
$$(\delta_s\,x)\cdot(\delta_t\,y) = \delta_{st}\,\alpha_{t^*}(x\alpha_t(y)), \quad (\delta_s\,x)^* = \delta_{s^*}\,\alpha_s(x^*)$$
で定まる演算により、$S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ は*代数の構造を持つことが計算できる。さらに、この*代数は命題 1.9 の条件を満たすことが分かる。そこで、単にこの*代数の普遍包絡 C*環を考えたものが Khoshkam-Skandalis による接合積の構成である。

定義 4.5. ([KS04]) 上の*代数 $S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ の普遍包絡 C*環を $S \overset{\text{KS}}{\ltimes} A$ で表し、これを A の逆半群作用 α に関する KS 接合積と呼ぶ。

例 4.6. C*環 $\mathbb{C}$ に逆半群 S からの恒等作用を考えた際、KS 接合積 $S \overset{\text{KS}}{\ltimes} \mathbb{C}$ は逆半群 C*環 $C^*(S)$ と自然に同型である。ここで、逆半群 C*環については [Pat99] などを参照して欲しい。

上記の例のように、KS 接合積は逆半群 C*環の構成を一般化したものである。一方で $S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ の構成は、$s^*s = t^*t$ なる元 $s,t\in S$ がある度に全く同じイデアルを足しており、その意味でとても重複を孕んでいる。このような重複を同一視するような構成を Sieben は考えた。

観察 4.7. 逆半群 S において関係 $s \le t$ を $s = ts^*s$ なることとして定義すると、これは S の自然な順序を定める。この順序に関して
$$\mathcal{N}_A = \operatorname{span}\{\delta_t\,x - \delta_s\,x \mid s,t\in S,\ t\ge s,\ x\in A_{s^*s}\}$$
とすると、これは $S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ における*イデアルである。*代数 $S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A$ が命題 1.9 の仮定を満たすため、商 $\left(S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A\right)/\mathcal{N}_A$ も同様の仮定を満たす。

定義 4.8. ([Sie97, Exe08]) *代数 $\left(S \underset{\text{alg}}{\overset{\text{KS}}{\ltimes}} A\right)/\mathcal{N}_A$ の普遍包絡 C*環を $S \ltimes A$ で表し、これを A の逆半群作用 α に関する接合積と呼ぶ。

可換な C*環の接合積は、次のようにして計算できる。これは最初 Exel([Exe08]) によって色々な可算性の条件のもとで示され、後に Buss と Meyer([BM17]) によって一般に示された。

命題 4.9. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、θ を逆半群 S の空間 X への作用とする。このとき $C_0(X)$ に誘導される S の C*環 $C_0(X)$ への作用 (例 4.3) に関する接合積 $S \ltimes C_0(X)$ は、変換亜群 $S \ltimes X$ に対する亜群 C*環 $C^*(S \ltimes X)$ と自然に同型である。

そこで、可換な C*環に対する KS 接合積 $S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ がどのようなエタール亜群で実現されるかが気になる[*4]。次の KS 接合積と接合積の関係を与える定理は、これに対する手がかりになる。

定理 4.10. ([KS04]) α を C*環 A への逆半群 S の作用とする。このとき $E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} A$ は自然に S からの作用を持ち、それに関する接合積 $S \ltimes (E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} A)$ は自然に $S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} A$ と同型である。

従って、$S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ は $S \ltimes (E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X))$ と同型である。ここで、C*環 $E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ は、KS 接合積の構成から可換な C*環であることが分かる。つまり、定理 1.6 より次が言える。X^{KS} を可換 C*環 $\mathrm{Sp}(E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X))$ のスペクトラムとすると、次が成り立つ。

系 4.11.

$$S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X) \cong C^*(S \ltimes X^{\mathrm{KS}})$$

そこで、このスペクトラム X^{KS} の具体的な計算と、変換亜群 $S \ltimes X^{\mathrm{KS}}$ に関する著者の結果を、次に紹介する。

5 主定理

本節では θ を逆半群 S の局所コンパクト Hausdorff 空間 X への作用とする。このとき例 4.3 のようにして、C*環 $C_0(X)$ に S からの作用が入る。このとき、KS 接合積 $E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ のスペクトラム X^{KS} は次のように計算できる。

定理 5.1. (S.) 直積位相空間 $\prod_{e\in E(S)} \widetilde{X_e}$ の元 τ で、次の条件を満たすもの全体を X^{KS} とする。

(i) ある冪等元 $e \in E(S)$ に対して $\tau(e) \neq \infty_e$ が成り立つ[*5]。
(ii) $e_1 \leq e_2$ かつ $\tau(e_1) \neq \infty_{e_1}$ なる冪等元 e_1, e_2 に対して $\tau(e_2) = \tau(e_1)$ が成り立つ。
(iii) $\tau(e_1) \neq \infty_{e_1}$ かつ $\tau(e_2) \neq \infty_{e_2}$ を満たす冪等元 e_1, e_2 に対して $\tau(e_1e_2) \neq \infty_{e_1e_2}$ が成り立つ。

このとき、X^{KS} に直積位相空間からの相対位相を入れた空間は、KS 接合積 $E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ のスペクトラムと同相である。

証明: 証明の簡単な方針を説明する。

0 でない*準同型 $\chi\colon E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X) \to \mathbb{C}$ を固定する。各 $e \in E(S)$ に対して対応 $\chi|_{C_0(X_e)}\colon C_0(X_e) \ni f \mapsto \chi(\delta_e f) \in \mathbb{C}$ が $C_0(X_e)$ 上の*準同型を定める。これが 0 なら $\tau_\chi(e) = \infty_e$ とし、0 でないなら注意 1.7 よりただ一つの $x \in X_e$ により $\chi|_{C_0(X_e)} = \mathrm{ev}_x$ と書けるので、$\tau_\chi(e) = x$ とする。このとき、$\tau_\chi \in \prod_{e\in E(S)} \widetilde{X_e}$ は上の 3 つの条件を満たす。つまり、$\tau_\chi \in X^{\mathrm{KS}}$ である。

逆に、$\tau \in X^{\mathrm{KS}}$ に対しては、$\chi_\tau(\delta_e f) = f(\tau(e))$ を満たす写像 $\chi_\tau\colon E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X) \to \mathbb{C}$ が一意に存在し、これが 0 でない*準同型を与える。このとき対応

$$\mathrm{Sp}(E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)) \ni \chi \mapsto \tau_\chi \in X^{\mathrm{KS}}, \quad X^{\mathrm{KS}} \ni \tau \mapsto \chi_\tau \in \mathrm{Sp}(E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X))$$

はそれぞれ連続であり、互いに逆写像をなす。 □

---

*4 X が一点の場合は $S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X) = C^*(S)$ であり、この問題は Paterson の定理 $C^*(S) \cong C^*(S \ltimes \widehat{E(S)})$ に当たる。
*5 ここで、冪等元 $e \in E(S)$ に対応する一点コンパクト化 $\widetilde{X_e}$ の無限遠点を ∞_e としている。

また、定理 4.10 より、C*環 $E(S) \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X) \cong C_0(X^{\mathrm{KS}})$ に自然な S の作用が入るが、例 4.3 から誘導される X^{KS} への S の作用は次のようにして具体的に表せる。

定理 5.2. (S.) 各 $e \in E(S)$ に対して $X_e^{\mathrm{KS}} = \{\tau \in X^{\mathrm{KS}} \mid \tau(e) \neq \infty_e\}$ とすると、これは X^{KS} の開集合である。各 $s \in S$ に対して写像 $\theta_s^{\mathrm{KS}} \colon X_{s^*s}^{\mathrm{KS}} \to X_{ss^*}^{\mathrm{KS}}$ を

$$\theta_s^{\mathrm{KS}}(\tau)(e) = \begin{cases} \theta_{es}(\tau(s^*es)) & \text{if } \tau(s^*es) \neq \infty_{s^*es} \\ \infty_e & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると、これは well-defined な同相写像である。これらの対応により S は X^{KS} に作用する。

注意 5.3. X の各元 $x \in X$ に対して、$\tau_x \in \prod_{e \in E(S)} \widetilde{X_e}$ を、$x \in X_e$ なら $\tau_x(e) = x$ とし $x \notin X_e$ なら $\tau_x(e) = \infty_e$ とする。すると、$\tau_x \in X^{\mathrm{KS}}$ であり、$\iota_X \colon X \ni x \mapsto \tau_x \in X^{\mathrm{KS}}$ は S 同変な像への同相写像になる。特に、X^{KS} への S の作用は、X への作用を拡張する形になっている。

このようにして、KS 接合積 $S \overset{\mathrm{KS}}{\ltimes} C_0(X)$ を実現する変換亜群 $S \ltimes X^{\mathrm{KS}}$(これを KS 亜群と呼ぶことにする) が計算できた訳であるが、この KS 亜群の構成は、逆半群 S に対する普遍亜群 $S \ltimes \widehat{E(S)}$ の構成を、逆半群作用へと一般化するものである。

観察 5.4. もし X が一点空間であり、そこに逆半群 S からの恒等作用を考えた場合、上の構成 X^{KS} は例 2.9 の $\widehat{E(S)}$ と自然に同相である。さらにこの同相のもとで、上の定理から X^{KS} に入る S 作用と例 2.9 で説明した $\widehat{E(S)}$ への S 作用は一致する。よって特に、$S \ltimes X^{\mathrm{KS}} \cong S \ltimes \widehat{E(S)}$ である。

逆半群に付随する普遍亜群に対しては、その普遍性がよく調べられている (例えば、[Pat99, Ste10, ES17] などを参照)。ここで構成した、逆半群作用に付随する KS 亜群は、次のような普遍性を持つ。

定理 5.5. (S.) θ, σ を逆半群 S の局所コンパクト Hausdorff 空間 X, Y への作用とし、$f \colon Y \to X$ を S 同変な写像とする。このとき $f^{\mathrm{KS}} \colon Y^{\mathrm{KS}} \to X^{\mathrm{KS}}$ を $f^{\mathrm{KS}}(\tau)(e) = \widetilde{f|_{Y_e}}(\tau(e))$ で定めると、これは well-defined かつ S 同変な写像である。さらに、合成 $\rho := f^{\mathrm{KS}} \circ \iota_Y$ は $\mathbf{d}$-bijective[*6]な亜群準同型 $\tilde{\rho} \colon S \ltimes Y \to S \ltimes X^{\mathrm{KS}}$ を誘導する。この写像について、次が成り立つ。

- f が連続で各 Y_e が閉ならば、$\tilde{\rho}$ は連続である。
- f が Borel で、S が可算かつ X が第 2 可算ならば、$\tilde{\rho}$ は Borel である。

逆半群の性質が、付随する普遍亜群 $S \ltimes \widehat{E(S)}$ にどう影響するのかという問題は、逆半群論における主要なテーマの一つである。一例として、逆半群に付随する普遍亜群の Hausdorff 性に関しては、Steinberg が特徴づけを行なった ([Ste10])。次の定理は、その KS 亜群への部分的な一般化である。

定理 5.6. (S.) θ を逆半群 S の局所コンパクト Hausdorff 空間 X への作用で、各 $e \in E(S)$ に対して X_e が X でコンパクトになるようなものとする。このとき $S \ltimes X^{\mathrm{KS}}$ が Hausdorff になるための必要十分条件は、$\{s \in S \mid X_{s^*s} \neq \emptyset\}$ が S の自然な順序に関して弱半束[*7]になることである。

[*6] $\mathbf{d}$-bijective な亜群準同型 $f \colon H \to G$ が与えられると、G の性質が H に遺伝することがあり、その意味でこの概念は重要である。例えば、f が $\mathbf{d}$-bijective かつ Borel な亜群準同型なら、G の従順性は H の従順性を導く ([ES17])。

[*7] 順序集合 $(P, \leq)$ が弱半束であるとは、任意の $a, b \in P$ に対して有限集合 $F \subset \{a\}^{\downarrow} \cap \{b\}^{\downarrow}$ が存在して、$\{a\}^{\downarrow} \cap \{b\}^{\downarrow} \subset F^{\downarrow}$ を満たすことである。ここで部分集合 $H \subset P$ に対して、$H^{\downarrow} = \{d \in P \mid \exists c \in H \ d \leq c\}$ である。

注意 5.7. 一般の逆半群作用に付随する KS 亜群の Hausdorff 性に対しては、弱半束に関する上の条件は必要条件でも十分条件でもなく、特徴づけを探すのは難しそうである。

本稿では紙面の都合上、普遍性により抽象的に定義された C*環のみ扱ったが、具体的な表現から作られる被約亜群 C*環 $C_r^*(G)$ と被約 (KS) 接合積 $S \ltimes_r A$ ($S \overset{\mathrm{KS}}{\underset{r}{\ltimes}} A$) も重要である[*8]。可換な C*環の被約接合積に関しても、命題 4.9 の類似 $S \ltimes_r C_0(X) \cong C_r^*(S \ltimes X)$ が知られている ([BE12])。

すると、KS 接合積 $S \overset{\mathrm{KS}}{\underset{r}{\ltimes}} C_0(X)$ についても気になるのだが、著者は次の同型を得た。

定理 5.8. (S.)

$$S \overset{\mathrm{KS}}{\underset{r}{\ltimes}} C_0(X) \cong C_r^*(S \ltimes X^{\mathrm{KS}})$$

系 4.11 とこの同型は、逆半群・亜群・C*環の深い関係を示す Paterson の定理

$$C^*(S) \cong C^*(S \ltimes \widehat{E(S)}), \quad C_r^*(S) \cong C_r^*(S \ltimes \widehat{E(S)})$$

の、逆半群作用への一般化を与えている。

参考文献

[BE12] Alcides Buss and Ruy Exel, *Fell bundles over inverse semigroups and twisted étale groupoids*, J. Operator Theory **67** (2012), no. 1, 153–205.

[BM17] Alcides Buss and Ralf Meyer, *Inverse semigroup actions on groupoids*, Rocky Mountain J. Math. **47** (2017), no. 1, 53–159.

[ES17] Ruy Exel and Charles Starling, *Amenable actions of inverse semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **37** (2017), no. 2, 481–489.

[Exe08] Ruy Exel, *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **39** (2008), no. 2, 191–313.

[KS04] Mahmood Khoshkam and Georges Skandalis, *Crossed products of C^*-algebras by groupoids and inverse semigroups*, J. Operator Theory **51** (2004), no. 2, 255–279.

[Law98] Mark V. Lawson, *Inverse semigroups*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998, The theory of partial symmetries.

[Pat99] Alan L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 170, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[Sie97] Nándor Sieben, *C^*-Crossed Products by Partial Actions and Actions of Inverse Semigroups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **63** (1997), no. 1, 32–46.

[Ste10] Benjamin Steinberg, *A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras*, Adv. Math. **223** (2010), no. 2, 689–727. MR 2565546

[*8] 例えば、*代数 A とその普遍包絡 C*環 B_A に対して、A から B_A への自然な*準同型が単射かどうかが気になる。これには、具体的な A の忠実表現を見つけることが必要十分であり (注意 1.11)、左正則表現と呼ばれる自然な忠実表現から作られる C*環が上の被約版の C*環である。