半空間における Stokes 方程式のレゾルベント問題と
その近似解表示に対する数学的解析

お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科　理学専攻　数学コース
櫻井 奏音 (Kanon SAKURAI) *

概要

本研究の対象は，半空間において連続の式 $\nabla \cdot u = 0$ の近似 $\nabla \cdot u = \varepsilon\Delta p - \varepsilon\nabla \cdot f$ を導入した Stokes 方程式のレゾルベント問題である．既存手法に基づいて近似問題の解表示を行い，従来と同様の評価の成立を検証することを目的とする．レゾルベント解析に基づく線形理論の拡張や近似モデルを用いた数値解析や境界層問題への応用につながると期待される．

1　導入

本講演は，久保隆徹先生（お茶の水女子大学）との共同研究に基づく．

穏やかな流体の運動を記述する Stokes 方程式は流体力学および数理流体力学における基本的な方程式である．特に Stokes 方程式の解の性質を理解するためにはそのレゾルベント問題の解析が不可欠である．Stokes レゾルベント問題に対する解の評価は，Navier-Stokes 方程式の時間発展問題における解の存在・一意性，および正則性の議論の基礎を成し，重要な役割を果たしている．

半空間 $\mathbb{R}^n_+$ における Stokes レゾルベント問題において，柴田・久保 [1] ではフーリエ解析を用いた解表示の導出と解の L_q 評価が成り立つことを示している．空間変数 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，時間変数 $t > 0$ とした半空間 $\mathbb{R}^n_+$ における Stokes レゾルベント問題は，未知関数として流体の速度場 $u = u(x,t)$，圧力 $p = p(x,t)$，定数として粘性係数 $\nu > 0$，既知関数として外力 $f = f(x,t)$，境界値 $g = g(x,t)$ を与えると以下のように表せる．

Stokes 方程式の一般化されたレゾルベント問題

$$\begin{cases} \text{運動方程式：} & \lambda u - \nu\Delta u + \nabla p = f \ (x \in \mathbb{R}^n_+), \\ \text{連続の式：} & \nabla \cdot u = 0 \ (x \in \mathbb{R}^n_+), \\ \text{境界条件：} & u|_{x_n=0} = g|_{x_n=0} \end{cases}$$

レゾルベントパラメータ $\lambda \in \mathbb{C}$ の領域 Σ_{σ,γ_0} は，$\sigma \in (0, \pi/2)$，$\gamma_0 > 0$ を定数とし，以下のように定義している．

$$\Sigma_{\sigma,\gamma_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg\lambda| < \pi - \sigma,\ |\lambda| \geq \gamma_0\}.$$

* E-mail:g2440607@edu.cc.ocha.ac.jp

負の実軸近傍を除外し，λ が $-\nu|\xi|^2$ を取らないように設定している．
柴田・久保 [1] では，上記の問題が一意解をもち，さらに以下の定理を満たすことが示されている．

定理 1.1. $1 < q < \infty, 0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ とする．このとき，任意の $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid |\arg\lambda| < \pi - \sigma\}$, $f \in L_q(\mathbb{R}^n_+)$, $g = (g_1, \cdots, g_{n-1}, 0) \in W^2_q(\mathbb{R}^n_+)$ に対し，一般化されたレゾルベント問題は以下の一意解をもつ．

$$u(x) \in W^2_q(\mathbb{R}^n_+), \quad p \in \widehat{W}^1_q(\mathbb{R}^n_+)$$

ただし $\widehat{W}^1_q(\mathbb{R}^n_+)$ は以下のようにおいた．

$$\widehat{W}^1_q(\mathbb{R}^n_+) = \{p \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+) \mid \nabla p \in L_q(\mathbb{R}^n_+)\}$$

このとき，n, q, σ に依存する定数 C が存在し，次のレゾルベント評価が成り立つ：

$$\left\|\left(|\lambda|\,u, |\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\nabla u, \nabla^2 u, \nabla p\right)\right\|_{L_q} \leq C \left\|\left(f, |\lambda|\,g, |\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\nabla g, \nabla^2 g\right)\right\|_{L_q}$$

一方で，このような Stokes 方程式に基づく流体現象の数値計算を行う際には，非圧縮条件 $\nabla \cdot u = 0$ を厳密に課すことが大きな計算負荷となる．この問題を回避するため，従来よりペナルティ法 $(\nabla \cdot u = -\varepsilon p)$ や圧力安定化法 $(\nabla \cdot u = \varepsilon \Delta p)$ などの近似手法が広く用いられてきた．近似手法については様々なアプローチが提案されており，基礎的な理論や数値解析については大塚・高石 [2]，Prohl [3] にまとめられている．しかし，これらの近似を導入した際の数学的な誤差評価，特に全空間 $\mathbb{R}^n$ や半空間 $\mathbb{R}^n_+$ といった非有界領域において，一般の L_q 空間 $(1 < q < \infty)$ の枠組みで解析された例は極めて限られている．

例えば，航空機の翼周辺の流体運動のように，境界の影響を無視できない現象を扱う場合には，半空間領域 $\mathbb{R}^n_+$ における精密な誤差評価が不可欠である．しかし，先行研究の多くは有界領域に限定されているか，あるいは $q = 2$ の Hilbert 空間における解析に留まっており，境界を伴う一般の L_q 空間 $(1 < q < \infty)$ でのフーリエ解析に基づく解構造や誤差挙動については十分に解明されていない．

そこで本研究では，新たな近似として $\nabla \cdot u = \varepsilon \Delta p - \varepsilon \nabla \cdot f$ を導入する．導出過程は以下である．

1. **両辺に発散 $\nabla\cdot$ をかける**
   - $\lambda u - \nu \Delta u + \nabla p = f$ の両辺に発散 $\nabla\cdot$ をかけると，
     $\lambda(\nabla \cdot u) - \nu\Delta(\nabla \cdot u) + \Delta p = \nabla \cdot f$
2. **$\nabla \cdot u = 0$ を代入**
   - 非圧縮条件である連続の式 $\nabla \cdot u = 0$ を上記の式に代入して $\Delta p = \nabla \cdot f$ が成立．
3. **新たな近似法 $\nabla \cdot u = \varepsilon \Delta p - \varepsilon \nabla \cdot f$ の生成**
   - $\Delta p - \nabla \cdot f = 0$ を連続の式 $\nabla \cdot u = 0$ に利用．
   - ε を使用して数値計算上での誤差を許容．

本研究の目的は，この近似条件の下で定式化される近似レゾルベント問題に対して，柴田・久保 [1] の手法を基礎として解表示を構成し，その解が Stokes レゾルベント問題と同様に解の L_q 評価を満

たすかを明らかにすることである．さらに，Stokes レゾルベント問題の解と近似レゾルベント問題の解の差を解析し，$\varepsilon \to 0$ の極限においてその差が適切な意味で 0 に収束することを示すことを最終的な目標とする．すなわち以下の命題を示すことである．

命題 1.2. 柴田・久保 [1] と同じ仮定をする．このとき，一般化された *Stokes* レゾルベント問題の解 (u,p) と新たに導入した近似レゾルベント問題の解 $(u^\star,p^\star)$ に対して，n,q,ε に依存しない定数 C が存在して以下が成り立つ．

$$\|u-u^\star\|_{L_q} \le Ch_1(\varepsilon)\|f\|_{L_q}, \quad \|p-p^\star\|_{L_q} \le Ch_2(\varepsilon)\|f\|_{L_q}$$

ただし，関数 $h_1(\varepsilon)$，$h_2(\varepsilon)$ は，$\varepsilon \to 0$ の時に 0 に収束する．

この命題を示すため，まずは近似レゾルベント問題の解表示が，Stokes レゾルベント問題の解と同じように柴田・久保 [1] のレゾルベント評価を満たすことを証明しなければならない．本論文では，誤差評価の理論的保証の前提である**近似レゾルベント問題の解表示が柴田・久保 [1] のレゾルベント評価の条件を満たすこと**の明示を目指す．

本研究の成果はレゾルベント解析に基づく線形理論の拡張に寄与するとともに，将来的にこの近似モデルを用いた数値解析や境界層問題への応用にもつながると期待される．

2　主定理

本研究の目標は，以下の近似レゾルベント問題において既存の Stokes レゾルベント問題が満たす評価と同様の L_q 評価が成立することを示すことである．

近似レゾルベント問題

$$\begin{cases} \text{運動方程式：} & \lambda u-\nu\Delta u+\nabla p=f \ (x\in\mathbb{R}^n_+), \\ \text{連続の式：} & \nabla\cdot u=\varepsilon\Delta p-\varepsilon\nabla\cdot f \ (x\in\mathbb{R}^n_+), \\ \text{境界条件：} & u_j|_{x_n=0}=g_j|_{x_n=0} \ (j=1,\ldots,n-1), \quad u_n|_{x_n=0}=0. \end{cases}$$

本研究では，フーリエ解析を用いて，近似レゾルベント問題に対する解の表示を求め，その解の表示を基に，近似レゾルベント問題の解が柴田・久保 [1] と同様の次の L_q 評価を証明することを目指す．

定理 2.1. 柴田・久保 [1] と同じ仮定をする．このとき，一般化されたレゾルベント問題の解 (u,p) に対して，n,q,σ に依存する定数 C が存在して，次のレゾルベント評価が成り立つ：

$$\left\|\left(|\lambda|\,u,|\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\nabla u,\nabla^2 u\right)\right\|_{L_q} \le C\left\|\left(f,|\lambda|\,g,|\lambda|^{\frac{1}{2}}\,\nabla g,\nabla^2 g\right)\right\|_{L_q}$$

証明は柴田・久保 [1] によって与えられた半空間における Stokes レゾルベント問題の解析手法に基づいて行う．まず，$x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ に関してフーリエ変換を施し，近似レゾルベント問題を x_n に関する常微分方程式系へと帰着させる．次に，得られた方程式系を解くことにより，近似レゾルベント問題の解表示を明示する．

半空間 $\mathbb{R}^n_+$ での Stokes レゾルベント問題の解表示の手順は以下である：

1. **全空間問題の導入**
   - f を全空間に拡張した F を用いて $\lambda U - \nu\Delta U + \nabla\Theta = F, \quad \nabla\cdot U = 0 \ (\text{in } \mathbb{R}^n)$ を計算.
   - フーリエ変換・逆変換により解表示 (U,Θ) を得る.
2. **補正方程式の導入**
   - 半空間の解 (u,p) と全空間の解 (U,Θ) の差を $v = u - U, \quad \theta = p - \Theta \ \left(\text{in } \mathbb{R}^n_+\right)$ とおき，補正方程式の解表示 (v,θ) を導く.

ステップ 1 の全空間問題に関して，Stokes レゾルベント問題においては，柴田・久保 [1] で導出している． $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in X$ に対しそのフーリエ変換・逆変換の定義は以下に示す.

定義 2.2. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, x\cdot\xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ とする．このとき，フーリエ変換・フーリエ逆変換は以下のように定義される.

$$\text{フーリエ変換：}\quad \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$
$$\text{フーリエ逆変換：}\quad \mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

これにより全空間問題の解 (U,Θ) は以下のように表示できる：

$$U_j = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}^{-1}\left[(\lambda+\nu r^2)^{-1} P_{j,k}(\xi)\,\mathcal{F}\left[F_k(\xi)\right]\right], \quad U_n|_{x_n=0} = 0,$$
$$\Theta = Q_{\mathbb{R}^n} F = -i\sum_{k=1}^n \mathcal{F}^{-1}\left[\xi_k\,|\xi|^{-2}\,\mathcal{F}\left[F_k(\xi)\right]\right].$$

ここで，$P_{j,k}$ は以下の Riesz 作用素に基づく.

定義 2.3 (Riesz 作用素)**.** Riesz 作用素 $R_j \ (j = 1,\ldots,n)$ は次式で定義される.

$$[R_j\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\xi_j\,|\xi|^{-1}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \mathcal{F}^{-1}\left[\xi_j\,|\xi|^{-1}\,\mathcal{F}[\varphi]\right](x). \tag{2.26}$$

$1 < p < \infty$ のとき，R_j は Fourier multiplier theorem により $L_q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素である.

R_j を上記のように定義すると，$v_j = u_j - \sum_{k=1}^n R_jR_ku_k = P_ju$ となることから，
$P_{\mathbb{R}^n}u := (P_1u,\ldots,P_nu), \quad Q_{\mathbb{R}^n}u := \theta$ とおくと，n, q にのみ依存する定数 C が存在して，
次の $\mathbb{R}^n$ 上の Helmholtz 分解が成立する：

$$u = P_{\mathbb{R}^n}u + \nabla Q_{\mathbb{R}^n}u, \quad \nabla\cdot u = 0, \quad \|P_{\mathbb{R}^n}u\|_{L_q} + \|\nabla Q_{\mathbb{R}^n}u\|_{L_q} \le C\,\|u\|_{L_q}.$$

ステップ 2 の補正方程式は $h_j = g_j - U_j$ と置くことによって，以下のように表せる.

$$\lambda v - \nu\Delta v + \nabla\Theta = 0, \quad \nabla\cdot v = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n_+),$$
$$v_j|_{x_n=0} = h_j|_{x_n=0}, \quad v_n|_{x_n=0} = 0.$$

フーリエ変換等を行って，以下の解表示を得る．

Stokes レゾルベント問題の解表示

$$
\begin{aligned}
v_j(x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}} - D_{y_n}\right)\widetilde{h}_j(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[r\widetilde{\xi}_j\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{h}_k(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n\right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[r\widetilde{\xi}_j\widetilde{\xi}_k\mathcal{M}(r, \omega_\lambda, x_n + y_n)\,(r - D_{y_n})\,\widetilde{h}_k(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n\right\}, \\
v_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[r\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{h}_k(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n\right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[r\widetilde{\xi}_k\mathcal{M}(r, \omega_\lambda, x_n + y_n)\,(r - D_{y_n})\,\widetilde{h}_k(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n\right\}, \\
\theta(x) &= -i\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[(r + \omega_\lambda)\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\,(r)\,(r - D_{y_n})\,\widetilde{h}_k(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n.
\end{aligned}
$$

ここで関数 $\mathcal{M}(r, \omega_\lambda, x_n)$ は以下のように定めている．

$$
\mathcal{M}(r, \omega_\lambda, x_n) = \frac{\sqrt{\nu}}{\omega_\lambda - \sqrt{\nu}r}\left(e^{-\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}x_n} - e^{-rx_n}\right).
$$

今回新たに導入した近似レゾルベント問題においても同様の手順で解表示を導出する．
手順は以下の通りである．

1. **全空間問題の導入**
   - f を全空間に拡張した F を用いて以下を計算．

     $$\lambda U^\star - \nu\Delta U^\star + \nabla\Theta^\star = F, \quad \nabla\cdot U^\star - \varepsilon\,\Delta\Theta^\star = -\,\varepsilon\,\nabla\cdot F \ \ (\mathrm{in}\ \mathbb{R}^n)$$

   - フーリエ変換により $(U^\star, \Theta^\star)$ の解表示を得る．
2. **補正方程式の導入**
   - Stokes レゾルベント問題の半空間における解 (u, p) と全空間の解 $(U^\star, \Theta^\star)$ の差を $v^\star = u - U^\star$, $\theta^\star = p - \Theta^\star$ として，補正方程式の解表示 $(v^\star, \theta^\star)$ を導く．

全空間問題の 2 つの式を x でフーリエ変換すると，

$$\left(\lambda + \nu\,|\xi|^2\right)\widehat{U^\star} + i\xi\,\widehat{\Theta^\star} = \widehat{F}, \tag{1}$$

$$i\xi\cdot\widehat{U^\star} + \varepsilon\,|\xi|^2\,\widehat{\Theta} = -\varepsilon i\xi\cdot\widehat{F} \tag{2}$$

式 (1) の両辺に $i\xi\cdot$ をかけると $\left(\lambda + \nu\,|\xi|^2\right)i\xi\cdot\widehat{U^\star} - |\xi|^2\,\widehat{\Theta^\star} = i\xi\cdot\widehat{F}$ となるので，以下のように計算できる．

$$\left\{\varepsilon\left(\lambda + \nu\,|\xi|^2\right) + 1\right\}\left(|\xi|^2\,\widehat{\Theta^\star} + i\xi\cdot\widehat{F}\right) = 0$$

$\left|\varepsilon\left(\lambda+\nu\,|\xi|^2\right)+1\right|>0$ より $|\xi|^2\,\widehat{\Theta^\star}+i\xi\cdot\widehat{F}=0$ であり，$\widehat{\Theta^\star}=-\frac{i}{|\xi|^2}\xi\cdot\widehat{F}$ なので，元の全空間問題の 2 つの式にこれを代入すると以下の解表示が得られる．これは Stokes レゾルベント問題と同様であった．

$$
\begin{aligned}
U_j^\star &= \sum_{k=1}^{n}\mathcal{F}^{-1}\left[(\lambda+\nu r^2)^{-1}P_{j,k}(\xi)\mathcal{F}\left[F_k(\xi)\right]\right], \quad U_n^\star|_{x_n=0}=0,\\
\Theta^\star &= Q_{\mathbb{R}^n}F=-i\sum_{k=1}^{n}\mathcal{F}^{-1}\left[\xi_k\,|\xi|^{-2}\,\mathcal{F}\left[F_k(\xi)\right]\right].
\end{aligned}
$$

ステップ 2 の補正方程式は $k_j=g_j-U_j^\star\ (j=1,\cdots,n)$ と置くことにより，以下のように示せる．

$$
\begin{aligned}
&\lambda v^\star-\nu\Delta v^\star+\nabla\theta=0 \quad ,\nabla\cdot v^\star-\varepsilon\Delta\theta=0\ \left(\mathrm{in}\ \mathbb{R}^n_+\right),\\
&v_j^\star|_{x_n=0}=k_j|_{x_n=0}, \quad v_n^\star|_{x_n=0}=-U_n^\star|_{x_n=0}, \quad \partial_{x_n}\theta^\star|_{x_n=0}=0.
\end{aligned}
$$

$x'=(x_1,\cdots x_{n-1})$ についてフーリエ変換を行い，連立方程式を解く．
変換後の解を $(\widetilde{v},\widetilde{\theta})$ とすると，$\widetilde{v}$ の基本解は $e^{-p(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}$，$e^{-rx_n}$，$e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}$，$\widetilde{\theta}$ の基本解は e^{-rx_n}，$e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}$ となるので，未知関数 α,β,γ,S,T を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\widetilde{v}_j &= \alpha_j e^{-p(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}+\beta_j e^{-rx_n}+\gamma_j e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n},\\
\widetilde{v}_n &= \alpha_n e^{-p(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}+\beta_n e^{-rx_n}+\gamma_n e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n},\\
\widetilde{\theta} &= Se^{-rx_n}+Te^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}
\end{aligned}
$$

これを上記の方程式に代入し，各係数を求め，逆フーリエ変換を行い，以下の解表示を得る．下記の解表示では，$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$ としている．

近似レゾルベント問題の解表示

$$
\begin{aligned}
v_j^\star(x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}-D_{y_n}\right)\widetilde{k}_j(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\\
&\quad-\sum_{k=1}^{n-1}\Bigg\{\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi_j}\widetilde{\xi_k}\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\\
&\quad+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi_j}\widetilde{\xi_k}\mathcal{M}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)\,(r-D_{y_n})\,\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\\
&\quad+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[n(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi_j}\widetilde{\xi_k}\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\\
&\quad+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[n(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi_j}\widetilde{\xi_k}\mathcal{N}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)(q(\varepsilon,\omega_\lambda)-D_{y_n})\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_n^\star(x) = -i\sum_{k=1}^{n-1}\Bigg\{ &\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n \\
&+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{M}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)\,(r-D_{y_n})\,\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n \\
&+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[n'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n \\
&+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[n'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{N}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)(q(\varepsilon,\omega_\lambda)-D_{y_n})\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\Bigg\}, \\
\theta^\star(x) = -i\sum_{k=1}^{n-1}\Bigg\{ &\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[\frac{r-q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{p(\varepsilon,\omega_\lambda)}\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}\,(r)\,(r-D_{y_n})\,\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n \\
&+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[\ell(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{E}(q(\varepsilon,\omega_\lambda))\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n \\
&+\int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[\ell(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda)r\widetilde{\xi}_k\mathcal{L}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)\,(r-D_{y_n})\,\widetilde{k}_k(\xi',y_n)\right](x')\,dy_n\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

関数 $\mathcal{M}(r,\omega_\lambda,x_n)$ は Stokes レゾルベント問題の解表示に用いたものと同義である．そのほか新たに定めた関数は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
q(\varepsilon,\omega_\lambda) &= \sqrt{\frac{\varepsilon{\omega_\lambda}^2+1}{\varepsilon\nu}}, \\
p(\varepsilon,\omega_\lambda) &= \varepsilon r^2 + \left(\frac{r}{\lambda}-\frac{\omega_\lambda}{\lambda\sqrt{\nu}}-\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\varepsilon\right)q(\varepsilon,\omega_\lambda), \\
\mathcal{E}(q(\varepsilon,\omega_\lambda)) &= e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}, \\
\mathcal{E}(r) &= e^{-rx_n}, \\
\mathcal{N}(r,\omega_\lambda,x_n) &= \frac{\sqrt{\nu}}{\omega_\lambda-\sqrt{\nu}q(\varepsilon,\omega_\lambda)}\left(e^{-\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}x_n}-e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}\right), \\
\mathcal{L}(r,\omega_\lambda,x_n) &= \frac{1}{q(\varepsilon,\omega_\lambda)-r}\left(e^{-q(\varepsilon,\omega_\lambda)x_n}-e^{-rx_n}\right), \\
m_2(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda) &= \frac{q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{\lambda p(\varepsilon,\omega_\lambda)}\frac{\omega_\lambda-\sqrt{\nu}r}{\sqrt{\nu}}, \\
n(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda) &= \frac{\varepsilon r}{p(\varepsilon,\omega_\lambda)}\frac{\omega_\lambda-\sqrt{\nu}q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{\sqrt{\nu}}, \\
m_2'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda) &= \frac{q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{\lambda p(\varepsilon,\omega_\lambda)}\frac{\omega_\lambda-\sqrt{\nu}r}{\sqrt{\nu}}, \\
n'(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda) &= \frac{\varepsilon q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{p(\varepsilon,\omega_\lambda)}\frac{\omega_\lambda-\sqrt{\nu}q(\varepsilon,\omega_\lambda)}{\sqrt{\nu}}, \\
\ell(\xi',\varepsilon,\omega_\lambda) &= \frac{q(\varepsilon,\omega_\lambda)-r}{p(\varepsilon,\omega_\lambda)}.
\end{aligned}
$$

該当の評価条件を満たすことを示すため，柴田・久保 [1] にある以下の補題を解表示の各項が適用できることを確認していく．

補題 2.4. $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$, $1 < q < \infty$, $\gamma_0 \geq 0$ とする．$m_i \in \mathbb{M}_i(\Sigma_{\sigma,\gamma_0})\,(i = 1,2)$, $\lambda = \gamma + i\tau \in \Sigma_{\sigma,\gamma_0}$ に対し，作用素 $K_1(\lambda, m_1), K_j(\lambda, m_2) \quad (j = 2,3,4,5)$ を次で定義する．

$$
\begin{aligned}
[K_1(\lambda, m_1)](x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_1(\lambda,\xi')|\lambda|^{1/2}\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widehat{g}(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n,\\
[K_2(\lambda, m_2)](x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\lambda,\xi')r\mathcal{E}\left(\frac{\omega_\lambda}{\sqrt{\nu}}\right)\widehat{g}(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n,\\
[K_3(\lambda, m_2)](x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\lambda,\xi')r\mathcal{E}\left(r\right)\widehat{g}(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n,\\
[K_4(\lambda, m_2)](x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\lambda,\xi')r^2\mathcal{M}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)\widehat{g}(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n,\\
[K_5(\lambda, m_2)](x) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left[m_2(\lambda,\xi')|\lambda|^{1/2}r\mathcal{M}(r,\omega_\lambda,x_n+y_n)\widehat{g}(\xi', y_n)\right](x')\,dy_n.
\end{aligned}
$$

$\ell = 0,1$ に対して集合 $\{(\tau\partial_\tau)^\ell K_1(\lambda, m_1) \mid \lambda \in \Sigma_{\sigma,\gamma_0}\}$ と集合 $\{(\tau\partial_\tau)^\ell K_j(\lambda, m_2) \mid \lambda \in \Sigma_{\sigma,\gamma_0}\}(j = 2,3,4,5)$ は $\mathcal{R}$ 有界であり，n, q, σ, γ_0 に依存する定数 C_{n,q,σ,γ_0} が存在して次が成立する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\{(\tau\partial_\tau)^\ell K_1(\lambda, m_1) \mid \lambda \in \Sigma_{\sigma,\gamma_0}\}\right) &\leq C_{n,q,\sigma,\gamma_0},\\
\mathcal{R}\left(\{(\tau\partial_\tau)^\ell K_j(\lambda, m_2) \mid \lambda \in \Sigma_{\sigma,\gamma_0}\}\right) &\leq C_{n,q,\sigma,\gamma_0}.
\end{aligned}
$$

これにより，各項に対応する積分作用素が L_q 空間上で有界に作用することが保証できる．上記の２つの解表示を比較すると，近似レゾルベント問題の解表示の第 1 項目は Stokes レゾルベント問題の解表示と同じ形であり，柴田・久保 [1] と同じようにレゾルベント評価を行うことができる．本研究では第 2 項目から評価条件を満たすことを示す.

これらの作用素評価を統合することで，近似レゾルベント問題の解が柴田・久保 [1] と同様の L_q 評価を満たすことを示し，近似レゾルベント問題においても，既存の Stokes レゾルベント問題と同程度の評価が成立することの結論づけを目指す.

参考文献

[1] Shibata, Y., Kubo, T.: 現代基礎数学 21 非線形偏微分方程式. 朝倉書店, Tokyo (2012)

[2] Otsuka, K., Takaishi, T.: 有限要素法で学ぶ現象と数理：FreeFem++ 数理思考プログラミング（シリーズ応用数理，第 4 巻，日本応用数理学会監修）. 共立出版, Tokyo (2014)

[3] Prohl, A.: Projection and Quasi-Compressibility Methods for Solving the Incompressible Navier–Stokes Equations. Springer, Berlin (1997)