Higher-dimensional Teter rings via the canonical trace ideal

東京科学大学大学院理学院数学系
尾崎太河 (Taiga Ozaki) *

概要

Canonical trace ideal を用いて、近年 Puthenpurakal によって高次元に拡張された Teter 環と呼ばれる環について研究を行った。まず初めに、環が Teter 環であるための十分条件を提示し、標準次数付き（standard graded）の場合には、その条件が必要条件でもあることを示し、特徴付けを与えた。その結果、いくつかの nearly Gorenstein 環の族が Teter 環であることが分かった。さらに、特定の仮定の下では、可換環のいくつかのクラスに対して Teter 環となる特徴付けが得られた。

1　導入

1.1　背景

本稿は大阪大学大学院の宮下空さんとの共著論文 [3] の内容に基づく。

Cohen–Macaulay 環 と Gorenstein 環は現代の可換環論において中心的な役割を果たしている。特に、Gorenstein 環は極めて対称性が高く、扱いやすい環として知られている。しかし、現実の多くの対象（多面体、グラフ、数値半群など）から生じる環は多くの場合 Gorenstein とは限らない。そのため、 Cohen–Macaulay ではあるが Gorenstein ではないようなクラスを対象とした研究においては、Gorenstein 性をどのように弱めるべきかというのが、様々なモチベーションから考えられている。このような背景から、現在では以下のような概念が定式化されている。

- **Nearly Gorenstein 環** ([2])
- **Almost Gorenstein 環** ([1])
- **level 環** ([5])

これらの他にも、1974 年には Teter [6] によって Gorenstein 環に近い性質を持つ環として 0 次元（Artin 局所環）に対して **Teter 環**が定義された。その後、2025 年には Puthenpurakal [4] によって Teter 環は高次元の局所環に対して一般化された。

また、局所環と次数付き環は多くの似通った性質を持つことが古典的な結果として知られている。本講演では、一般次元の次数付き環に対して新たに Teter 環を定義し、canonical trace ideal を通して、nearly Gorenstein 性や level 性との関係を紹介していく。

* E-mail:ozaki.t.9f40@m.isct.ac.jp

1.2 Teter 環

以降本稿では環と言えば単位付きの可換環であり、Gorenstein ではないとする。
この章では、これまでの Teter 環の変遷と、我々の新たな Teter 環の定義を紹介する。まず初めに、1974 年に Teter によって次のような形で Teter 環が定義された。

Definition 1.1 ([6])**.** $(R, \mathfrak{m})$ を Artin 局所環とし、ω_R をその標準加群とする。
$\varphi(\omega_R) = \mathfrak{m}$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, R)$ が存在するとき、R を **Teter 環**と呼ぶ。

Teter による定義は 0 次元の局所環に対してのみであったが、2025 年に Puthenpurakal によって Teter 環はより高次元の一般の局所環に対して次のように定式化された。

Definition 1.2 ([4])**.** $(R, \mathfrak{m})$ を Cohen–Macaulay 局所環とする。
Gorenstein 局所環 S と全射環準同型 $\varphi : S \to R$ が存在し、$e(R) - e(S) = 1$ を満たすとき、R を **Teter 環**と呼ぶ（ここで $e(R)$ は R の重複度を表す)。

Remark 1.3. R が Artin 局所環である場合、Puthenpurakal による定義は Teter による定義と等価であることが確認できる。

Teter と Puthenpurakal による定義は局所環に対してのものであった。一方で、局所環と次数付き環には多くの類似点が存在することが知られており、次数付き環に対しても Teter 性に対応する定義を与えることができると期待できる。
今回、我々は $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ を R_0 が体であるような non-Gorenstein な Cohen-Macaulay 次数付き環に対して次のように Teter 性を定義づけた。ここで、ω_R を R の次数付き正準加群、$\mathfrak{m} := \bigoplus_{i>0} R_i$ を R の次数付き極大イデアルとしたとき、次数付き環に対する Teter 性を次のように定める。

Definition 1.4 ([3])**.** 次数付き環 R が **Teter** であるとは、次のいずれかを満たす次数付き R-準同型 $\varphi : \omega_R \to R$ が存在することをいう：

1. $\varphi(\omega_R) = \mathfrak{m}$ となる。(これは $\dim(R) = 0$ のときにのみ起こる。)
2. または、φ が単射であり、$\mathrm{embdim}(R/\varphi(\omega_R)) \leqslant \dim(R)$ を満たす。

Remark 1.5. R が整域であれば次の 2 つの条件が同値となる。

1. R は我々の定義で Teter となる。
2. $R_\mathfrak{m}$ は Puthenpurakal の定義で Teter となる。

1.3 次数付き環に関する諸概念

この章では主結果等を理解するうえで必要になる次数付き環に関する概念を紹介する。本稿では、常に $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ を体 R_0 上の Cohen–Macaulay 次数付き環とし、$\mathfrak{m}$ をその極大次数付きイデアルとする。

Definition 1.6. 次数付き環 R に対して、

1. 環 R が $R_0[R_1]$ に一致するとき、R は**標準次数付き**（standard graded）であるという。
2. また、R が $R_0[R_1]$ 上の有限生成加群であるとき、R は**半標準次数付き**（semi-standard graded）であるという。

Example 1.7. 次数付き環の例には次のようなものがある。

1. 体上の n 変数多項式環 $k[x_1,\ldots,x_n]$ に対して、各変数の次数を $\deg(x_i)=1$ で定めたものや、それを斉次イデアルで剰余した環などは標準的次数付き環 (すなわち半標準的) となる。
2. 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ を最大公約数が 1 であるようにとり,
$$H=\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle=\{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n \mid 0\leqslant \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{Z}\}$$
とおく。H を $a_1,\ldots,a_n$ が生成する数値半群と呼ぶ。体 k 上の多項式環 $k[t]$ の部分 k-代数 $k[H]=k[t^h \mid h\in H]$ を H の k 上の数値半群環と呼ぶ。$\deg(t)=1$ とすることで $k[H]$ は次数付き環となるが半標準的にもならない典型例である。

次に、本稿で用いる主要な不変量等を定義する。

Definition 1.8. 次数付き標準加群 ω_R に対し、以下の各概念を導入する。

1. $r(R)$ を R の Cohen–Macaulay 型（Cohen–Macaulay type）とする。
2. a_R を R の a-不変量（a-invariant）とする。
3. $\mathrm{indeg}(\mathfrak{m}):=\min\{i\in\mathbb{Z}\mid [\mathfrak{m}]_i\neq 0\}$ および $\mathrm{codim}(R):=\mathrm{embdim}(R)-\dim(R)$ をそれぞれ定める。

これらの指標を用いることで、環の level 性を以下のように定義できる。

Definition 1.9 ([5])**.** $r_0(R):=\dim_{R_0}([\omega_R]_{-a_R})$ とおく。このとき、$r(R)=r_0(R)$ が成り立つとき、R は level であるという。特に、R が Gorenstein であるならば ω_R は 1 元のみで生成されることが知られているので R は level となる。

1.4　Canonical trace ideal と nearly Gorenstein 環

最後に、今回の議論で特に重要な Canonical trace ideal とそれを用いて定義される nearly Gorenstein 性について紹介する。R を Cohen–Macaulay 次数付き環とし、$\mathfrak{m}$ を次数付き極大イデアル、ω_R をその正準加群とする。

Definition 1.10. 次数付き環 R に対して、canonical trace ideal $\mathrm{tr}(\omega_R)$ を $\varphi\in\mathrm{Hom}_R(\omega_R,R)$ たちの像の和として定義する。つまり、
$$\mathrm{tr}(\omega_R)=\sum_{\varphi\in\mathrm{Hom}_R(\omega_R,R)}\varphi(\omega_R).$$
定義から、$\mathrm{tr}(\omega_R)$ は R のイデアルとなる。以下が示すように、$\mathrm{tr}(\omega_R)$ は「環 R が Gorenstein からどれだけ離れているか」を記述していると考えられる。

Proposition 1.11 ([2])**.** R の素イデアル全体の集合を Spec(R) とすると、次が正しい：

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}} \text{ は Gorenstein でない }\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{tr}(\omega_R) \subset \mathfrak{p}\}.$$

この Proposition を元に nearly Gorenstein 環が定義される。

Definition 1.12 ([2])**.** R が nearly Gorenstein であるとは、$\mathfrak{m} \subset \mathrm{tr}(\omega_R)$ となることである。
特に、R が Gorenstein であることと $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$ となることは同値である。

2　主定理

以下で主結果とそこから得られる新しい結果について述べる。まず初めに、次数付き環の Teter 性を canonical trace ideal を用いて特徴づけた。

Theorem 2.1. 以下の 4 つの条件を考える。

1. R は level であり、$r(R) \geqslant \mathrm{codim}(R)$ かつ $[\mathrm{tr}(\omega_R)]_{\mathrm{indeg}(\mathfrak{m})}$ が非零因子を含む。
2. $[\omega_R]_{-a_R}$ が ω_R のねじれのない元（torsion-free element）x を含み、$r_0(R) \geqslant \mathrm{codim}(R)$ かつ $[\mathrm{tr}(\omega_R)]_{\mathrm{indeg}(\mathfrak{m})}$ が非零因子を含む。
3. R は Teter かつ level な環であり、$r(R) = \mathrm{codim}(R)$ かつ $\dim(R) > 0$ である。
4. R は $\dim(R) > 0$ であるような Teter 環である。

このとき、(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) が成り立つ 。さらに、R が標準次数付きであれば、これらすべての条件は同値である。特に、上の条件のいずれか一つが成り立つならば、$r(R) = r_0(R) = \mathrm{codim}(R)$ となる。

Remark 2.2. ω_R の元 x が torsion-free element であるとはすべての $r \in R$ に対して $rx = 0$ であるならば $r = 0$ を満たすことをいう。

著者らは、この判定条件を用いて多くの具体的な環が Teter であることを証明した。

Corollary 2.3. R は標準的次数付きな nearly Gorenstein 環であるとする。このとき、以下の R が以下のいずれかの条件を満たせば、R は Teter となる。

1. R は次元正の level で、$r(R) = \mathrm{codim}(R)$;
2. R は $\mathrm{codim}(R) = 2, \dim(R) \leqslant 2$ の整域;
3. R は極小重複度を持つ (i.e. R の重複度と埋込次元が一致する);
4. R は Stanley–Reisner 環。

Example 2.4. もちろん標準的でないような半標準的次数付き環でも Teter となることはある。標準的次数付き Teter 環では $r(R) - r_0(R) = 0$ となるのに対し、半標準的まで許すと、任意の正整数 a に対して $r(R) - r_0(R) = a$ となるような Teter 環が存在する。
実際、

$$S = \left\langle \{(2i, 2a+2-2i) : 0 \leqslant i \leqslant a+1\} \cup \{(2j+1, 4a-2j+3) : 0 \leqslant j \leqslant a\} \right\rangle.$$

によって定まるアファイン半群環は上の条件を満たすことが分かる。

また、可換環論におけるファイバー積によって得られる環の Teter 性の特徴付けも与えた。

Corollary 2.5. A と B を 1 次元の Cohen–Macaulay 標準次数付き環とし、いずれも generically Gorenstein であると仮定する。また、A と B のうち少なくとも一方は正則ではないとする。このとき、次の条件は互いに同値である。

1. ファイバー積 $A \times_{R_0} B$ が Teter である;
2. A と B はともに極小重複度をもつ。

Remark 2.6. 2 つの環準同型 $\alpha : A \to C$ および $\beta : B \to C$ が与えられたとき、それらに関する A と B の**ファイバー積**（fiber product）とは、直積環 $A \times B$ の部分環として次のように定義される：

$$A \times_C B := \{(a,b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}.$$

特に、R_0 を体とし、A, B が R_0 上の次数付き環で、ともに $A_0 = B_0 = R_0$ を満たす場合、自然な全射 $\epsilon_A : A \to R_0$ および $\epsilon_B : B \to R_0$ に関するファイバー積 $A \times_{R_0} B$ を考える。

最後に標準的とは限らない環に対する Teter 性について紹介する。 1.7(2) でも触れたように、数値半群環は一般に標準的とはならない次数付き環である。主張の理解のため数値半群に関する基礎事項を確認する。

Remark 2.7.

- H を数値的半群とすると、$a_1 < \cdots < a_n$ であって $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ となる極小生成系を取ることができる。
  (したがって H の生成元 a_i と言ったら上のものを指すこととする)
- $k[H] = k[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}] \subseteq k[t]$ を数値的半群環と呼ぶ。
- $PF(H) = \{z \in \mathbb{Z} \setminus H \mid z + h \in H (0 < \forall h \in H)\}$ は擬 Frobenius 数と呼ばれる数の集合であり、正準加群 $\omega_{k[H]}$ の生成元に対応する：

$$\omega_{k[H]} = \sum_{\alpha \in PF(H)} R_H t^{-\alpha}$$

- $k[H]$ の Cohen–Macaulay 型は擬 Frobenius 数の個数 $\mathrm{type}(H) = \#(PF(H))$ に一致する。

我々は一般の数値半群環 $k[H]$ の Teter 性を数値半群の言葉で特徴付けた。

Proposition 2.8. 数値半群 $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ に対して、数値的半群環 $k[H]$ が Teter であることは、以下の条件と同値である：

1. $\mathrm{type}(H) = n - 1$ である。
2. $PF(H) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ としたとき、ある整数 $N \in [n] := \{1, \ldots, n\}$ が存在して、すべての $j \in [n]$ に対して以下の等式が成り立つ：

$$\alpha_{n-1} + a_1 + \delta = \begin{cases} a_j + \alpha_{n-j} & (j < N) \\ a_j + \alpha_{n+1-j} & (j > N) \end{cases}$$

ここで $F(H)$ は最大の擬 Frobenius 数（Frobenius 数）であり、

$$\delta = \begin{cases} a_2 - a_1 & (N = 1) \\ 0 & (N \neq 1) \end{cases}$$

で与えられる。

この判定法から、数値半群環に対しては Teter 性に関する詳細な計算ができる。almost Gorenstein 環について詳細は述べないが、次のような結果を得ることができる。

Corollary 2.9. $k[H]$ が極小重複度を持つと仮定する。このとき、以下の条件は同値である。

1. $[\mathrm{tr}(\omega_{k[H]})]_{a_1} \neq (0)$ である;
2. 数値的半群環 $k[H]$ は Almost Gorenstein 環である;
3. 数値的半群環 $k[H]$ は Teter であり、かつ上の命題の不変量 δ が 0 である。

Example 2.10. $r(k[H]) = 3$ となる数値半群環の Teter 性
次の数値半群から定まる数値半群は Teter である。

1. $\langle 4,9,10,11 \rangle$
2. $\langle 7,10,12,13 \rangle$
3. $\langle 7,11,15,19 \rangle$

次の数値半群から定まる数値半群は Teter でない。

1. $\langle 4,7,9,10 \rangle$
2. $\langle 8,9,11,15 \rangle$
3. $\langle 11,12,14,15 \rangle$

参考文献

[1] Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, and Tran Thi Phuong. Almost gorenstein rings. *Journal of Algebra*, 379:355–381, 2013.

[2] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate. The trace of the canonical module. *Israel Journal of Mathematics*, 233:133–165, 2019.

[3] Sora Miyashita and Taiga Ozaki. Higher-dimensional teter rings via the canonical trace. *arxiv 2512.06761*, 2025.

[4] Tony J. Puthenpurakal. Higher dimensional teter rings. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 22(194), 2025.

[5] Richard P Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2007.

[6] William Teter. Rings which are a factor of a gorenstein ring by its socle. *Inventiones mathematicae*, 23:153–162, 1974.