On quasi-strongly keen Heegaard splittings

奈良女子大学　大学院人間文化総合科学研究科　自然科学専攻
大家佳奈子 (Kanako OIE) *

概要

本稿では、Hempel 距離を実現する頂点の組が一意であり、さらにそれらを結ぶ測地線が有限本しか存在しないという性質をもつ quasi-strongly keen Heegaard splitting について紹介する。特に距離 2、種数 3 以上の場合には、すべての quasi-strongly keen Heegaard splitting が実際には strongly keen であり、対応する頂点の組を結ぶ測地線がただ 1 本だけ存在することを示す。

1　導入

Harvey [1] によって導入された curve complex $\mathcal{C}(S)$ は、低次元トポロジーにおいて基本的かつ中心的な役割を果たしており、特に 3 次元多様体の Heegaard splitting やその Goeritz group の研究において重要である。Heegaard splitting は、3 次元多様体を 2 つの handlebody に分解することによって記述する古典的かつ強力な手法である。このような分解の複雑さを測る指標として、Hempel は *Hempel distance* を導入した [2]。これは、Heegaard surface S 上の curve complex $\mathcal{C}(S)$ において、対応する 2 つの handlebody に付随する disk complex 間の距離として定義される。

Hempel distance の概念をさらに精緻化するために、Ido–Jang–Kobayashi は *keen Heegaard splitting* を導入した [3]。これは、Hempel distance を実現する disk complex 上の頂点の組が一意に定まるような Heegaard splitting を指す。さらに彼らは、その一意な頂点対を結ぶ測地線がただ 1 本しか存在しない場合を *strongly keen Heegaard splitting* と定義した。そして、strongly keen Heegaard splitting が実際に存在すること、ならびに keen ではあるが Hempel distance を実現する測地線が無限本存在するような Heegaard splitting も存在することを示した。

本稿では、これら 2 つの概念の中間に位置する新たな性質に注目する。すなわち、Hempel distance を実現する頂点の組は一意であるが、その頂点対を結ぶ測地線全体の集合が有限であるような Heegaard splitting を考える。このような Heegaard splitting を *quasi-strongly keen Heegaard splitting* と呼ぶことにする。この性質は、curve complex において有限本の測地線をもつ頂点対の性質と密接に関連しており、後述するように *type F* および *strongly type F* と呼ばれる概念によって記述される（定義は 小節 2.3 で与える）。

この用語を用いると、本稿の中心的な問いは次のように述べられる。

* E-mail:yak_oie@cc.nara-wu.ac.jp

問題：strongly keen ではないが quasi-strongly keen であるような Heegaard splitting は存在するか？

著者は以前の研究 [6] において、curve complex における距離 2 の頂点対の中に、*type F* ではあるが *strongly type F* ではないものが存在することを示した。さらに [5] においては、Matsuda、Shiga および著者により、[6] の結果を大幅に精緻化し、距離 2 の type F な頂点対を結ぶ測地線の本数に対する明示的な上界を与えるとともに、様々な有限本数を実現する具体的構成が与えられている。

これらの結果は、距離 2 の Heegaard splitting において、quasi-strongly keen であるが strongly keen ではない例が存在する可能性を示唆している。しかしながら本稿では、このような期待が、距離 2 かつ種数 3 以上の Heegaard splitting では成立しないことを示す。

2 準備

2.1 Curve complex

S を、種数 $g \geq 0$、境界成分数 $c \geq 0$ の向き付け可能曲面とする。本小節では、S に付随する curve complex の定義を復習する。

S における *simple closed curve* とは、S の内部に埋め込まれた閉かつ連結な 1 次元多様体をいう。simple closed curve α が S 内で disk を貼るか、あるいは ∂S の成分に平行であるとき、α は *inessential* であるという。そうでない場合、α は *essential* であるという。2 本の simple closed curve が *isotopic* であるとは、S の自己同相写像による ambient isotopy によって一方が他方に写されることをいう。

S が essential な simple closed curve を全く含まないとき、S は *simple* であるという。そうでない場合、S は *non-simple* であるという。また、互いに isotopic でない disjoint な essential simple closed curve の組を含まないとき、S は *sporadic* であるという。そうでない場合、S は *non-sporadic* であるという。

初等的に、S が sporadic かつ non-simple であるのは、S が高々 1 つの境界成分をもつトーラス、あるいは 4 点穴あき球面に同相である場合に限られる。

定義 2.1. S が non-sporadic であると仮定する。このとき、S に付随する *curve complex* $\mathcal{C}(S)$ を次のように定義する。その頂点は、S 上の essential simple closed curve の isotopy 類である。$k+1$ 個の互いに異なる頂点が、S 上で互いに交わらない代表元をもつとき、それらは k-simplex を張る。

$\mathcal{C}^0(S)$ を $\mathcal{C}(S)$ の 0-skeleton とする。本稿を通して、$\mathcal{C}^0(S)$ の頂点 ℓ に対し、その isotopy 類の代表元と ℓ とを同一視することがある。また、$\mathcal{C}(S)$ の頂点の集合 $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$ に対しては、$i \neq j$ である任意の i, j について、幾何学的交点数 $|\ell_i \cap \ell_j|$ が最小となるように代表元を取るものとする。

$\mathcal{C}(S)$ における 2 つの頂点 α, β の間の *distance* $d_S(\alpha, \beta)$ とは、それらを結ぶ simplicial path のうち、1-simplex の数が最小のものの長さとして定義される。$\mathcal{C}(S)$ における path $[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ が $n = d_S(\ell_0, \ell_n)$ を満たすとき、それを *geodesic* と呼ぶ。

2.2 有限個の geodesic をもつ $\mathcal{C}(S)$ の頂点対

S を non-sporadic な曲面とし、$\mathcal{C}(S)$ を前小節の定義により与えられた curve complex とする。

定義 2.2. curve complex $\mathcal{C}(S)$ の頂点対 (α, β) が α と β を結ぶ geodesic 全体の集合が有限であるとき、(α, β) は *type F* であるという。さらに、それらを結ぶ geodesic がただ 1 本しか存在しないとき、(α, β) は *strongly type F* であるという。

$\mathcal{C}^0(S)$ の頂点対 (ℓ_0, ℓ_2) が次の条件を満たすと仮定する：

- $d_S(\ell_0, \ell_2) = 2$,
- (ℓ_0, ℓ_2) は type F であるが strongly type F ではない.

すなわち、ℓ_0 と ℓ_2 を結ぶ距離 2 の geodesic が有限個（2 本以上）存在するとする。それらを

$$[\ell_0, \ell_1^{(i)}, \ell_2] \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と表す。

補題 2.3. 上の記法のもとで、任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対し、曲線 $\ell_1^{(i)}$ と $\ell_1^{(j)}$ は互いに交わらない。すなわち,

$$\ell_1^{(i)} \cap \ell_1^{(j)} = \emptyset$$

が成り立つ。

2.3 Heegaard splitting

本小節では、Heegaard splitting の概念を復習し、curve complex における geodesic と関連する諸概念を導入する。

handlebody とは、3-ball に有限個の 1-handle を付け加えたコンパクト 3 次元多様体である。M を閉向き付け可能 3 次元多様体とする。$M = V_1 \cup_S V_2$ が V_1, V_2 を handlebody とし，$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2 = S$ を満たすとき，これを M の *Heegaard splitting* という。S を *Heegaard surface* と呼び，その種数を Heegaard splitting の種数という。

handlebody V に対し, *disk complex* $\mathcal{D}(V)$ とは, ∂V 上の essential simple closed curve であって V 内に properly embedded な disk を張るものの isotopy 類からなる $\mathcal{C}(\partial V)$ の full subcomplex である。$k+1$ 個のそのような頂点が互いに交わらない代表元をもつとき, それらは $\mathcal{D}(V)$ の k-simplex を張る。

定義 2.4 (Hempel [2])**.** 閉向き付け可能 3 次元多様体の Heegaard splitting $V_1 \cup_S V_2$ に対し，その *Hempel distance* を

$$d(V_1 \cup_S V_2) := d_S(\mathcal{D}(V_1), \mathcal{D}(V_2)) = \min\{d_S(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathcal{D}(V_1),\ \beta \in \mathcal{D}(V_2)\}$$

で定義する。

定義 2.5. Heegaard splitting $V_1 \cup_S V_2$ が Hempel distance を実現する頂点対 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}(V_1) \times \mathcal{D}(V_2)$ をただ一つもつとき，この分解を *keen* であるという。

keen Heegaard splitting であっても，対応する頂点対を結ぶ geodesic が一意であるとは限らないことに注意する。

定義 2.6. keen Heegaard splitting $V_1 \cup_S V_2$ に対し，Hempel distance を実現する一意な頂点対が $\mathcal{C}(S)$ において type F であるとき，この分解を *quasi-strongly keen* であるという。さらにその頂点対が strongly type F であるとき，この分解を *strongly keen* であるという。

3 主定理

本稿の主結果は以下の定理である。

定理 3.1. 種数 $g \geq 3$ の *Heegaard splitting* であって、*Hempel distance* が 2 であり、かつ *quasi-strongly keen* であるものは、必ず *strongly keen* である。

注意 3.2. 定理 3.1 は低種数の場合には成立しない。例えば $g = 1$ の場合、レンズ空間 $L(5, 2)$ の種数 1 Heegaard splitting では、disk complex 間を結ぶ測地線がちょうど 2 本存在する。これは、トーラスの曲線複体が Farey graph であることによる（詳細は [4, Appendix B] を参照)。

また $g = 2$ の場合には、任意の Heegaard splitting が keen ではないことが知られている（[3, Remark 3.2] を参照)。したがって、定理 3.1 における仮定 $g \geq 3$ は本質的である。

参考文献

[1] W. J. Harvey, *Boundary structure of the modular group*, In: Riemann Surfaces and Related Topics, Ann. of Math. Stud. **97**, Princeton Univ. Press (1981), 245–251.

[2] J. Hempel, *3-manifolds as viewed from the curve complex*, Topology **40** (2001), no. 3, 631–657.

[3] A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, *On keen Heegaard splittings*, Advanced Studies in Pure Mathematics 78, Singularities in Generic Geometry (2018), 293–311.

[4] A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, *On keen bridge splittings of links*, Topology and its Applications 371 (2025), 109355.

[5] R. Matsuda, K. Oie and H. Shiga, *On the spectrum of the number of geodesics in the curve complex*, preprint, https://arxiv.org/abs/2505.01801.

[6] K. Oie, *On finiteness of the geodesics joining a pair of points in curve complexes*, JP J. Geom. Topol. **30** (2024), 69–82.