3 次元射影空間の一点ブローアップの導来圏の
強例外生成系に対応するラグランジュ切断の構成

東京都立大学　理学研究科　数理科学専攻
中川幹太 (Kanta NAKAGAWA) *

概要

Kontsevich によりホモロジカルミラー対称性（以降 HMS と略す）予想と呼ばれる予想が提唱されている [1]．二木・梶浦は [2] でモースホモトピーの圏を介することで，射影空間とその直積に対して HMS 予想に近い形の主張を示した．その手法では，射影空間の導来圏の強例外生成系とモースホモトピーの圏の対象 (ラグランジュ切断) を対応させることで，主張が示される．本稿では，$\mathbf{CP}^3$ の 1 点ブローアップの導来圏の強例外生成系に対応するラグランジュ切断を具体的に構成した．

1　導入

ミラー対称性は素粒子論に由来するが，数学的な定式化として，Kontsevich によりホモロジカルミラー対称性（以降 HMS と略す）予想と呼ばれる予想が提唱されている [1]．シンプレクティック多様体 X に対し，ラグランジュ部分多様体を対象とする圏である深谷圏 $\mathrm{Fuk}(X)$ が対応する．このとき X のミラー対と呼ばれる複素多様体 $\check{X}$ の連接層の導来圏 $D^b(\mathrm{Coh}(\check{X}))$ と $\mathrm{Fuk}(X)$ の三角化 $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fuk}(X))$ が圏同値であろうというのが HMS 予想の主張である．

二木–梶浦は [2] で射影空間とその直積に対して，HMS 予想に近い形の主張に証明を与えた．大まかには次の手順である．$X = \mathbf{CP}^n$ とする．

1. $\check{M}$ を X のトーリック因子の補空間，$\check{\pi} : \check{M} \to B \subset \mathbf{R}^n$ をモーメント写像とする．このとき $\check{M} \cong T^*B/\mathbf{Z}^n$ が成り立ち，$M \coloneqq TB/\mathbf{Z}^n$，$\pi : M \to B$ を自然な全射として双対トーラス束を構成する．(SYZ 構成)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\pi"'] & & \check{M} \arrow[dl, "\check{\pi}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

2. $\check{M}$ 上の正則直線束に対して，$\pi : M \to B$ のラグランジュ切断への対応を作る．(SYZ 変換)

* E-mail:24843425@ed.tmu.ac.jp

3. 次の圏と関手を構成する.

$$DG(X) : X \text{ 上の正則直線束と，その接続を対象とする DG 圏}$$
$$\mathcal{V} : \check{M}\text{上の正則直線束と，その } U(1) \text{ 接続を対象とする DG 圏}$$
$$\mathcal{I} : DG(X) \to \mathcal{V} : \text{忠実関手}$$

4. $\mathcal{E}$ を $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ の正則直線束からなる強例外生成系，$DG_{\mathcal{E}}(X)$ を $\mathcal{E}$ からなる $DG(X)$ の充満部分圏，$\mathcal{V}' := \mathcal{I}(DG(X))$，$\mathcal{V}'_{\mathcal{E}} := \mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(X))$ とする．$P := \bar{B}$ を B の $\mathbf{R}^n$ での閉包とし，$\pi : M \to B$ のラグランジュ切断を対象とする圏モースホモトピーの圏 $\mathrm{Mo}(P)$ を考える．$\mathrm{Mo}_{\mathcal{E}}(P)$ を $\mathcal{E}$ に対応するラグランジュ切断からなる $\mathrm{Mo}(P)$ の充満部分圏とする．このとき A_∞ 擬同型 $\mathrm{Mo}_{\mathcal{E}}(P) \cong \mathcal{V}'_{\mathcal{E}} \cong DG_{\mathcal{E}}(X)$ を示す.
5. 4 で示した式に対して DG 圏の三角化 [7] を取り $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mo}_{\mathcal{E}}(P)) \cong D^b(\mathrm{Coh}(X))$ が示される.

以上の手順で証明される．また 5 で示したことは，正確には Kontsevich の意味でのホモロジカルミラー対称性の主張と異なる. 一方 [8] では $\mathrm{Mo}(B) \cong \mathrm{Fuk}(T^*B)$ であることが知られている．この圏同値の三角化を取れば，おおよそ $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fuk}(T^*B)) \cong D^b(\mathrm{Coh}(X)))$ が成り立つと言える．同様の手法でヒルツェブルフ曲面 [3]，トーリックファノ曲面 [4]，重み付き射影空間 [5] に対して HMS に近い形の主張が示されている.

本論文は，$\mathbf{CP}^3$ の 1 点ブローアップの導来圏の強例外生成系に対応するラグランジュ切断を具体的に構成する．主定理 Theorem 4.1. は 4 で示す A_∞ 擬同型の対象の間の構成に対応している．これは今まで示されていない多様体に対する構成である.

2　$\mathbf{CP}^3$ の 1 点ブローアップ

Definition 2.1.

$$Bl_1(\mathbf{CP}^3) := \{([s_0 : s_1 : s_2 : s_3], [t_0 : t_1 : t_2]) \in \mathbf{CP}^3 \times \mathbf{CP}^2 \mid s_i t_j = s_j t_i \ (0 \le i < j \le 2)\}$$

を，$\mathbf{CP}^3$ の一点ブローアップという．ここでブローアップした点は，$[0:0:0:1]$ である.

$\mathbf{CP}^n$ に対して

$$[r_0 : \ldots : r_n] : \mathbf{CP}^n \text{の同次座標}$$
$$v_i := \frac{r_i}{r_0}, \ (v_1, \ldots, v_n) : \mathbf{CP}^n \text{の非同次座標}$$

とおく．$\mathbf{CP}^3$，$\mathbf{CP}^2$ はケーラー形式

$$\omega_{\mathbf{CP}^3} := -2\sqrt{-1}d\left(\frac{\sum_{i=1}^3 \bar{v}_i dv_i}{1 + \sum_{j=1}^3 |v_j|^2}\right), \ \omega_{\mathbf{CP}^2} := -2\sqrt{-1}d\left(\frac{\sum_{i=1}^2 \bar{v}_i dv_i}{1 + \sum_{j=1}^2 |v_j|^2}\right)$$

を持つ．このとき

$$i : Bl_1(\mathbf{CP}^3) \hookrightarrow \mathbf{CP}^3 \times \mathbf{CP}^2$$
$$pr_1 : \mathbf{CP}^3 \times \mathbf{CP}^2 \to \mathbf{CP}^3 \ , \ pr_2 : \mathbf{CP}^3 \times \mathbf{CP}^2 \to \mathbf{CP}^2$$

とすると，

$$\check{\omega} := (pr_1 \circ i)^*(\omega_{\mathbf{CP}^3}) + (pr_2 \circ i)^*(\omega_{\mathbf{CP}^2})$$

は，$Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ のケーラー形式となる．

また $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ には

$$\begin{aligned} &Bl_1(\mathbf{CP}^3) \times T^3 \to Bl_1(\mathbf{CP}^3) \\ &;(([\boldsymbol{s}],[\boldsymbol{t}]),(a_1,a_2,a_3)) \mapsto (([s_0 : a_1 s_1 : a_2 s_2 : a_3 s_3],[t_0 : a_1 t_1 : a_2 t_2])) \end{aligned}$$

としてトーラス作用が定まる．したがってモーメント写像

$$\begin{aligned} &\mu : Bl_1(\mathbf{CP}^3) \to (\mathfrak{t}^3)^* \cong \mathbf{R}^3 \\ &;([\boldsymbol{s}],[\boldsymbol{t}]) \mapsto \left(\frac{2|s_1|^2}{\sum_{j=0}^3 |s_j|^2} + \frac{2|t_1|^2}{\sum_{j=0}^2 |t_j|^2}, \frac{2|s_2|^2}{\sum_{j=0}^3 |s_j|^2} + \frac{2|t_2|^2}{\sum_{j=0}^2 |t_j|^2}, \frac{2|s_3|^2}{\sum_{j=0}^3 |s_j|^2} \right) \end{aligned}$$

を得る．

$\check{M}$ をトーリック因子の補空間，$P := \mu(Bl_1(\mathbf{CP}^3))$，$B := \mathrm{Int}(P)$ とする．このとき，$\check{M} \cong (\mathbf{C}^\times)^3 \cong T^*B/\mathbf{Z}^3$ より，$\mu|_{\check{M}} : \check{M} \to B$ はトーラス束になる．また $\check{M}$ は $u_i = \frac{s_i}{s_0} = e^{x_i + \sqrt{-1}y_i}$ としてアフィン構造を持つ．$f_i := |u_i|^2 = e^{2x_i}$ とおき，この座標でのケーラー計量と B の双対座標を求めると次の形になる．

$$\begin{aligned} \check{\omega} &= (pr_1 \circ i)^*(\omega_{\mathbf{CP}^3}) + (pr_2 \circ i)^*(\omega_{\mathbf{CP}^2}) \\ &= 4\frac{(1+f_2+f_3)f_1 dx_1 \wedge dy_1 - f_1 f_2 dx_1 \wedge dy_2 - f_1 f_3 dx_1 \wedge dy_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \\ &+ 4\frac{-f_1 f_2 dx_2 \wedge dy_1 + (1+f_1+f_3) f_2 dx_2 \wedge dy_2 - f_2 f_3 dx_2 \wedge dy_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \\ &+ 4\frac{-f_1 f_3 dx_3 \wedge dy_1 - f_2 f_3 dx_3 \wedge dy_2 + (1+f_1+f_2) f_3 dx_3 \wedge dy_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \\ &+ 4\frac{(1+f_2)f_1 dx_1 \wedge dy_1 - f_1 f_2 dx_1 \wedge dy_2 - f_1 f_2 dx_2 \wedge dy_1 + (1+f_1) f_2 dx_2 \wedge dy_2}{(1+\sum_{i=1}^2 f_i)^2} \end{aligned}$$

またこの表示から B 上の計量 (g^{ij}) が

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4(1+f_2+f_3)f_1}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} + \frac{4(1+f_2)f_1}{(1+\sum_{i=1}^2 f_i)^2} & -\frac{4f_1 f_2}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} - \frac{4f_1 f_2}{(1+\sum_{i=1}^2 f_i)^2} & -\frac{4f_1 f_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \\ -\frac{4f_1 f_2}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} - \frac{4(f_1 f_2}{(1+\sum_{i=1}^2 f_i)^2} & \frac{4(1+f_1+f_3)f_2}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} + \frac{4(1+f_1)f_2}{(1+\sum_{i=1}^2 f_i)^2} & -\frac{4f_2 f_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \\ -\frac{4f_1 f_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} & -\frac{4f_2 f_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} & \frac{4(1+f_1+f_2)f_3}{(1+\sum_{i=1}^3 f_i)^2} \end{pmatrix}$$

として与えられる．$\psi := \log(1+\sum_{i=1}^3 e^{2x_i}) + \log(1+\sum_{i=1}^2 e^{2x_i})$ とおくと, B の双対座標 (x^1, x^2, x^3) は

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &:= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \\ &= \left(\frac{2e^{2x_1}}{1+\sum_{i=1}^3 e^{2x_i}} + \frac{2e^{2x_1}}{1+\sum_{i=1}^2 e^{2x_i}}, \frac{2e^{2x_2}}{1+\sum_{i=1}^3 e^{2x_i}} + \frac{2e^{2x_2}}{1+\sum_{i=1}^2 e^{2x_i}}, \frac{2e^{2x_3}}{1+\sum_{i=1}^3 e^{2x_i}} \right) \\ &= \mu([1 : e^{x_1+\sqrt{-1}y_1} : e^{x_2+\sqrt{-1}y_2} : e^{x_3+\sqrt{-1}y_3}], [1 : e^{x_1+\sqrt{-1}y_1} : e^{x_2+\sqrt{-1}y_2}]) \end{aligned}$$

で与えられる．構成から，$M \coloneqq TB/\mathbf{Z}^3$，$\pi : M \to B$ を自然な全射とすると，$\pi : M \to B$，$\mu : \check{M} \to B$ は双対トーラス束である．

Definition 2.2. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の充満部分加法圏，$\Omega = \{\omega_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{D}$ の対象の集合，もしくは部分圏とする．

1. $\mathcal{C}$ が同型をとる操作で閉じているとき，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の狭義充満部分圏という．
2. $\mathcal{C}$ を含み，直和因子をとる操作で閉じている $\mathcal{D}$ の最小の狭義充満部分圏を，$\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における thick 閉包といい，$\mathrm{thick}_{\mathcal{D}}\,\mathcal{C}$，$\mathrm{thick}\,\mathcal{C}$ と表す．$\mathcal{C} = \mathrm{thick}\,\mathcal{C}$ が成り立つとき，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の thick 部分圏という．
3. Ω を含む $\mathcal{D}$ の最小の thick 部分三角圏を，$\langle\Omega\rangle$ や $\langle\omega_i \mid i \in I\rangle$ と表す．$\mathcal{D} = \langle\Omega\rangle$ が成り立つとき Ω は $\mathcal{D}$ を生成するという．

Definition 2.3. X を $\mathbf{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とする．

1. X 上の連接層 F が $\mathrm{Hom}(F,F) = \mathbf{C}$，$\mathrm{Ext}^i(F,F) = 0$ $(i > 0)$ を満たすとき，F は例外的であるという．
2. 順序付けられた X 上の連接層の列 $(F_0,\dots,F_n)$ が $\mathrm{Ext}^i(F_k,F_j) = 0$ $(i \geq 0, k > j)$ を満たすとき，$(F_0,\dots,F_n)$ を例外列という．
3. 例外列 $(F_0,\dots,F_n)$ が $\mathrm{Ext}^i(F_k,F_j) = 0$ $(i \geq 1, j \geq k)$ を満たすとき，$(F_0,\dots,F_n)$ を強例外列という．
4. 強例外列 $(F_0,\dots,F_n)$ が $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ を生成するとき，$(F_0,\dots,F_n)$ を強例外生成系という．

Lemma 2.4 ([6])**.** X を $\mathbf{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体，$\mathcal{E}$ を階数 r の X 上のベクトル束，$p : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ を自然な全射，$(F_0,\cdots,F_n)$ を X 上の局所自由層の強例外生成系，$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ を $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ 上のトートロジカル直線束とする．このとき

$$0 \leq \forall a \leq r-1\ ,\ 0 \leq \forall l \leq \forall m \leq n\ ,\ 0 < \forall i\ ,\ H^i(X, S^a\mathcal{E} \otimes F_m \otimes F_l^{\vee}) = 0$$

を満たすならば

$$(p^*F_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-r+1),\dots,p^*F_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-r+1),p^*F_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-r+2),\dots,p^*F_0,\dots,p^*F_n)$$

は $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ の強例外生成系となる．

ここで次のことに注意する．$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^2}(1)$ とする．$Bl_1(\mathbf{CP}^3) \cong \mathbf{P}_{\mathbf{CP}^2}(\mathcal{E})$ であり，また $(\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^2},\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^2}(1),\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^2}(2))$ は $\mathbf{CP}^2$ の強例外生成系であることが知られている．H を $\mathbf{CP}^3$ の超平面の狭義変換，E を $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ の例外因子とすると $\mathrm{Pic}(Bl_1(\mathbf{CP}^3)) = \mathbf{Z}H \oplus \mathbf{Z}E$ となる．したがって $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ の正則直線束は $\mathcal{O}_{Bl_1(\mathbf{CP}^3)}(aH+bE), (a,b \in \mathbf{Z})$ の形で表される．以降 $\mathcal{O}(a,b) \coloneqq \mathcal{O}_{Bl_1(\mathbf{CP}^3)}(aH+bE)$ と表す．Lemma 2.4. を用いれば次が従う．

Lemma 2.5.

$$(\mathcal{O}(0,-1),\mathcal{O}(1,-2),\mathcal{O}(2,-3),\mathcal{O}(0,0),\mathcal{O}(1,-1),\mathcal{O}(2,-2))$$

は $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ の強例外生成系．

3　ラグランジュ切断

Definition 3.1. (M, ω) をシンプレクティック多様体，$L \subset M$ を部分多様体とする．L が $\omega|_L = 0$ を満たすとき，L を M のラグランジュ部分多様体という．

以降 B，M は 2 章で定義したものとする．

Definition 3.2. 切断 $s : B \to M$ の像がラグランジュ部分多様体であるとき，s をラグランジュ切断という．

Lemma 3.3.

$$L(a,b) = 2\pi \begin{pmatrix} a\frac{f_1}{1+\sum_{j=1}^{3} f_j} + b\frac{f_1}{1+\sum_{j=1}^{2} f_j} \\ a\frac{f_2}{1+\sum_{j=1}^{3} f_j} + b\frac{f_2}{1+\sum_{j=1}^{2} f_j} \\ a\frac{f_3}{1+\sum_{j=1}^{3} f_j} \end{pmatrix}$$

は $\pi : M \to B$ のラグランジュ切断である．

4　主結果

Theorem 4.1. Lemma 3.5. の $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ の強例外生成系に対応するラグランジュ切断は

$$(L(0,-1), L(1,-2), L(2,-3), L(0,0), L(1,-1), L(2,-2))$$

である．

証明は SYZ 変換と呼ばれる方法で次のようにして為される．

- 正則直線束 $\mathcal{O}(a,b)$ は標準的に接続 $D_{(a,b)}$ が定まる．
- 接続形式 $A_{(a,b)}$ を用いて局所的に $D_{(a,b)} = d + A_{(a,b)}$ と表せる．
- ある関数 $\Psi_{(a,b)}$ を用いて，$A_{(a,b)}$ から dx_i の項を消す．
- 残った dy_i の項の係数関数が $L(a,b)$ となる．

Conjecture 4.2.

$$\mathrm{Mo}_{\mathcal{E}}(P) \cong DG_{\mathcal{E}}(Bl_1(\mathbf{CP}^3))$$

主定理の結果は，予想 1 の対象の間の構成に対応している．これは今まで示されていない多様体に対する構成である．射についても対応を構成し，予想 1 が示されれば

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{Mo}_{\mathcal{E}}(P)) &\cong \mathrm{Tr}(DG_{\mathcal{E}}(Bl_1(\mathbf{CP}^3))) \\ &\cong D^b(\mathrm{Coh}(Bl_1(\mathbf{CP}^3))) \end{aligned}$$

となり，二木・梶浦の意味での HMS 予想が $Bl_1(\mathbf{CP}^3)$ について解決する．

参考文献

[1] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), pp. 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[2] M. Futaki and H. Kajiura, Homological mirror symmetry of $\mathbb{C}P^n$ and their products via Morse homotopy, J. Math. Phys., Vol. 62, No. 3 (2021).

[3] H. Nakanishi, SYZ mirror of Hirzebruch surfaces $\mathbb{F}_k$ and Morse homotopy, J. Geom. Phys. 203 (2024).

[4] H. Nakanishi, Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy, J. Math. Phys. 65 (2024).

[5] A. Nishida, Homological mirror symmetry for weighted projective spaces and Morse homotopy, arXiv:2412.09018.

[6] L. Costa and R. M. Miró-Roig, Tilting sheaves on toric varieties, Math. Z. 248 (2004), no. 4, 849–865.

[7] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik 70 (1991), no. 1, 93–107.

[8] K. Fukaya and Y.-G. Oh, Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy, Asian J. Math. 1, 1997, no. 1, 96–180.