

Phase-field 型自己駆動体運動モデルの特異摂動解析

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
本橋樹 (Natsume MOTOHASHI) *

概要

物体が外部の物理・化学的性質を変化させることで、自発的な運動を持続的に行うことを自己駆動体運動と呼ぶ。我々は phase-field 法を応用した自己駆動体運動モデルに着目した。このモデルは液滴運動と固体運動を単一のモデルで再現できることが示唆されているが、数学解析は行われていなかった。本研究では非局所項を伴う反応拡散系に対する特異摂動法の適用方法を考察し、一次元定常パルス解の存在証明を行う。

1 はじめに

生物は外力を加えずとも持続的に運動を行うが、生物以外でもそのような運動を再現することは可能であり、自己駆動体運動と呼ばれている。例えば、アルコールの液滴を水面上に置くと、アルコールに共存する親水性と疎水性の構造から、界面活性剤の働きを示し、水面上の表面張力分布を変化させることができており、対称性の破れ（液滴自体の非対称性や、水面下の水の流れなど）が発生することによって、表面張力分布の不均一性から自発的な運動が継続して行われる。このような実験系は実際の生物の運動に比べて非常に単純であることから、数理的に運動の解析を行うことによって、工学的な応用のみならず、生物学的な知見の深化へと繋がることが期待されている。近年は細胞のように形状変化を伴いながら運動する系への興味が高まっており、それを再現するような実験系の開発や数理モデルの構築が盛んに行われている。その中でも、本研究ではアルコールの液滴運動に代表されるような、水面の表面張力の不均一性で自発的な運動が行われる液滴系に対して数理モデルを提案した論文 [1] に注目する。[1] は次の phase-field 型自己駆動体運動モデルを提案した：

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \tau u_t = \varepsilon^2 \sigma^2 u_{xx} + u(1-u)(u - \frac{1}{2} + \varepsilon \gamma(v) - \varepsilon S[u](t)), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v_t = v_{xx} - kv + u, \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 u は $0 \leq u < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$ のときに、それぞれ水面、自己駆動体を表す秩序変数であり、 v は水面上の界面活性剤分子濃度を表す変数である。 $0 < \varepsilon \ll 1$, $\tau > 0$, $\sigma > 0$, $k > 0$ であり、 $u_0(x)$, $v_0(x)$ は適当な初期関数である。また、関数 $\gamma(v)$ と $S[u](t)$ はそれぞれ水面上での表面張力を表す関

* E-mail:motohashi.natsume.b9@elms.hokudai.ac.jp

数, 自己駆動体の面積を時刻 $t > 0$ において保存させるための関数であり,

$$\begin{cases} \gamma(v) = \frac{1}{1 + (v/v_1)^m} + \gamma_0, \\ S[u](t) = \alpha \left(\int_{\mathbb{R}} G(u(x, t)) dx - S_0 \right), \\ S_0 = \int_{\mathbb{R}} G(u_0(x)) dx, \\ G(u) = u^2(3 - 2u) \end{cases}$$

で定義されている. [1] では $G(u) = u$ の場合を扱っていたが, $G(u) = u^2(3 - 2u)$ とすると, (1) の第一式を L^2 勾配流方程式として導出することが可能であることから, こちらを採用している. 実際, エネルギー汎関数 $E(u)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} E(u) := & \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\varepsilon\sigma^2}{2} u_x^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) dx \\ & + \frac{\alpha}{12} \left(\int_{\mathbb{R}} G(u(x, t)) dx - S_0 \right)^2 \\ & + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} (1 - G(u)) \gamma(x) dx. \end{aligned}$$

ここで, $W(u) = \frac{1}{4}u^2(1 - u)^2$ であり, 表面張力関数は $\gamma(x)$ と表されていることに注意されたい. このとき, $E(u)$ の第一変分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} E(u + \eta\psi) \Big|_{\eta=0} &= \int_{\mathbb{R}} - \left\{ \varepsilon\sigma^2 u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} u(1 - u)(u - \frac{1}{2} + \varepsilon\gamma(x) - \varepsilon S[u](t)) \right\} \psi dx \\ &=: \int_{\mathbb{R}} - \frac{\delta E}{\delta u} \psi dx \\ &\quad (\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

が成り立つので, $\varepsilon\tau u_t = \frac{\delta E}{\delta u}$ という方程式を定め, $\gamma(x)$ を $\gamma(v)$ に置き換えれば (1) の第一式を得る. また,

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon\tau \int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx \leq 0$$

が成り立つ.

2 対称な定常パルス解の存在について

(1) は安定な定数定常解 $(0, 0)$ を持つが, この定常解に局所的な摂動を与えることで, 図 1(a) のようなパルス解へと遷移する. 定常パルス解 $(u, v)(x; \varepsilon)$ は (2) 式を満たす.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \sigma^2 u_{xx} + u(1 - u)(u - \frac{1}{2} + \varepsilon\gamma(v) - \varepsilon\bar{u}(\varepsilon)) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ v_{xx} - kv + u = 0, \\ (u, v)(\pm\infty) = (0, 0). \end{cases} \quad (2)$$

ただし,

$$\bar{u}(\varepsilon) := \alpha \left(\int_{\mathbb{R}} G(u(x; \varepsilon)) dx - S_0 \right)$$

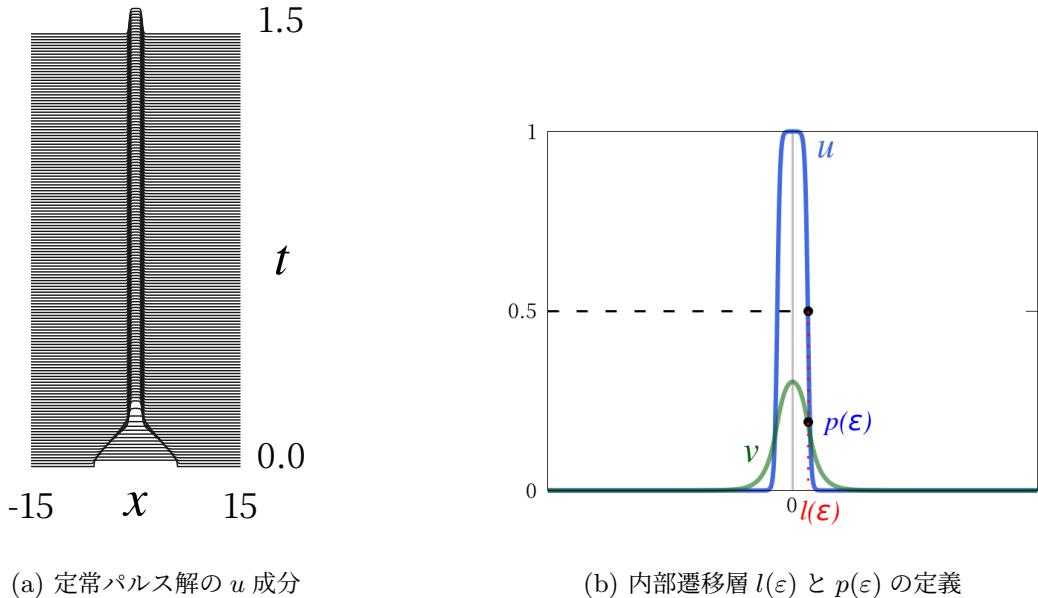


図 1: (1) 式を計算して得られた定常パルス解. パラメータは $\varepsilon = 0.12, \sigma = 0.5, \tau = 0.09, k = 2.5, \gamma_0 = 0.0, v_1 = 0.05, m = 2, \alpha = 1000.0, S_0 = 3.0$ である

である. なお, 定常パルス解 $(u, v)(x; \varepsilon)$ の対称性から, 半区間 $[0, \infty)$ に制限した次の問題を考察すれば十分であることに注意されたい (図 1).

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \sigma^2 u_{xx} + u(1-u)(u - \frac{1}{2} + \varepsilon\gamma(v) - \varepsilon\bar{u}(\varepsilon)) = 0, & x \in (0, \infty), \\ v_{xx} - kv + u = 0, \\ (u_x, v_x)(0) = (0, 0), \quad (u, v)(\infty) = (0, 0). \end{cases} \quad (3)$$

ただし,

$$\bar{u}(\varepsilon) := \alpha \left(2 \int_0^\infty G(u(x; \varepsilon)) dx - S_0 \right) \quad (4)$$

である.

(3) の第一式は最高階の導関数に微小パラメータ ε を含むため, u 成分に内部遷移層が現れる (図 1(b)). したがって, 解析的特異摂動法による解の存在証明が有効であることが予想されるが, 従来の特異摂動法を適用するにあたり, 非局所項 $\bar{u}(\varepsilon)$ の処理に問題が生じる. 実際, 特異摂動法による一様近似解の構成において, 定常問題 (3) を内部遷移層の位置で二つの境界層問題に分割することになるが, 分割された各区間で $(u, v)(x; \varepsilon)$ が満たす方程式に非局所項 $\bar{u}(\varepsilon)$ が存在するため, 他方の区間における解の情報も必要になる. したがって, 従来の特異摂動法の適用が困難である. しかし, [2, 3] で用いられたアイディアを我々の問題に適用することで解析を可能にした. [2, 3] は積分保存量を持つ 2 成分の反応拡散系を対象として, 特異摂動法を適用することにより, 遷移層を一つもつ定常解の存在証明を行った. 彼らのアイディアは, まず積分保存量を ε のみに依存する定数として任意に与え, その定数に対して厳密解が存在することを証明し, その後, 解の C^1 -接合によるパラメータの決定から, 具体的に積分保存量を決定するという方法である. 我々の問題で現れる非局所項 (4) に

注目すると、 α と S_0 を任意に固定すれば、 ε のみに依存している定数として扱えることが確認できる。したがって、我々の問題にもこのアイディアが適用可能であり、次の定理を得た。

Theorem 2.1. パラメータ α, S_0, k を任意に固定したとき、内部遷移層の位置 $x = l(\varepsilon)$ の主要項 $l_0 > 0$ が次の関係式 (5) を満たせば、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、図 1(b) のような定常パルス解 $(u, v)(x; \varepsilon)$ が存在する。

$$\alpha(2l_0 - S_0) = \gamma \left(\frac{1}{k} \frac{\tanh(\sqrt{k}l_0)}{1 + \tanh(\sqrt{k}l_0)} \right). \quad (5)$$

証明は次の手順で行う：内部遷移層の位置 $x = l(\varepsilon)$ を $u(l(\varepsilon)) = \frac{1}{2}$ によって定義し、その位置における v 成分の値を $p(\varepsilon) = v(l(\varepsilon))$ で定義する (図 1(b))。まず、未知パラメータ $l(\varepsilon), p(\varepsilon), \bar{u}(\varepsilon)$ が

$$\begin{cases} l(\varepsilon) = l_0 + \varepsilon l_1, \\ p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1, \\ \bar{u}(\varepsilon) = \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 \end{cases}$$

のように与えられていると仮定して、区間 $I_1 = [0, l(\varepsilon)]$ と $I_2 = [l(\varepsilon), \infty)$ ごとに一様近似解 $(U^{(i)}, V^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を構成する。一様近似解 $(U^{(i)}, V^{(i)})$ は次の通りである。

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \\ = 1 + \theta \left(\frac{x}{l(\varepsilon)} \right) \left\{ \phi_0^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)} \right) + \varepsilon \phi_1^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)}; l_1 \right) \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \phi_2^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)}; l_1, p_1, \bar{u}_1 \right) \right\}, \quad x \in I_1, \\ V^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \\ = V_0^{(1)} \left(\frac{x}{l(\varepsilon)} \right) + \varepsilon V_1^{(1)} \left(\frac{x}{l(\varepsilon)}; l_1, p_1 \right) + \varepsilon^2 V_2^{(1)} \left(\frac{x}{l(\varepsilon)}; l_1, p_1 \right) \\ + \theta \left(\frac{x}{l(\varepsilon)} \right) \left[\varepsilon^2 \psi_0^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)} \right) \right. \\ \left. + \varepsilon^3 \left\{ \psi_1^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)}; l_1 \right) - \psi_1^{(1)}(0; l_1) \right\} \right. \\ \left. + \varepsilon^4 \left\{ \psi_2^{(1)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon l(\varepsilon)}; l_1, p_1, \bar{u}_1 \right) - \psi_2^{(1)}(0; l_1, p_1, \bar{u}_1) \right\} \right], \quad x \in I_1, \\ U^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) \\ = 0 + \phi_0^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \phi_1^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 \phi_2^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon}; p_1, \bar{u}_1 \right), \quad x \in I_2, \\ V^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) \\ = V_0^{(2)}(x - l(\varepsilon)) + \varepsilon V_1^{(2)}(x - l(\varepsilon)) + \varepsilon^2 V_2^{(2)}(x - l(\varepsilon)) \\ + \varepsilon^2 \psi_0^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^3 \left\{ \psi_1^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) - \psi_1^{(1)}(0) e^{-(x-l(\varepsilon))} \right\} \\ + \varepsilon^4 \left\{ \psi_2^{(2)} \left(\frac{x - l(\varepsilon)}{\varepsilon}; p_1, \bar{u}_1 \right) - \psi_2^{(2)}(0; p_1, \bar{u}_1) e^{-(x-l(\varepsilon))} \right\}. \quad x \in I_2, \end{aligned}$$

ただし, $\theta(y)$ は次の条件を満たす $C^\infty([0, 1])$ 級の cut-off 関数である.

$$\theta(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}; \quad 0 \leq \theta(y) \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}; \quad \theta(y) = 1, \quad \frac{3}{4} \leq y \leq 1.$$

また,

$$\begin{aligned} V_0^{(1)}(y) &= \frac{p_0 - \frac{1}{k}}{\cosh(\sqrt{k}l_0)} \cosh(\sqrt{k}l_0 y) + \frac{1}{k}, & y \in (0, 1), \\ V_1^{(1)}(y; l_1, p_1) &= e^{\sqrt{k}l_0 y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k}l_0} \int_1^y e^{-\sqrt{k}l_0 s} f_1(s; l_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\sqrt{k}l_0}}{2\sqrt{k}l_0 \cosh(\sqrt{k}l_0)} \int_0^1 \cosh(\sqrt{k}l_0 s) f_1(s; l_1) ds \right\} \\ &\quad - e^{-\sqrt{k}l_0 y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k}l_0} \int_1^y e^{\sqrt{k}l_0 s} f_1(s; l_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\sqrt{k}l_0}}{2\sqrt{k}l_0 \cosh(\sqrt{k}l_0)} \int_0^1 \cosh(\sqrt{k}l_0 s) f_1(s; l_1) ds \right\} \\ &\quad + \frac{p_1 \cosh(\sqrt{k}l_0 y)}{\cosh(\sqrt{k}l_0)} \\ V_2^{(1)}(y; l_1, p_1) &= e^{\sqrt{k}l_0 y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k}l_0} \int_1^y e^{-\sqrt{k}l_0 s} f_2(s; l_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\sqrt{k}l_0}}{2\sqrt{k}l_0 \cosh(\sqrt{k}l_0)} \int_0^1 \cosh(\sqrt{k}l_0 s) f_2(s; l_1) ds \right\} \\ &\quad - e^{-\sqrt{k}l_0 y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k}l_0} \int_1^y e^{\sqrt{k}l_0 s} f_2(s; l_1) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\sqrt{k}l_0}}{2\sqrt{k}l_0 \cosh(\sqrt{k}l_0)} \int_0^1 \cosh(\sqrt{k}l_0 s) f_2(s; l_1) ds \right\} \\ &\quad - \frac{\psi_0^{(1)}(0) \cosh(\sqrt{k}l_0 y)}{\cosh(\sqrt{k}l_0)} \\ \phi_0^{(1)}(\xi) &= -\frac{1}{1 + e^{-\frac{l_0 \xi}{\sqrt{2}\sigma}}}, & \xi \in (-\infty, 0), \\ \phi_1^{(1)}(\xi; l_1) &= -\frac{1}{\sigma^2} \dot{\phi}_0^{(1)}(\xi) \int_\xi^0 \left\{ \dot{\phi}_0^{(1)}(\eta) \right\}^{-2} \int_{-\infty}^\eta \dot{\phi}_0^{(1)}(\zeta) f_3(\zeta; l_1) d\zeta d\eta, & \xi \in (-\infty, 0), \\ \phi_2^{(1)}(\xi; l_1, p_1, \bar{u}_1) &= -\frac{1}{\sigma^2} \dot{\phi}_0^{(1)}(\xi) \int_\xi^0 \left\{ \dot{\phi}_0^{(1)}(\eta) \right\}^{-2} \int_{-\infty}^\eta \dot{\phi}_0^{(1)}(\zeta) f_4(\zeta; l_1, p_1, \bar{u}_1) d\zeta d\eta, & \xi \in (-\infty, 0), \\ \psi_0^{(1)}(\xi) &= -l_0^2 \int_{-\infty}^\xi \int_{-\infty}^\eta \phi_0^{(1)}(\zeta) d\zeta d\eta, & \xi \in (-\infty, 0), \\ \psi_1^{(1)}(\xi; l_1) &= -\int_{-\infty}^\xi \int_{-\infty}^\eta \left\{ l_0^2 \phi_1^{(1)}(\zeta; l_1) + 2l_0 l_1 \phi_0^{(1)}(\zeta) \right\} d\zeta d\eta, & \xi \in (-\infty, 0), \\ \psi_2^{(1)}(\xi; l_1, p_1, \bar{u}_1) &= -\int_{-\infty}^\xi \int_{-\infty}^\eta \left\{ -kl_0^2 \psi_0^{(1)}(\zeta) \right\} d\zeta d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + l_0^2 \phi_2^{(1)}(\zeta; l_1, p_1, \bar{u}_1) + 2l_0 l_1 \phi_1^{(1)}(\zeta; l_1) + l_1^2 \phi_0^{(1)}(\zeta) \Big\} d\zeta d\eta, & \xi \in (-\infty, 0), \\
V_0^{(2)}(y) &= p_0 e^{-\sqrt{k}y}, & y \in (0, \infty), \\
V_1^{(2)}(y; p_1) &= p_1 e^{-\sqrt{k}y}, & y \in (0, \infty), \\
V_2^{(2)}(y) &= -\psi_0^{(2)}(0) e^{-\sqrt{k}y}, & y \in (0, \infty), \\
\phi_0^{(2)}(\xi) &= \frac{1}{1 + e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}\sigma}}}, & \xi \in (0, \infty), \\
\phi_1^{(2)}(\xi) &= \frac{1}{\sigma^2} \dot{\phi}_0^{(2)}(\xi) \int_0^\xi \left\{ \dot{\phi}_0^{(2)}(\eta) \right\}^{-2} \int_\eta^\infty \dot{\phi}_0^{(2)}(\zeta) f_5(\zeta) d\zeta d\eta, & \xi \in (0, \infty), \\
\phi_2^{(2)}(\xi; p_1, \bar{u}_1) &= \frac{1}{\sigma^2} \dot{\phi}_0^{(2)}(\xi) \int_0^\xi \left\{ \dot{\phi}_0^{(2)}(\eta) \right\}^{-2} \int_\eta^\infty \dot{\phi}_0^{(2)}(\zeta) f_6(\zeta; p_1, \bar{u}_1) d\zeta d\eta, & \xi \in (0, \infty), \\
\psi_0^{(2)}(\xi) &= - \int_\xi^\infty \int_\eta^\infty \phi_0^{(2)}(\zeta) d\zeta d\eta, & \xi \in (0, \infty), \\
\psi_1^{(2)}(\xi; p_1, \bar{u}_1) &= - \int_\xi^\infty \int_\eta^\infty \phi_1^{(2)}(\zeta) d\zeta d\eta, & \xi \in (0, \infty), \\
\psi_2^{(2)}(\xi; p_1, \bar{u}_1) &= - \int_\xi^\infty \int_\eta^\infty \left\{ \phi_2^{(2)}(\zeta; p_1, \bar{u}_1) - k \psi_0^{(2)}(\zeta) \right\} d\zeta d\eta, & \xi \in (0, \infty),
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
f_1(s; l_1) &= 2l_0 l_1 (k V_0^{(1)}(s) - 1), \\
f_2(s; l_1) &= 2l_0 l_1 k V_1^{(1)}(s; l_1, p_1) + l_1^2 (k V_0^{(1)}(s) - 1), \\
f_3(\zeta; l_1) &= 2l_0 l_1 \phi_0^{(1)}(\zeta) (1 + \phi_0^{(1)}(\zeta)) (\phi_0^{(1)}(\zeta) + \tfrac{1}{2}) + l_0^2 \phi_0^{(1)}(\zeta) (1 + \phi_0^{(1)}(\zeta)) (\gamma(p_0) - \bar{u}_0), \\
f_4(\zeta; l_1, p_1, \bar{u}_1) &= l_1^2 \phi_0^{(1)}(\zeta) (1 + \phi_0^{(1)}(\zeta)) (\phi_0^{(1)}(\zeta) + \tfrac{1}{2}) \\
&\quad + l_0^2 \phi_0^{(1)}(\zeta) (1 + \phi_0^{(1)}(\zeta)) \left\{ \gamma'(p_0) (V_0^{(1)'}(1) \zeta + p_1) - \bar{u}_1 \right\} \\
&\quad + 2l_0 l_1 \left[3 \left\{ \phi_0^{(1)}(\zeta) \right\}^2 + 3 \phi_0^{(1)}(\zeta) + \tfrac{1}{2} \right] \phi_1^{(1)}(\zeta; l_1) \\
&\quad + 2l_0 l_1 \phi_0^{(1)}(\zeta) (1 + \phi_0^{(1)}(\zeta)) (\gamma(p_0) - \bar{u}_0) \\
&\quad + l_0^2 (1 + 2 \phi_0^{(1)}(\zeta)) (\gamma(p_0) - \bar{u}_0) \phi_1^{(1)}(\zeta; l_1) + 3l_0^2 (\phi_0^{(1)}(\zeta) + \tfrac{1}{2}) \{ \phi_1^{(1)}(\zeta; l_1) \}^2, \\
f_5(\zeta) &= (\gamma(p_0) - \bar{u}_0) \phi_0^{(2)}(\zeta) (1 - \phi_0^{(2)}(\zeta)), \\
f_6(\zeta; p_1, \bar{u}_1) &= -\phi_0^{(2)}(\zeta) (1 - \phi_0^{(2)}(\zeta)) \left\{ \gamma'(p_0) (V_0^{(2)'}(0) \zeta + p_1) - \bar{u}_1 \right\} \\
&\quad + 3(\phi_0^{(2)}(\zeta) + \tfrac{1}{2}) \{ \phi_1^{(2)}(\zeta) \}^2 - (\gamma(p_0) - \bar{u}_0) (1 - 2\phi_0^{(2)}(\zeta)) \phi_1^{(2)}(\zeta)
\end{aligned}$$

である。各区間 I_1, I_2 における一様近似解を用いることで、各区間における厳密解が

$$\begin{cases}
\begin{cases}
u^{(1)}(x; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) = U^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) + \varepsilon^2 \tilde{U}^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1), \\
v^{(1)}(x; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) = V^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) + \varepsilon^2 \tilde{V}^{(1)}(x/l(\varepsilon); \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1),
\end{cases} & x \in I_1, \\
\begin{cases}
u^{(2)}(x; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) = U^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) + \varepsilon^2 \tilde{U}^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1), \\
v^{(2)}(x; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) = V^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) + \varepsilon^2 \tilde{V}^{(2)}(x - l(\varepsilon); \varepsilon; p_1, \bar{u}_1)
\end{cases} & x \in I_2,
\end{cases} \quad (6)$$

の形で得られることが [4, 5] と同様にして示される。ただし, $(U^{(1)}, V^{(1)}) \in X_\varepsilon := A_\varepsilon \times B$, $(U^{(2)}, V^{(2)}) \in X_{\varepsilon,\kappa} := A_{\varepsilon,\kappa} \times B_\kappa$,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &:= \{u \in C^2([0, 1]) \mid u'(0) = 0, u(1) = 0, \sup_{y \in [0, 1]} \sum_{i=0}^2 |\left(\varepsilon \frac{d}{dy}\right)^i u(y)| < +\infty\}, \\ B &:= \{v \in C^2([0, 1]) \mid v'(0) = 0, v(1) = 0\}, \\ A_{\varepsilon,\kappa} &:= \{u \in C^2([0, \infty)) \mid u(0) = 0, u(\infty) = 0, \sup_{y \in [0, \infty)} \sum_{i=0}^2 e^{\kappa y} |\left(\varepsilon \frac{d}{dy}\right)^i u(y)| < +\infty\}, \\ B_\kappa &:= \{v \in C^2([0, \infty)) \mid v(0) = 0, v(\infty) = 0, \sup_{y \in [0, \infty)} \sum_{i=0}^2 e^{\kappa y} |\left(\frac{d}{dy}\right)^i v(y)| < +\infty\} \end{aligned}$$

である。ただし, $\kappa > 0$ である。また, $(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})$ と $(U^{(2)}, V^{(2)})$ はそれぞれ次の性質を満たす。

Lemma 2.2. 任意に与えられた $l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*$ に対して, $\Delta_\rho = \{(l_1, p_1, \bar{u}_1) \in \mathbb{R}^3 \mid |l_1 - l_1^*| + |p_1 - p_1^*| + |\bar{u}_1 - \bar{u}_1^*| < \rho\}$ ($\rho > 0$) と定める。このとき, ある $\varepsilon_1 > 0$ と $\rho_1 > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して, $(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(y; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1)$, $\frac{\partial}{\partial l_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(y; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1)$, $\frac{\partial}{\partial p_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(y; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(y; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1)$ は X_ε に属し, X_ε の位相において連続である。さらに,

$$\left. \begin{aligned} &\left\| (\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(\cdot; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_\varepsilon} \\ &\left\| \frac{\partial}{\partial l_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(\cdot; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_\varepsilon} \\ &\left\| \frac{\partial}{\partial p_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(\cdot; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_\varepsilon} \\ &\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}(\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)})(\cdot; \varepsilon; l_1, p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_\varepsilon} \end{aligned} \right\} = o(1) \text{ as } \varepsilon \downarrow 0$$

が $(l_1, p_1, \bar{u}_1) \in \Delta_{\rho_1}$ に関して一様に成り立つ。

Lemma 2.3. 任意に与えられた p_1^*, \bar{u}_1^* に対して, $\Delta_\rho = \{(p_1, \bar{u}_1) \in \mathbb{R}^2 \mid |p_1 - p_1^*| + |\bar{u}_1 - \bar{u}_1^*| < \rho\}$ ($\rho > 0$) と定める。このとき, ある $\varepsilon_2 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\kappa > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ に対して, $(\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(y; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1)$, $\frac{\partial}{\partial p_1}(\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(y; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}(\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(y; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1)$ は $X_{\varepsilon,\kappa}$ に属し, $X_{\varepsilon,\kappa}$ の位相において連続である。さらに,

$$\left. \begin{aligned} &\left\| (\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(\cdot; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_{\varepsilon,\kappa}} \\ &\left\| \frac{\partial}{\partial p_1}(\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(\cdot; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_{\varepsilon,\kappa}} \\ &\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1}(\tilde{U}^{(2)}, \tilde{V}^{(2)})(\cdot; \varepsilon; p_1, \bar{u}_1) \right\|_{X_{\varepsilon,\kappa}} \end{aligned} \right\} = o(1) \text{ as } \varepsilon \downarrow 0$$

が $(p_1, \bar{u}_1) \in \Delta_{\rho_2}$ に関して一様に成り立つ.

次に, 内部遷移層の位置 $x = l(\varepsilon)$ において, 各区間における解が C^1 の意味で接合されるという条件

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon) := l(\varepsilon) \left\{ u_x^{(1)}(l(\varepsilon); \varepsilon) - u_x^{(2)}(l(\varepsilon); \varepsilon) \right\} = 0, \\ \Psi(\varepsilon) := l(\varepsilon) \left\{ v_x^{(1)}(l(\varepsilon); \varepsilon) - v_x^{(2)}(l(\varepsilon); \varepsilon) \right\} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

と, 非局所項 $\bar{u}(\varepsilon)$ が満たす条件

$$\Sigma(\varepsilon) := \bar{u}(\varepsilon) - \alpha \left(2 \int_0^\infty G(u(x; \varepsilon)) dx - S_0 \right) = 0 \quad (8)$$

を課す. (7) と (8) によって, 本来未知パラメータであった $l(\varepsilon), p(\varepsilon), \bar{u}(\varepsilon)$ が一意に定まり, 区間 $[0, \infty)$ における厳密解の存在が示される. (7) と (8) に各区間の解を代入することで

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \dot{\phi}_0^{(1)}(0) - l_0 \dot{\phi}_0^{(2)}(0) \right\} + \left\{ \dot{\phi}_1^{(1)}(0; l_1) - l_0 \dot{\phi}_1^{(2)}(0) - l_1 \dot{\phi}_0^{(2)}(0) \right\} \\ \quad + \varepsilon \left\{ \dot{\phi}_2^{(1)}(0; l_1, p_1, \bar{u}_1) - l_0 \dot{\phi}_2^{(2)}(0; p_1, \bar{u}_1) - l_1 \dot{\phi}_1^{(2)}(0) \right\} + O(\varepsilon^2) \\ \quad =: \frac{1}{\varepsilon} \Phi_{-1} + \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + O(\varepsilon^2) = 0, \\ \Psi(\varepsilon) = \left\{ V_0^{(1)'}(1) - l_0 V_0^{(2)'}(0) \right\} \\ \quad + \varepsilon \left\{ V_1^{(1)'}(1; l_1, p_1) + \dot{\psi}_0^{(1)}(0) - l_0 V_1^{(2)'}(0; p_1) - l_0 \dot{\psi}_0^{(2)}(0) - l_1 V_0^{(2)'}(0) \right\} + O(\varepsilon^2) \\ \quad =: \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + O(\varepsilon^2) = 0, \\ \Sigma(\varepsilon) = \{ \bar{u}_0 - \alpha(2l_0 - S_0) \} + \varepsilon \{ \bar{u}_1 - 2\alpha l_1 \} + O(\varepsilon^2) \\ \quad =: \Sigma_0 + \varepsilon \Sigma_1 + O(\varepsilon^2) = 0 \end{cases}$$

を得る. $\Phi_{-1} = 0$ は任意の $l_0 > 0$ に対して成り立つことが確認できる. さらに, $\Phi_0 = 0, \Psi_0 = 0, \Sigma_0 = 0$ より

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \gamma(p_0), \\ p_0 = \frac{\tanh(\sqrt{k}l_0)}{k(1 + \tanh(\sqrt{k}l_0))}, \\ \bar{u}_0 = \alpha(2l_0 - S_0) \end{cases}$$

が従い, (l_0, p_0, \bar{u}_0) が満たすべき関係式 (5) が導かれる. また, $\Phi_1 = 0, \Psi_1 = 0, \Sigma_1 = 0$ より

$$\begin{cases} \Phi_1 = \sqrt{k}l_0(1 + \tanh(\sqrt{k}l_0))p_1 - l_0(1 - \tanh(\sqrt{k}l_0))l_1 = 0, \\ \Psi_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3\sigma} \{ l_0 \gamma'(p_0)p_1 - l_0 \bar{u}_1 + constant \} = 0, \\ \Sigma_1 = \bar{u}_1 - 2\alpha l_1 = 0 \end{cases}$$

を得る. 上記より $\{ 2\sqrt{2}e^{2\sqrt{k}l_0} - \gamma'(p_0) \} p_1 = constant$ という関係式が従うが, $\gamma'(p_0) < 0$ であることから p_1 が一意に定まり, l_1, \bar{u}_1 も一意に定まる. これによって定まる l_1, p_1, \bar{u}_1 を, それぞれ $l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*$ とおく.

ここで, $l(\varepsilon) = l_0 + \varepsilon \hat{l}, p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon \hat{p}, \bar{u}(\varepsilon) = \bar{u}_0 + \varepsilon \hat{u}$ とおき, $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon \Phi^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon), \Psi(\varepsilon) = \varepsilon \Psi^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon), \Sigma(\varepsilon) = \varepsilon \Sigma^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon)$ によって定まる作用素 $\Phi^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon), \Psi^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon), \Sigma^*(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}; \varepsilon)$

を考える。このとき、十分小さな $\delta > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、 Φ^*, Ψ^*, Σ^* は $\hat{l} \in (l_1^* - \delta, l_1^* + \delta)$, $\hat{p} \in (p_1^* - \delta, p_1^* + \delta)$, $\hat{u} \in (\bar{u}_1^* - \delta, \bar{u}_1^* + \delta)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して連続であり、 $\hat{l}, \hat{p}, \hat{u}$ に関して C^1 級である。さらに、先ほどの議論から $(\Phi^*, \Psi^*, \Sigma^*)(l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*; 0) = 0$ が成り立つ。また、ヤコビ行列式 $\frac{\partial(\Phi^*, \Psi^*, \Sigma^*)}{\partial(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u})}(l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*; 0)$ を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\Phi^*, \Psi^*, \Sigma^*)}{\partial(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u})}(l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*; 0) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{2}l_0\gamma'(p_0)}{3\sigma} & \frac{2\sqrt{2}l_0}{3\sigma} \\ -l_0(1 - \tanh(\sqrt{k}l_0)) & \sqrt{k}l_0(1 + \tanh(\sqrt{k}l_0)) & 0 \\ -2\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2\sqrt{2}l_0^2}{3\sigma}(1 - \tanh(\sqrt{k}l_0)) \left\{ 2\alpha\sqrt{k}e^{2\sqrt{k}l_0} - \gamma'(p_0) \right\} \end{aligned}$$

であり、 $\gamma'(p_0) < 0$ より $\frac{\partial(\Phi^*, \Psi^*, \Sigma^*)}{\partial(\hat{l}, \hat{p}, \hat{u})}(l_1^*, p_1^*, \bar{u}_1^*; 0) \neq 0$ が従う。したがって、陰関数定理により、ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し、 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して、 $\Phi^*(\hat{l}(\varepsilon), \hat{p}(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon); \varepsilon) = 0$, $\Psi^*(\hat{l}(\varepsilon), \hat{p}(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon); \varepsilon) = 0$, $\Sigma^*(\hat{l}(\varepsilon), \hat{p}(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon); \varepsilon) = 0$ を満たし、かつ、 $\hat{l}(0) = l_1^*$, $\hat{p}(0) = p_1^*$, $\hat{u}(0) = \bar{u}_1^*$ を満たすものが存在する。

最後に、 $\hat{l}(\varepsilon), \hat{p}(\varepsilon), \hat{u}(\varepsilon)$ をそれぞれ (6) の l_1, p_1, \bar{u}_1 に代入することで、 $x = l(\varepsilon)$ において C^1 の意味で接合され、かつ、(4) を満たす半区間 $[0, \infty)$ 上の厳密解の存在が従う。

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです。また、本研究は池田榮雄氏（富山大学名誉教授）と長山雅晴氏（北海道大学電子科学研究所教授）との共同研究に基づくものです。

参考文献

- [1] M. Nagayama, H. Monobe, K. Sakakibara, K. I. Nakamura, Y. Kobayashi, and H. Kitahata, On the reaction-diffusion type modeling of the self-propelled object motion, *Scientific reports*, **13**(1) (2023) 12633.
- [2] M. Kuwamura, K. Teramoto, and H. Ikeda, Single transition layer in mass-conserving reaction-diffusion systems with bistable nonlinearity, *Nonlinearity*, **37** (2024) 115013.
- [3] H. Ikeda and M. Kuwamura, Stability of single transition layer in mass-conserving reaction-diffusion systems with bistable nonlinearity, *J. Diff. Equat.*, **440** (2025) 113430.
- [4] P. C. Fife, Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **54** (1976), 497-52.
- [5] H. Ikeda and Y. Akama, Existence and stability of singularly perturbed standing pulse solutions of a three-component FitzHugh-Nagumo system, *Toyama Math. J.*, **39** (2017), 19-85.