重さ 1 のモジュラー形式の Hecke 体について

東京理科大学　大学院理学研究科　数学専攻
宮澤優 (Yu MIYAZAWA) *

概要

モジュラー形式 f に対して, その Fourier 係数を有理数体に添加して得られる体を f の Hecke 体という. 本レポートでは, f が重さ 1 の正規化された Hecke 固有新形式で f に付随する Galois 表現の射影像が二面体群 D_n と同型なものに対して, そのような f の Hecke 体の分類について説明する.

1　導入

Nebentypus χ を持つレベル N, 重さ k の新形式

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n, \quad q = e^{2\pi iz}$$

に対して f の Hecke 体とは有理数体 $\mathbb{Q}$ に f のある係数と χ の像を添加して得られる代数体

$$K_f = \mathbb{Q}(\{a_n(f) \mid n \geq 1\}) = \mathbb{Q}\left(\{a_p(f) \mid p \text{ は } N \text{ を割らない素数}\}, \operatorname{Im}\chi\right)$$

である. この Hecke 体としてどのような代数体が現れるかという自然な問いが考えられる. 本研究では, f が重さ 1 の二面体型の新形式である場合に f に付随する Galois 表現を調べることで f の Hecke 体として現れる代数体の分類の候補を与えた.

本レポートではモジュラー形式の基本概念および重さ 1 の新形式とそれに付随する Galois 表現について概説し, 主結果を述べる.

2　基本概念と準備

2.1　モジュラー形式

$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ を複素上半平面とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ を行列式が正の 2 次正方行列からなる実一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群とすると $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ は $\mathfrak{H}$ に一次分数変換 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ により作用する. 整数 k を固定する. $\mathfrak{H}$ 上の関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ と $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ に対して, 関

* E-mail:1124529@ed.tus.ac.jp

数 $f[\gamma]_k : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ を

$$(f[\gamma]_k)(z) = (\det \gamma)^{k-1} \frac{1}{(cz+d)^k} f(\gamma z)$$

と定めると, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ は $\mathfrak{H}$ 上の関数全体の集合に右から作用する.

正整数 N に対して, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)$ を

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

と定める. k を整数, N を正整数とし $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を指標とする. $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ がレベル N, 重さ k の nebentypus χ を持つ**モジュラー形式**であるとは, 以下の条件を満たすことをいう:

- $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対し $f[\gamma]_k = \chi(d) f$ が成り立つ.
- 任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $f[\gamma]_k$ は Fourier 展開

$$(f[\gamma]_k)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f[\gamma]_k) q^n, \quad q = e^{2\pi i z}$$

  を持つ.

さらに, 任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し $a_0(f[\gamma]_k) = 0$ となるとき f は**尖点形式**であるという. nebentypus χ を持つレベル N, 重さ k の尖点形式全体の集合を $S_k(N, \chi)$ とおくと, これは有限次元 $\mathbb{C}$ 線形空間となる.

素数 p と $f \in S_k(N, \chi)$ に対し, Hecke 作用素と呼ばれる $S_k(N, \chi)$ 上の線形変換 T_p を

$$T_p f = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} f \left[\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \right]_k + (\chi(p) f) \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_k & (p \nmid N), \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} f \left[\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \right]_k & (p | N) \end{cases}$$

と定める. 任意の素数 p, q に対して T_p, T_q は可換になっている. 尖点形式 $f \in S_k(N, \chi) \setminus \{0\}$ が**正規化された Hecke 固有形式**であるとは以下の条件を満たすときをいう:

- 任意の素数 p に対して f は T_p の固有ベクトルである.
- $a_1(f) = 1$ である.

f が正規化された Hecke 固有形式であるとき, $T_p f = a_p(f) f$ が成り立つ. よって f の Fourier 展開の p 次の係数は T_p の固有値となっている. 正規化された Hecke 固有形式 $f \in S_k(N, \chi)$ に対し, f の **Hecke 体**とは体

$$\mathbb{Q}(\{a_n(f) \mid n \geq 1\})$$

であり, K_f とかく. $S_k(N, \chi)$ が有限次元であることから, 正規化された Hecke 固有形式の Hecke 体は代数体, すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体となっている.

N' を正整数とし $N'|N$, $\chi : (\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を指標とする．自然な全射 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^\times$ により χ は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の指標としてもみなせる．$f \in S_k(N', \chi)$ と $dN'|N$ をみたす正整数 d に対して $f \in S_k(N, \chi)$ および $f\left[\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_k \in S_k(N, \chi)$ が成り立つ．$\iota_{(N,N',d)} : S(N', \chi)^2 \to S_k(N, \chi)$ を $(f_1, f_2) \mapsto f_1 + f_2\left[\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_k$ で定め, $S_k^{\mathrm{old}}(N, \chi) = \displaystyle\sum_{N'|N, dN'|N} \mathrm{Im}\, \iota_{(N,N',d)}$ とおく．さらに $S_k(N, \chi)$ 上の Petersson 内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}} f_1(x + yi)\overline{f_2(x + yi)}y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

に関する $S_k^{\mathrm{old}}(N, \chi)$ の直交補空間を $S_k^{\mathrm{new}}(N, \chi)$ とかく．$S_k^{\mathrm{new}}(N, \chi)$ に属する正規化された Hecke 固有形式を**新形式**と呼ぶ．新形式 f に対しては

$$K_f = \mathbb{Q}\left(\{a_p(f) \mid p \text{ は } N \text{ を割らない素数}\}, \mathrm{Im}\, \chi\right)$$

が成り立つ．

より詳しくは [2] や [7] を参照のこと．また, 整数論とモジュラー形式の繋がりについては [6] を, モジュラー形式の Langlands プログラムにおける位置付け, 重要性, 発展については例えば [5], [7] を参照されたい．

2.2 重さ 1 の新形式とそれに付随する Galois 表現

$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群とする．Deligne–Serre の定理 ([1, Théorème 4.1]) によって, 重さ 1 の新形式 $f \in S_1(N, \chi)$ から

- N を割らない素数 p に対して ρ_f は不分岐であり,
- N を割らない素数 p に対して $\mathrm{tr}\, \rho_f(\mathrm{Frob}_p) = a_p(f), \det \rho_f(\mathrm{Frob}_p) = \chi(p)$ であり
- $\det \rho_f$ は奇, すなわち $G_{\mathbb{Q}}$ の複素共役元 c に対して $\det \rho_f(c) = -1$

を満たす $G_{\mathbb{Q}}$ の既約 Galois 表現 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が得られる．ρ_f の像は有限になっている．ρ_f の射影像, すなわち $\rho_f(G_{\mathbb{Q}})$ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ への像は位数 $2n$ の二面体群 D_n, 4 次交代群 A_4, 4 次対称群 S_4, 5 次交代群 A_5 のいずれかと同型であり．ρ_f の射影像が二面体群と同型なら f は**二面体型**と呼ばれ, そうでないとき, すなわち射影像が A_4, S_4, A_5 のいずれかと同型であるとき f はエキゾチックと呼ばれる．より詳しく, 射影像が $G = D_n, A_4, S_4, A_5$ と同型であるとき f は G 型と呼ばれる．

二面体型の新形式 f に付随する Galois 表現 ρ_f はある 2 次体 K の指標 $\psi : G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \to \mathbb{C}^\times$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}} \psi$ に一致することが知られている．逆に ψ を G_K の指標とし, その誘導表現を $\rho = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}} \psi$ とする．σ を $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の生成元とし, σ の $G_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げも σ とかく．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は G_K に共役で作用する．$\psi^\sigma(g) := \psi(\sigma^{-1} \cdot g)$ とおく．このとき以下の命題が成り立つ．

命題 2.1 (Serre ([3, (7.2.1)]))**.**

(1) 以下は同値:

（a）ρ は既約;

（b）ρ の射影像は二面体群に同型;

（c）$\psi \neq \psi^{\sigma}$.

(2) ρ の導手は $|D_K| \cdot N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})$ に一致する, ただし D_K は K の判別式であり $\mathfrak{m}$ は ψ の導手である.

(3) $G_{\mathbb{Q}}$ の表現 $\det \rho$ が奇であることと以下のいずれかであることは同値:

（a）K は虚二次体.

（b）K は実で ψ は無限で符号 $+,-$ を持つ, すなわち $c, c' \in G_K$ が K の二つの実素点に対応する複素共役ならば $\psi(c) \neq \psi(c')$.

(4) ρ の射影像が D_n に同型ならば $\psi^{-1}\psi^{\sigma}$ の位数は n である.

3 主定理

K を 2 次体, $\psi : G_K \to \mathbb{C}^{\times}$ を指標とし, $\rho = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}} \psi$ とする. $g \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\rho(g)$ のトレース $\mathrm{tr}\,\rho(g)$ は $g \in G_K$ ならば $\psi(g) + \psi^{\sigma}(g)$ に一致し, $g \notin G_K$ ならば 0 になる. そこで

$$K_{\psi} := \mathbb{Q}\left(\{\psi(g) + \psi^{\sigma}(g) \mid g \in G_K\}\right)$$

を考える. このとき, Cebotarev の密度定理 ([4, I, 2.2]) を用いることで, 以下の定理が示せる.

定理 3.1. D_n 型の新形式 f に対して, f に付随する Galois 表現 ρ_f が 2 次体 K の 指標 ψ の誘導表現で与えられているとする. このとき

$$K_f = K_{\psi}$$

が成り立つ.

よって f の Hecke 体を調べることは, 2 次巡回群 C_2 が作用する群の指標から定まる代数体を調べることに帰着される. f を nebentypus χ を持つ D_n 型の新形式とする. d を χ の位数とすると $\chi(-1) = -1$ から d は偶数である. f の Hecke 体は以下のようになる.

定理 3.2. f を nebentypus χ を持つ レベル N の D_n 型の新形式とし, d を χ の位数とする. また v_2 を 2 進付値とし $e = v_2(d), l = n/2^{v_2(n)}$ とおく. このとき K_f は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2d}, \zeta_{2n}), \quad \mathbb{Q}(\zeta_d, \zeta_{2n}), \quad \mathbb{Q}(\zeta_d, \zeta_n),$$
$$\mathbb{Q}(\zeta_{2d}, \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}), \quad \mathbb{Q}(\zeta_d, \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}), \quad \mathbb{Q}(\zeta_d, \zeta_{2n} - \zeta_{2n}^{-1}), \quad \mathbb{Q}(\zeta_d, \zeta_{2^{e+1}}\zeta_l - \zeta_{2^{e+1}}\zeta_l^{-1})$$

のいずれかに一致する.

さらに f のレベル N が平方因子を持たないならば Hecke 体の候補はより絞られる.

定理 3.3. f を nebentypus χ を持つ レベル N の D_n 型の新形式とし, d を χ の位数とする. また N は平方因子を持たず, n が奇数であると仮定する. このとき

$$K_f = \begin{cases} \mathbb{Q}(\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}) & (d = 2) \\ \mathbb{Q}(\zeta_{2n}) & (d \neq 2) \end{cases}$$

が成り立つ．また, Hecke 体が $\mathbb{Q}(\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}),\mathbb{Q}(\zeta_{2n})$ となるようなレベルが平方因子を持たない二面体型の新形式 f が存在する．

定理 3.4. f を nebentypus χ を持つ レベル N の D_n 型の新形式とし, d を χ の位数とする．また N は平方因子を持たないと仮定する．

(1) $v_2(n)=1$ なら K_f は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}),\quad \mathbb{Q}(\zeta_n),\quad \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$$

のいずれかに一致する．

(2) $v_2(n)\geq 2$ なら K_f は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}),\quad \mathbb{Q}(\zeta_{2n}-\zeta_{2n}^{-1}),\quad \mathbb{Q}(\zeta_n),\quad \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$$

のいずれかに一致する．

注意 3.5. 本研究では, 以下の場合において新形式の存在性を示した.

- $n\geq 2$ に対して $K_f=\mathbb{Q}(\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1})$ となるレベルが平方因子を持たない D_n 型の新形式.
- $n\geq 2$ に対して $K_f=\mathbb{Q}(\zeta_{2n})$ となるレベルが平方因子を持たない D_n 型の新形式.
- 奇数 $n\geq 3$ と $\gcd(d,n)=1$ を満たす d に対して $K_f=\mathbb{Q}(\zeta_d,\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1})$ となる D_n 型の新形式.

参考文献

[1] Deligne, P., Serre, J.-P.: Formes modulaires de poids 1. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7, 507–530 (1974), http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_4_507_0

[2] Diamond, F., Shurman, J.: A first course in modular forms, Graduate Texts in Mathematics, vol. 228. Springer-Verlag, New York (2005)

[3] Serre, J.-P.: Modular forms of weight one and Galois representations. In: Algebraic number fields: L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), pp. 193–268. Academic Press, London-New York (1977)

[4] Serre, J.-P.: Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves. Advanced Book Classics, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edn. (1989), with the collaboration of Willem Kuyk and John Labute

[5] Weinstein, J.: Reciprocity laws and Galois representations: recent breakthroughs. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 53(1), 1–39 (2016). https://doi.org/10.1090/bull/1515, https://doi.org/10.1090/bull/1515

[6] 三枝洋一（述）, 穂坂秀昭（記）: 2017 年度数学特別セミナー 有限体上の方程式を通して見る現代整数論, 講義ノート, 開成学園, (2019)

[7] 三枝 洋一: ラングランズ予想. 東京大学出版会 (2025)