Canonical traces of graded fiber products: applications to Stanley–Reisner rings

宮下 空　(阪大・情報)*

本講演は大阪工業大学の神代 真也氏との共同研究 ([1]) に基づく．$\Bbbk$ を体, $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ を $R_0 = \Bbbk$ の等次元 Noether 次数付き環, その標準加群を ω_R とする．

$$\mathrm{tr}_R(\omega_R) := \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, R)} \phi(\omega_R) \subseteq R$$

を R の**正準トレース**という．このとき $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$ は R の non–quasi–Gorenstein locus を記述する. 特に, R が Cohen–Macaulay であれば, $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$ は non–Gorenstein locus を記述する．この観察は近年大きな関心を呼び, とりわけ Cohen–Macaulay 環の正準トレースの研究が活発に展開されている．特に最近, 宮下と Varbaro は punctured spectrum 上 Gorenstein である Stanley–Reisner 環の正準トレースによる分類を与えた.

Fact 1　([2, Theorem A]) Δ を単体的複体, $R = \Bbbk[\Delta]$ を体 $\Bbbk$ 上の Δ の Stanley–Reisner 環とする．R が Cohen–Macaulay であると仮定すると, 次が成り立つ:

(1) R が punctured spectrum 上で Gorenstein である ($\Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{tr}_R(\omega_R)} \supseteq \mathfrak{m}_R$) ことは, ある $i \in \{0, 1, 2\}$ に対し $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R^i$ であることと同値;
(2) $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R$ は, Δ が $n \geq 3$ 個の離散点または長さ $n \geq 3$ の path と同値;
(3) $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R^2$ は, Δ が向き付け不能ホモロジー多様体であることと同値.

本論文の目的は, [2, Theorem A] から「R は Cohen–Macaulay」という仮定を取り除くことである．[2, Theorem A] の Cohen–Macaulay 性を外す際の困難の一つは, 非連結な単体的複体に起因する．実際, 次元が 1 以上の各非連結単体的複体の Stanley–Reisner 環は Cohen–Macaulay でない．一方で, そのような Stanley–Reisner 環は, 与えられた単体的複体の連結成分の Stanley–Reisner 環のファイバー積に同型である.

以上の観察を踏まえ, 我々は一般のファイバー積の正準トレースを計算する．A, B を $\Bbbk = A_0 = B_0$ を満たす Noether 次数付き環, $f\colon A \to \Bbbk$, $g\colon B \to \Bbbk$ を射影とする.

$$R := A \times_{\Bbbk} B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$$

を $\Bbbk$ 上での A と B のファイバー積という．簡単のため, $\mathrm{tr}_R^{\dagger}(\omega_R)$ を次で定める.

$$\mathrm{tr}_R^{\dagger}(\omega_R) := \begin{cases} \mathrm{tr}_R(\omega_R) & \text{if } R \text{ is not quasi–Gorenstein,} \\ \mathfrak{m}_R & \text{if } R \text{ is quasi–Gorenstein} \end{cases}$$

R における $\mathfrak{m}_R$ の annihilator を $(0) :_R \mathfrak{m}_R$ で表す．次が我々の 1 つ目の主結果である.

*e-mail: u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp

Theorem 2　$A \neq A_0$, $B \neq B_0$ かつ $\dim(R) \neq 1$ と仮定する．このとき

$$\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \begin{cases} \operatorname{tr}_A^{\dagger}(\omega_A)R \oplus \operatorname{tr}_B^{\dagger}(\omega_B)R & \text{if } \dim(A) = \dim(B), \\ \operatorname{tr}_A^{\dagger}(\omega_A)R \oplus \big((0) :_B \mathfrak{m}_B\big)R & \text{if } \dim(A) > \dim(B), \\ \big((0) :_A \mathfrak{m}_A\big)R \oplus \operatorname{tr}_B^{\dagger}(\omega_B)R & \text{if } \dim(A) < \dim(B). \end{cases}$$

Stanley–Reisner 環に話を戻す．Theorem 2 より, 連結な単体的複体に焦点を絞ることができる．この状況で, 我々は Fact 1 の仮定を (S_2) へと弱め, 類似の結果を得た.

Theorem 3　Δ を連結な単体的複体, $R = \Bbbk[\Delta]$ とおく．R が (S_2) を満たすと仮定する．

(1) R が punctured spectrum 上 Gorenstein と, $i \in \{0,1,2\}$ に対して $\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R^i$ かつ R が punctured spectrum 上 Cohen–Macaulay は同値;
(2) $\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R$ と, Δ が長さ $n \geq 3$ の path であることは同値;
(3) $\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R^2$ かつ R が punctured spectrum 上 Cohen–Macaulay であることと, Δ が向き付け不能ホモロジー多様体であることは同値.

Theorem 2 と 3 から, 非連結な単体的複体の場合も含めた Fact 1 の一般化が得られる.

Theorem 4　$2 \leq n \in \mathbb{Z}$ とする．$1 \leq i \leq n$ に対し, Δ_i を連結単体的複体, $A_i := \Bbbk[\Delta_i]$ は (S_2) を満たすとする．$\Delta := \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$ および $R := \Bbbk[\Delta]$ とおき, $\dim(\Delta) > 0$ とする.

(1) R が punctured spectrum 上 Cohen–Macaulay と仮定する．このとき次は同値:
  (a) $\sqrt{\operatorname{tr}_R(\omega_R)}_R = \mathfrak{m}_R$;
  (b) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $\operatorname{tr}_{A_i}(\omega_{A_i}) \in \{A_i,\ \mathfrak{m}_{A_i},\ \mathfrak{m}_{A_i}^2\}$ かつ $\dim(\Delta_i) = \dim(\Delta)$;
  (c) $\operatorname{tr}_R(\omega_R) \supseteq \mathfrak{m}_R^2$.
(2) 次は同値:
  (a) $\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R$;
  (b) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し $\operatorname{tr}_{A_i}(\omega_{A_i}) \supseteq \mathfrak{m}_{A_i}$ かつ $\dim(\Delta_i) = \dim(\Delta)$;
  (c) 次が成り立つ:
    (i) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し $\dim(\Delta_i) = \dim(\Delta)$,
    (ii) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し A_i は quasi-Gorenstein, または Δ_i は path.
(3) R が punctured spectrum 上 Cohen–Macaulay と仮定する．このとき次は同値:
  (a) $\operatorname{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R^2$;
  (b) 各 $1 \leq i \leq n$ で $\operatorname{tr}_{A_i}(\omega_{A_i}) = \mathfrak{m}_{A_i}^2$ かつ $\dim(\Delta_i) = \dim(\Delta)$;
  (c) 各 $1 \leq i \leq n$ で Δ_i は向き付け不能ホモロジー多様体かつ $\dim(\Delta_i) = \dim(\Delta)$.

参考文献

[1] Shinya Kumashiro and Sora Miyashita. Canonical traces of graded fiber products: applications to disconnected Stanley–Reisner rings. *arXiv preprint*, arXiv:2506.04899, 2025.

[2] Sora Miyashita and Matteo Varbaro. The canonical trace of Stanley–Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum. *International Mathematics Research Notices*, 2025(12):rnaf176, 2025.