# エッジ環の pseudo-Gorenstein 性について

東京大学　大学院数理科学研究科
松下光虹 (Koji MATSUSHITA) *

**概要**

標準的次数付き環において, その $h$ 多項式は重要な不変量であり, 次数付き環の様々な性質を反映する. $h$ 多項式の最高次係数が 1 であるような次数付き環を pseudo-Gorenstein といい, これは Gorenstein の一般化になっている. 本講演は, エッジ環と呼ばれるグラフから生起する次数付き環の pseudo-Gorenstein 性について議論する.

本講演は, 畑佐悠太氏と小脇修和氏との共同研究 [11] に基づく.

## 1　導入

以下, $\Bbbk$ は体とする. $R = \bigoplus_{k \geq 0} R_0$ を, $R_0 = \Bbbk$ である Cohen–Macaulay 整域な標準的次数付き環とする. このとき, $R$ は正準加群を持つので, それを $\omega_R$ とおく.

$R$ の **Hilbert 級数**とは, $\sum_{k \geq 0} (\dim_{\Bbbk} R_k) t^k$ で定義される級数であり, $R$ が標準的次数付き環なので, 次の形に書き下せる:

$$\sum_{k \geq 0} (\dim_{\Bbbk} R_k) t^k = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s}{(1-t)^{\dim R}}.$$

ここで, $h_s \neq 0$ とする. 分子に現れる多項式 $h_0 + h_1 t + \cdots + h_s t^s$ は $R$ の $h$ **多項式**といい, その係数列 $(h_0, h_1, \ldots, h_s)$ を $R$ の $h$ **列**という. また, このときの $s$ を **socle 次数**という. $a$ を $R$ の $a$ **不変量**, つまり, $a := -\min\{j : (\omega_R)_j \neq 0\}$ とすれば, $\dim R = s - a$, $h_s = \dim_{\Bbbk}(\omega_R)_{-a}$ が成立する (例えば, [3, Section 4.4] を見よ). さらに, 常に $h_0 = 1$ であることも注意しておく.

$h$ 多項式, 及び $h$ 列は, 次数付き環において非常に重要な不変量であり, その次数付き環の様々な性質を反映させる. 実際, Gorenstein 性や, その一般化である level([25]), almost Gorenstein([8]), nearly Gorenstein([12]) といった性質にも, $h$ 列が関わっていることが分かってきている. ここではこれらの概念の定義や詳しい解説はしないが, $h$ 列との関係性について, いくつか知られている事実を述べる:

- $R$ が Gorenstein であることと, $h$ 列が対称的である (つまり, 任意の $i = 1, \ldots, s$ について, $h_i = h_{s-i}$ が成立する) ことが同値である ([26]). 特に, $R$ が Gorenstein なら, $h_s = h_0 = 1$ である.

* koji-matsushita@g.ecc.u-tokyo.jp.ac

- $R$ が level であることと, $R$ の Cohen–Macaulay 型が $h_s$ に等しいことは同値である ([27, 3.2 Proposition]). 特に, $R$ が level なら, $h_s = 1$ であることと, $R$ が Gorenstein であることは同値である.
- もし $s \geq 2$ であって, $R$ が almost Gorenstein ならば, $h_s = 1$([13, Theorem 4.7]).
- もし $R$ が nearly Gorenstein ならば, $h_s = 1$ であることと, $R$ が Gorenstein であることは同値である ([18, Theorem 3.6]).

このように, $h$ 列, 特に, $h_s$ の値は非常に豊富な情報を持っていることが分かる. その中でも, "$h_s$ の値がいつ 1 になるか"は自然で重要な問いになる. このことを背景にして, 論文 [5] から, $h_s = 1$ となる標準的次数付き環 $R$ は **pseudo-Gorenstein** と呼ばれるようになった. 今日, 様々なクラスの標準的次数付き環の pseudo-Gorenstein 性が調べられている (例えば, [5, 22, 23, 19] など).

本講演では, エッジ環と呼ばれるグラフから生起する次数付き環の pseudo-Gorenstein 性に着目する.

## 2 エッジ環

以下, $G$ は有限単純グラフとする. つまり, 頂点数や辺の本数が有限で, 多重辺やループは持たないと仮定する. また, $V(G) = [d] \coloneqq \{1, \ldots, d\}$ を $G$ の頂点集合とし, $E(G)$ を $G$ の辺集合とする. このとき,

$$\Bbbk[G] \coloneqq \Bbbk[t_i t_j : \{i, j\} \in E(G)] \subset \Bbbk[t_1, \ldots, t_d].$$

を $G$ の**エッジ環**という. エッジ環は $\deg(t_i t_j) = 1$ として, 標準的次数付き環になる.

エッジ環は整域ではあるが, Cohen–Macaulay になるとは限らず, いつ Cohen–Macaulay になるのかの特徴づけはまだ与えられていない. しかし, 正規になるための必要十分条件は与えられており, これは $G$ が奇サイクル条件を満たすことと同値である. ここで, $G$ が**奇サイクル条件**を満たすとは, $G$ の各連結成分において, その中の任意の 2 つの奇サイクルが, ある頂点を共有しているか, その 2 つの奇サイクルのある頂点同士が辺で結ばれているときにいう. 特に, $G$ が 2 部グラフであれば, エッジ環は正規になる. エッジ環はアフィン半群環とみなせるので, 正規であれば Cohen–Macaulay となる ([16]). 本講演では, $G$ は常に奇サイクル条件を満たすもののみを扱うことにする.

上の正規性の特徴づけは大杉–日比 ([20]) と Simis–Vasconcelos–Villarreal([24]) によって, 同時期に, 独立に得られた. この論文以降, エッジ環の研究は急速に進み, $h$ 列についても多くの成果が得られている. 実際, 以下のクラスは $h$ 列が計算されている, もしくは, 計算するための方法が与えられている:

- 完全グラフ, 及び, 完全 2 部グラフ ([29, Section 10.6]).
- 内部多項式を用いた, 一般の 2 部グラフのエッジ環の $h$ 列を与える方法 ([17]).
- その他, 特定の形のグラフ ([7, 2, 15]).

さらに, エッジ環の Gorenstein 性, level 性, almost Gorenstein 性, nearly Gorenstein 性についても, いくつか成果が挙げられている ([21, 14, 15, 2, 10]). また, pseudo-Gorenstein 性についても, 2 部グラフにおいては, 内部多項式を用いて十分条件が与えられている ([9]).

本講演では, 2 部グラフのエッジ環の pseudo-Gorenstein 性の完全な特徴づけを与える. また, 2 部グラフでない奇サイクル条件を満たすグラフについても, ある程度成果を得ることが出来たので, それを紹介する.

## 3　2 部グラフの pseudo-Gorenstein エッジ環

この節では, 2 部グラフのエッジ環の pseudo-Gorenstein 性について議論する. それにあたって, いくつかグラフ理論の言葉と事実が必要になるので, それを解説していく.

まず, グラフ $G$ の耳分解について説明する. $G$ が **(開) 耳分解**を持つとは, $G$ が $G = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_r$ という形で書けるときにいう. ただし, $P_i$ は道グラフであって, $P_0$ は長さ 1(ここでいう長さとは, 辺の本数を指す) であり, $i \geq 1$ については, $(P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_{i-1}) \cap P_i$ がちょうど $P_i$ の両端点から成る. グラフ $G$ が耳分解を持つことと $G$ が 2 連結であることは同値であることが知られている (例えば, [4, Proposition 3.1.1]). ここで, $G$ が **2 連結**[*1]であるとは, $G$ のどの 1 つの頂点を取り除いても, 得られるグラフが連結であるときにいう.

$G$ が耳分解を持つとする. 耳分解は一意的でなく, 色々な耳分解の取り方があるが, その中で, 長さが偶数の道グラフの個数が最も小さいものを **optimal** な耳分解といい, そのときの長さが偶数の道グラフの個数を $\psi(G)$ と書く[*2]. 本講演ではこの $\psi(G)$ が重要な役割を果たす.

グラフ $G$ が **matching-covered** であるとは, $G$ が連結であって, どの辺についても, それを含む完全マッチングが存在しているときにいう. 2 部グラフにおいては, matching-covered という性質は様々な性質と同値になる. 実際, 次が正しい:

**定理 1** (cf. [1, Theorems 6.1.5 and 6.1.6])　$G$ を, 部集合分解 $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ を持つ連結 2 部グラフとする. このとき, 次は同値である:

(i) $G$ が matching-covered である;

(ii) $|V_1| = |V_2|$ であって, 任意の空でない部分集合 $T \subsetneq V_1$ に対し, $|N_G(T)| > |T|$ が成立する. ただし, $N_G(T) \coloneqq \{v \in [d] : \{v, w\} \in E(G) \text{ for some } w \in T\}$;

(iii) $G$ が 2 連結で $\psi(G) = 0$.

次の定理が, 我々の主結果において, 最も重要な主張になる:

**定理 2** ([6, Theorems 4.5 and 5.3], [28, Proposition 4.2])　$G$ を 2 連結な 2 部グラフとし, $a$ を $\Bbbk[G]$ の $a$ 不変量とする. このとき,

$$-a = \frac{\psi(G) + |V(G)|}{2}$$

が成立する.

---

*1 ここで述べている 2 連結の定義は, 一般的なものと少し違い, 本来の定義はこの条件に加えて, "$|V(G)| \geq 3$" という仮定が入るのが普通である. これはつまり, 長さ 1 の道グラフは 2 連結グラフとみなさないということであるが, 本講演ではこれも 2 連結と思いたいので, このように定義している.

*2 我々の論文 [11] では, $\phi(G)$ という記号を用いていて, $\psi(G)$ とは少し定義が違い, $\phi(G) = \psi(G) + 1$ という関係がある. 諸事情でこのようにしているが, 我々の主結果は変化しないので, あまり気にしないでいただきたい.

グラフ $G$ の極大 2 連結成分を**ブロック**と呼ぶ.

**命題 3**（[29, Proposition 10.1.48]） $G$ を 2 部グラフとし, $B_1, \ldots, B_n$ をそのブロックとする. このとき, $\Bbbk[G] \cong \Bbbk[B_1] \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[B_n]$ が成立する.

上の命題より, $\Bbbk[G]$ の $h_s$ が 1 であることと, 各ブロック $B_i$ について, $\Bbbk[B_i]$ の $h_s$ が 1 であることは同値である. 従って, 2 部グラフのエッジ環の pseudo-Gorenstein 性を調べるにあたっては, 2 連結を仮定してよい.

次が本講演の主定理である:

**定理 4** $G$ を 2 連結 2 部グラフとする. このとき, 次は同値である:

(i) $\Bbbk[G]$ は pseudo-Gorenstein である;

(ii) $\psi(G) = 0$;

(iii) $G$ は matching-covered である.

**注意 5** 上の定理の (ii)⇒(i) の部分は既に [9] で得られているが, これは内部多項式の理論を利用している. 一方, (ここでは省力するが) 我々の証明では内部多項式を一切利用していない.

我々の主定理から, 様々な系を得ることが出来る. グラフ $G$ の部分グラフ $H$ が $V(H) = V(G)$ を満たすとき, $H$ を**全域部分グラフ**という.

**系 6** $G$ を 2 連結 2 部グラフとし, $H$ を $G$ の 2 連結な全域部分グラフとする. このとき, $\Bbbk[H]$ が pseudo-Gorenstein ならば, $\Bbbk[G]$ も pseudo-Gorenstein である.

特に, $G$ がハミルトンサイクル ($G$ の全ての頂点を通るサイクル) を持つならば, $\Bbbk[G]$ は pseudo-Gorenstein である.

グラフ $G$ のどの頂点も同じ数の辺が接続しているとき, $G$ を**正則グラフ**と呼ぶ.

**系 7** $G$ を連結な正則 2 部グラフであるとする. このとき, $\Bbbk[G]$ は pseudo-Gorenstein である.

ここまで, pseudo-Gorenstein になるための十分条件を与えてきたが, 以下の簡単な必要条件を与えることが出来る:

**系 8** $G$ を, 部集合 $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ を持つ 2 連結 2 部グラフする. このとき, $\Bbbk[G]$ が pseudo-Gorenstein ならば, $|V_1| = |V_2|$ である. 特に, $|V(G)|$ は偶数である.

ここまでの事実たちをまとめると, 以下の図式が得られる:

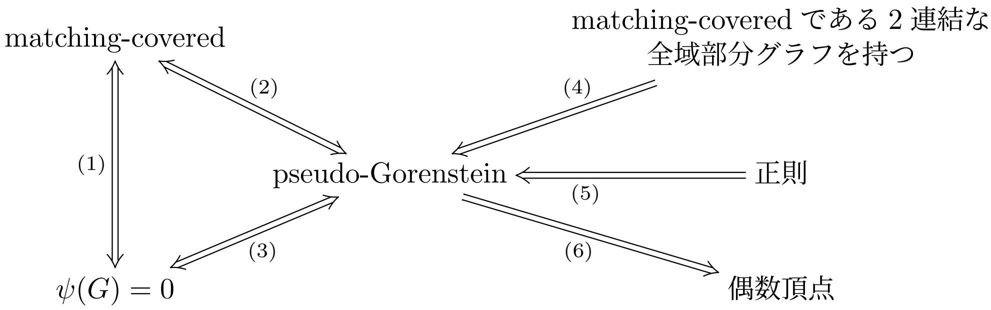


図 1　2 連結 2 部グラフ $G$ に対して成立する包含関係

## 4　非 2 部グラフの pseudo-Gorenstein エッジ環

2 部グラフの場合は完全な特徴づけが与えられたが, 2 部グラフでない場合は非常に難しい問題になる. 実際, 上の図 1 の包含関係はほとんど満たさなくなる.

以下に, 奇サイクル条件を満たし, 2 連結を仮定しても反例が存在することを述べる:

**例 9**　(i) $H_1$ を $V(H_1) = \{1,2,3,4\}$, $E(H_1) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\}\}$ であるグラフとする (図 2). このグラフは matching-covered ではないが, $h$ 多項式は $1 + t$ となるので, “pseudo-Gorenstein $\Longrightarrow$ matching-covered” の反例である.

(ii) $H_2$ を $V(H_2) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$$E(H_2) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,5\},\{1,6\},\{3,6\},\{3,7\},\{5,7\}\}$$

であるグラフとする (図 3). このとき, $\psi(H_2) = 1$ で, $|V(H_2)|$ は奇数であり, $h$ 多項式は $1 + 2t + t^2$ となる. これは “pseudo-Gorenstein $\Longrightarrow$ $\psi(G) = 0$” と “pseudo-Gorenstein $\Longrightarrow$ 偶数頂点” の反例になっている.

(iii) $H_3$ を $V(H_3) = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$E(H_3) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{1,6\},\{1,3\},\{3,5\},\{3,6\}\}$$

であるグラフとする (図 4). このグラフは偶数長のハミルトンサイクルを持ち, $\psi(H_3) = 0$ で, $h$ 多項式は $1 + 3t + 3t^2$ である. 従って, これは “$\psi(G) = 0 \Longrightarrow$ pseudo-Gorenstein” と “matching-covered である 2 連結な全域部分グラフを持つ $\Longrightarrow$ pseudo-Gorenstein” の反例である.

(iv) 5 頂点完全グラフ $K_5$ を考える. これは正則グラフである一方, $h$ 多項式は $1 + 5t + 5t^2$ である. これは “正則 $\Longrightarrow$ pseudo-Gorenstein” の反例である.

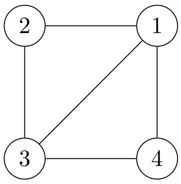


図 2　グラフ $H_1$

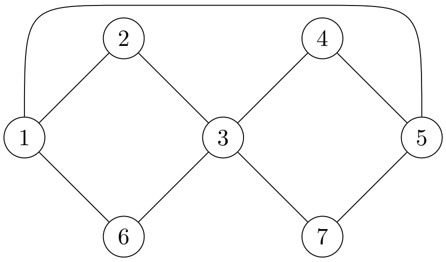


図 3　グラフ $H_2$

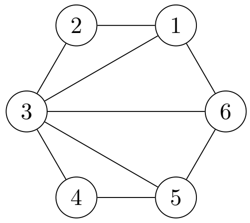


図 4　グラフ $H_3$

このように, 図 1 にある包含関係のほとんどが成立しないことが分かる. ただ, 適当な仮定を加えるなどすると, 十分条件を与えることが出来る. 次の 2 つが非 2 部グラフにおける我々の主結果である:

**定理 10**　$G$ を奇サイクル条件を満たす連結グラフとする. このとき, $G$ が matching-covered であるならば, $\Bbbk[G]$ は pseudo-Gorenstein である.

**定理 11**　$G$ を奇サイクル条件を満たす連結グラフとする. このとき, $G$ が偶数頂点正則グラフならば, $\Bbbk[G]$ は pseudo-Gorenstein である.

## 参考文献


[1] Armen S Asratian, Tristan MJ Denley, and Roland Häggkvist. *Bipartite graphs and their applications*, volume 131. Cambridge university press, 1998.

[2] Kieran Bhaskara, Akihiro Higashitani, and Nayana Shibu Deepthi. $h$-vectors of edge rings of odd-cycle compositions. *arXiv:2311.13573*.

[3] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen–Macaulay rings*. Number 39. Cambridge university press, 1998.

[4] Reinhard Diestel. *Graph theory, Fifth edition*, volume 173. Springer, 2017.

[5] Viviana Ene, Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Sara Saeedi Madani. Pseudo-Gorenstein and level hibi rings. *Journal of Algebra*, 431:138–161, 2015.

[6] András Frank. Conservative weightings and ear-decompositions of graphs. *Combinatorica*, 13:65–81, 1993.

[7] Federico Galetto, Johannes Hofscheier, Graham Keiper, Craig Kohne, Adam Van Tuyl, and Miguel Eduardo Uribe Paczka. Betti numbers of toric ideals of graphs: a case study. *Journal of Algebra and its Applications*, 18(12):1950226, 2019.

[8] Shiro Goto, Ryo Takahashi, and Naoki Taniguchi. Almost Gorenstein rings–towards a theory of higher dimension. *Journal of pure and applied algebra*, 219(7):2666–2712, 2015.

[9] Xiaxia Guan and Xian'an Jin. On coefficients of the interior and exterior polynomials. *arXiv:2201.12531*.

[10] Thomas Hall, Max Kölbl, Koji Matsushita, and Sora Miyashita. Nearly Gorenstein polytopes. *Electron. J. Combin.*, 30(4):Paper No. 4.42, 21, 2023.

[11] Yuta Hatasa, Nobukazu Kowaki, and Koji Matsushita. Pseudo-gorenstein edge rings and a new family of almost gorenstein edge rings. *Communications in Algebra*, 54(1):124–138, 2026.

[12] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Dumitru I Stamate. The trace of the canonical module. *Israel Journal of Mathematics*, 233:133–165, 2019.

[13] Akihiro Higashitani. Almost Gorenstein homogeneous rings and their h-vectors. *Journal of Algebra*, 456:190–206, 2016.

[14] Akihiro Higashitani and Koji Matsushita. Levelness versus almost Gorensteinness of edge rings of complete multipartite graphs. *Communications in Algebra*, 50(6):2637–2652, 2022.

[15] Akihiro Higashitani and Nayana Shibu Deepthi. The h-vectors of the edge rings of a special family of graphs. *Communications in Algebra*, 51(12):5287–5296, 2023.

[16] M. Hochster. Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes. *Ann. of Math. (2)*, 96:318–337, 1972.

[17] Tamás Kálmán and Alexander Postnikov. Root polytopes, tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 114(3):561–588, 2017.

[18] Sora Miyashita. Levelness versus nearly Gorensteinness of homogeneous rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 228(4):107553, 2024.

[19] Sora Miyashita. When do pseudo-gorenstein rings become gorenstein? *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2025.

[20] Hidefumi Ohsugi and Takayuki Hibi. Normal polytopes arising from finite graphs. *Journal of Algebra*, 207(2):409–426, 1998.

[21] Hidefumi Ohsugi and Takayuki Hibi. Special simplices and Gorenstein toric rings. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113:718–725, 2006.

[22] Giancarlo Rinaldo, Francesco Romeo, and Rajib Sarkar. Level and pseudo-Gorenstein path polyominoes. *arXiv:2308.05461*.

[23] Giancarlo Rinaldo and Rajib Sarkar. Level and pseudo-Gorenstein binomial edge ideals. *Journal of Algebra*, 632:363–383, 2023.

[24] Aron Simis, Wolmer V Vasconcelos, and Rafael H Villarreal. The integral closure of subrings associated to graphs. *Journal of Algebra*, 199(1):281–289, 1998.

[25] Richard P. Stanley. Cohen-Macaulay complexes. In *Higher combinatorics (Proc. NATO Advanced Study Inst., Berlin, 1976)*, volume 31 of *NATO Adv. Study Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pages 51–62. Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., 1977.

[26] Richard P. Stanley. Hilbert functions of graded algebras. *Advances in Math.*, 28(1):57–83, 1978.

[27] Richard P. Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*, volume 41 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 1996.

[28] Carlos E Valencia and Rafael H Villarreal. Canonical modules of certain edge subrings.

*European Journal of Combinatorics*, 24(5):471–487, 2003.

[29] Rafael H. Villarreal. *Monomial algebras*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2015.