同じ Jones 多項式をもつ結び目の無限族について

東京都立大学　大学院理学研究科　数理科学専攻
松嶋柚希 (Yuki MATSUSHIMA) *

概要

一般に，2 つの結び目の多項式不変量が異なれば、それらは異なる結び目であるが，その逆は正しいとは限らない．本研究では，結び目の図式の中でも特に対称性をもつものに着目し，その多項式不変量を計算することで，同一の多項式不変量をもつ異なる結び目の無限族を構成した．本講演では，この結び目の無限族について紹介する．

1　導入

3 次元球面 S^3 内の成分 n の絡み目とは，1 次元球面 S^1 の n 個の非行和の S^3 への埋め込みの像のことをいい，特に成分数が 1 の絡み目のことを結び目という．現在まで，大域的な問題として「与えられた結び目が同値であるか判定せよ」という分類問題が考えられている．ここで，与えられた結び目が同値であるとは，2 つの結び目が S^3 上の向きを保つ同相写像で移り合うときのことをいう．また，与えられた 2 つの結び目が同値であることの必要十分条件として，以下で定義される Reidemeister 移動の操作で移り合うことが知られている．

定義 1.1 (Reidemeister 移動)**.** 結び目の図式において，以下の変形を Reidemeister 移動と呼び，左から RI，RII，RIII と表す．

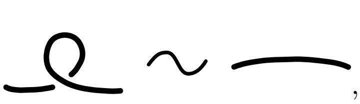

図 1　RI

図 2　RII

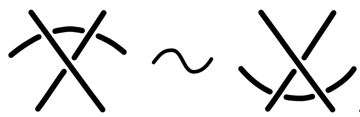

図 3　RIII

結び目理論とは，この分類問題の解決のために位相不変量を研究する分野とも言える．しかし，与えられた 2 つの結び目が同値であることを示すのは大変難しく，今もなお，その位相不変量の研究が続けられている．

結び目の分類の研究には，多項式不変量を用いることが有効な手段の 1 つである．これは，「2 つの結び目の不変量が異なれば，それらは異なる結び目である」という性質に基づいている．しかし，相異なる結び目であるにも関わらず，多項式不変量が一致する例がこれまで数多く知られている．今回はその中でも，Jones 多項式と呼ばれる，1985 年に Jones が組み紐群の表現を用いて定義した，多

* E-mail:matsushima-yuki@tmu.ac.jp

項式不変量に注目する．ここでは，後に Kauffman により再度構成された Kauffman 括弧多項式を用いた定義を紹介する．

定義 1.2 (Kauffman 括弧多項式)**.** 向き付けられていない絡み目の図式 D から変数 A の整係数ローラン多項式への関数であって，以下の 3 つの条件で特徴づけられる関数を Kauffman 括弧多項式という．

1. $< \bigcirc >= 1.$
2. $< D \sqcup \bigcirc >= (-A^{-2} - A^{2}) < D >.$
3. $< \times >= A <)(> + <)(>.$

ここで，$\bigcirc$ は交点のないほどけた結び目を表し，$D \sqcup \bigcirc$ は，図式 D と，単純閉曲線 $\bigcirc$ で自分自身とも D とも交点をもたないものとの和を表す．

注意 1.3. Kauffman 括弧多項式は，RⅡ，RⅢ で不変である．RI では，以下が成立する．

$$< \quad >= -A^{3} < \quad >, \qquad < \quad >= -A^{-3} < \quad > .$$

上の注意 1.3 より，Kauffman 括弧多項式は結び目の位相不変量ではない．そこで，以下の writhe $w(D)$ を考えることにより，結び目の位相不変量となる Jones 多項式が定義できる．

定義 1.4 (writhe)**.** 向き付けられた絡み目の図式 D の writhe $w(D)$ とは，以下の方式で各交点に対して付けられた符号を，D の交点すべてについて足し合わせたものをいう．

$+1$ $\qquad$ -1 .

図 4

定義 1.5 (Jones 多項式)**.** D を向き付けられた絡み目 L の図式とする．このとき，$t^{-1/2}$ に関する整係数ローラン多項式

$$V(L) = ((-A)^{-3w(D)} < D >)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

を L の Jones 多項式という．

Jones 多項式が一致するような, 異なる結び目の研究は, 金信 [1–4], を始め, Jones [5,6], Przytycki [8]，Rolfsen [9,10]，Watson [11,12] 等の研究が知られている．このような結び目の例として，金信が与えた結び目の無限族 [3,4] を挙げる．

定理 1.6 ([3]). 任意の $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して，以下の結び目の無限族を $K(p,q)$ とする．このとき，$\{K(p,q) \mid p$ と q の和が等しい.$\}$ は，Jones 多項式が一致するような異なる結び目の無限族である．

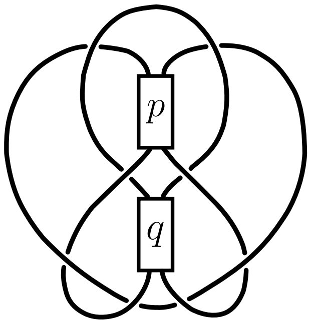

図 5　$K(p,q)$.

ここで，整数 $n \in \mathbb{Z} \cup \infty$ に対して，$\boxed{n}$ は，以下の $n-$ タングルを表す.

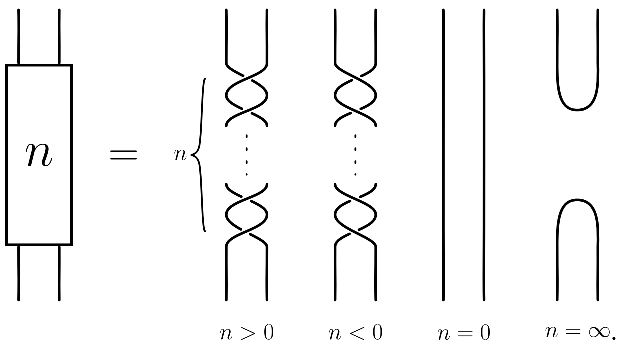

図 6

定理 1.7 ([4]). 任意の $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して，以下の結び目の無限族を $K(p,q,r)$ とする．このとき，$\{K(1,-q,q) \mid q \in \mathbb{N}\}$ は，Jones 多項式が一致するような異なる結び目の無限族である．

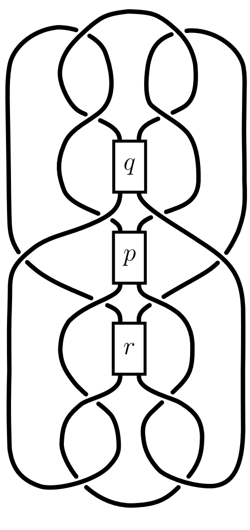

図 7　$K(p,q,r)$.

この結び目の無限族は，以下で定義される Kauffman 多項式という多項式不変量を用いることでお互いを区別することができる．

定義 1.8 (Kauffman 多項式)**.** 次の性質をもつ関数

$$\Lambda : \{\ S^3\text{内の向き付けられた絡み目}\ \} \to \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$$

が一意的に存在する．

1. $\Lambda(U) = 1$ である．ここで，U はほどけた結び目を表す．
2. $\Lambda(D)$ は D に RII，RIIIを施しても不変である．
3. $\Lambda($  $) = a\Lambda($  $)$, $\Lambda($  $) = a^{-1}\Lambda($  $)$.
4. D_+, D_-, D_0, D_∞ を以下の図で定めたとき，次の関係式が成立する．

$$\Lambda(D_+) + \Lambda(D_-) = z(\Lambda(D_0) + \Lambda(D_\infty)).$$

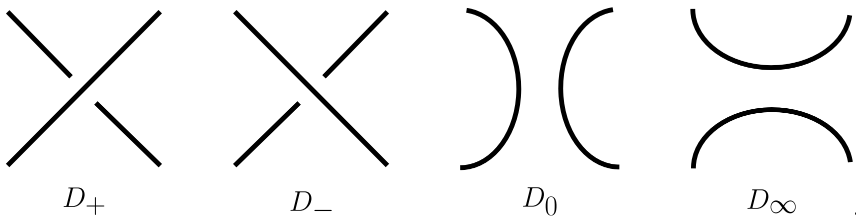

図 8

このとき，向き付けられた絡み目 L の図式を D とし，その writhe を $w(D)$ としたとき，$F(L) = a^{-w(D)}\Lambda(D) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ を Kauffman 多項式という．

この結び目の無限族がもつ特徴の 1 つに，与えられた結び目の平面への射影図を考えたとき，垂直方向を軸として，線対称となっていることが挙げられる．このような図式の対称性をもつ結び目のことを symmetric union という．symmetric union の概念は，1957 年に木下と寺坂によって導入され，Lamm [7] によって一般化された，いわば結び目の連結和の一般化と思えるものである．

定義 1.9 ([7])**.** $\{0\} \times \mathbb{R}$ を軸とする $\mathbb{R}^2$ において，D を向き付けられていない結び目 K の図式，D^* を K の鏡像 K^* の図式とする．ただし，D^* は D を $\{0\} \times \mathbb{R}$ に対して線対称に移動させたものとする．ここで，$i = 0, 1, \cdots, k$ に対して，T_i を $\{0\} \times \mathbb{R}$ 上の，D と D^* の間の $0-$ タングルとする．このとき，図 9 のように，$\mu \geq 1$ に対して，$i = 0, 1, \cdots, \mu - 1$ について，T_i を $\infty-$ タングルに，$i = \mu, \mu + 1, \cdots, k$ について，T_i を n_i- タングルに置き換える．この置き換えた図式を D と D^* の symmetric union といい，$D \cup D^*(T_0, T_1, \cdots T_k)$ と表す．さらに，K および K^* を $D \cup D^*(T_0, T_1, \cdots T_k)$ の partial knot という．

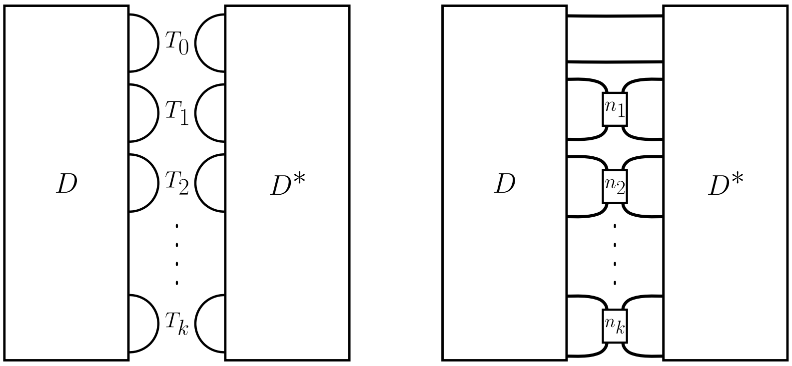

図 9

例 1.10. 定理 1.6 の結び目の無限族は，8 の字結び目 4_1 が partial knot であり，4_1 の symmetric union $4_1 \cup {4_1}^*(\infty, p, q)$ である．また，定理 1.7 の結び目の無限族は，三葉結び目 3_1 が partial knot であり，3_1 の symmetric union $3_1 \cup {3_1}^*(\infty, -q, 1, q)$ である．

symmetric union は，結び目理論における局所問題の 1 つである「スライス・リボン予想」と呼ばれるものと関連が深く，現在もなおその研究が行われている．

今回は定理 1.7 の結び目の無限族を参考に，Jones 多項式が一致する結び目の無限族を構成したので紹介する．

2 主定理

定理 2.1. 任意の $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して，以下の結び目の無限族を $M(p, q, r)$ とする．このとき，$\{M(1, q, -q) \mid q \in \mathbb{N}\}$ は，Jones 多項式が一致するような異なる結び目の無限族である．

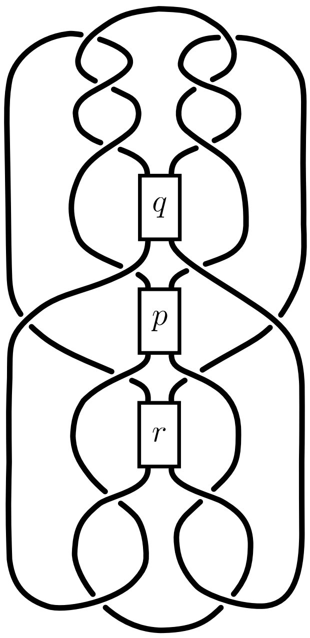

図 10

注意 2.2. この結び目は，4_1 が partial knot であり，4_1 の symmetric union $4_1 \cup {4_1}^*(\infty, q, 1, -q)$ である．また，これらの結び目は Kauffman 多項式が異なることを用いて区別できる．

主結果は，$M(p,q,r)$ の Jones 多項式及び Kauffman 多項式を直接計算することにより得られる．以下の命題 2.3 と命題 2.5 は，それぞれ $M(p,q,r)$ の Jones 多項式及び Kauffman 多項式を計算して得られた結果である．

命題 2.3. 任意の $p,q,r \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$V(M(p,q,r)) = (-1)^{-q-r}(V(M(p,0,0)) - 1) + 1.$$

証明の概略. 図 10 に含まれる，$q-$ タングル内の q 個の交点と $r-$ タングル内の r 個の交点の交差解消を施して Kauffman 括弧多項式を計算すると，

$$\begin{aligned} < M(p,q,r) > = A^{-q-r} < M(p,0,0) > &+ (-1)^q A^{-r+3q}(1-(-A^{-4})^r) \\ &+ (-1)^r A^{-q+3r}(1-(-A^{-4})^q) + (-1)^{q+r} A^{3(q+r)}(1-(-A^{-4})^r)(1-(-A^{-4})^q) \end{aligned}$$

が得られる．ここから $w(M(p,q,r)) = p+q+r$ であることを用いて計算を行うことで，求める多項式が得られる． □

注意 2.4. 命題 2.3 より，$\{M(p,q,r) \mid p$ と q と r の和が等しい.$\}$ は Jones 多項式が一致する結び目の無限族である．

定理 2.5. 任意の $q,q' \in \mathbb{Z}$ に対して，$F(M(1,q,-q))$ と $F(M(1,q',-q'))$ が一致する必要十分条件は，$q=q'$ となることである．

証明の概略. この計算は [4] を参考に行っているため，詳細はそちらを参照されたい．図 10 に含まれる，$q-$ タングル内の q 個の交点と $r-$ タングル内の r 個の交点の交差交換及び交差解消を施して $\Lambda(M(p,q,r))$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \Lambda(M(p,q,r)) &= {\sigma_q}^2(\Lambda(M(p,1,-1)) - \Lambda(M(p,1,-1))) \\ &- \sigma_q \sigma q - 1(\Lambda(M(p,1,0)) - \Lambda(M(p,0,1))) \\ &+ \Lambda(M(p,0,0)) \\ &+ a^{-p}(-{\sigma_q}^2 z a^{-1} - \sigma_q \tau_q + \sigma_{q+1} \tau q + a^{-q} \tau_{-q})(\Lambda(U^2)) \end{aligned}$$

が得られる．ここで，U^2 はほどけた 2 成分の絡み目を表し，$\sigma_i \in \mathbb{Z}[z]$ と $\tau_i \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z]$ は

$$\begin{gathered} \sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} = z\sigma_i, \\ \tau_{i-1} + \tau_{i+1} = z\tau_i + a^{-i}z, \\ \sigma_0 = \tau_0 = \tau_1 = 0, \quad \sigma_1 = 1 \end{gathered}$$

で定義される多項式である．このとき，$\Lambda(M(1,q,-q))$ を考える．まず，$q \geq 3$ のとき，z の最高次数が $2q+7$ であることが直接の計算で確かめられる．$q = 0,1,2$ のときは，計算機を用いて $F(M(1,0,0)), F(M(1,1,-1)), F(M(1,2,-2))$ を実際に求めることで，互いに異なることがわかる．ここから求める結果を得る． □

定理 *2.1* の証明．命題 2.3 より，任意の $q \in \mathbb{N}$ に対して，

$$V(M(1,q,-q)) = V(M(1,0,0))$$

が得られる．また，命題 2.5 より，これらの結び目を区別することができる． $\square$

参考文献

[1] T. Kanenobu, *Examples on polynomial invariants of knots and links*, Math. Ann. **275** (1986), no. 4, 555–572.

[2] T. Kanenobu, *Examples on polynomial invariants of knots and links. II*, Osaka J. Math. **26** (1989), no. 3, 465–482.

[3] T. Kanenobu, *Infinitely many knots with the same polynomial invariant*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 1, 158–162.

[4] T. Kanenobu, *Infinitely many knots with the same polynomial invariant, II*, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[5] Jones, V. F. R., *Commuting transfer matrices and link polynomials*, Internat. J. Math. **3** (1992), no. 2, 205—212.

[6] Jones, V. F. R., *Coincident link polynomials from commuting transfer matrices*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (1992), 137-–151.

[7] C. Lamm, *Symmetric unions and ribbon knots*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 3, 537–550.

[8] J. H. Przytycki, *Search for different links with the same Jones' type polynomials: ideas from graph theory and statistical mechanics*, in *Panoramas of mathematics (Warsaw, 1992/1994)*, 121–148, Banach Center Publ., 34, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw.

[9] D. P. O. Rolfsen, *The quest for a knot with trivial Jones polynomial: diagram surgery and the Temperley-Lieb algebra*, in *Topics in knot theory (Erzurum, 1992)*, 195–210, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 399, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[10] D. P. O. Rolfsen, *Global mutation of knots*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), no. 3, 407–417.

[11] L. Watson, *KNOTS, TANGLES AND BRAID ACTIONS*, Master Thesis, THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, 2004.

[12] L. Watson, *Any tangle extends to non-mutant knots with the same Jones polynomial*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no. 9, 1153–1162.