Secondary Characteristic Classes in CR Geometry

東京大学大学院　数理科学研究科　数理科学専攻
松本周也 (Shuya Matsumoto)*

2026 年 1 月 23 日

概要

岡潔らの結果によれば、複素領域が正則関数の定義域として自然であるかどうか (正則性) は、その境界が満たす幾何学的条件 (擬凸性) によって特徴づけられます。こうした境界を微分幾何学的に調べる理論が CR 幾何学です。

本講演では、Chern–Simons 理論を用いて CR 多様体の 2 次特性数を定義し、それが CR 幾何学において古くから知られている不変量を大域的に一般化するものであることを紹介します。さらに、Kähler–Einstein 計量から得られる領域の双正則不変量との比較を通じて、この 2 次特性数の整数性が、CR 多様体を Euclid 空間に超曲面として埋め込む際の障碍を与えることを説明します。

1　導入

1.1　CR 多様体の定義

CR 多様体とは、一言で言えば、複素多様体の中の実超曲面を一般化した概念です。$X^{2(n+1)}$ を複素多様体、M^{2n+1} を実超曲面とします。このとき、M には外側の複素多様体に由来する幾何構造

$$T^{1,0}M \coloneqq T^{1,0}X|_M \cap T_{\mathbb{C}}M$$

が備わっています。さらに、複素多様体の可積分性から

$$[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$$

が成り立ちます。この状況を抽象化して、次の定義をします。

定義 1.1. M^{2n+1} を奇数次元多様体とします。M の上に超平面分布 $HM \subset TM$ があって、そこに概複素構造 $J\colon HM \to HM$ が備わっており、概複素構造から得られる複素化の分解

$$T_{\mathbb{C}}M \supset H_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

に関して

$$[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$$

が成り立つとき、$(M, T^{1,0}M)$ を **CR 多様体**といいます。$T^{1,0}$ を保つような CR 多様体の間の微分同相写像を **CR 同型写像**といいます。

もちろん、外側の複素多様体の双正則写像に由来する実超曲面の間の微分同相写像は CR 同型写像になっています。

* E-mail:syuyamatsumoto@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

次に、CR 幾何学の分野で重要な凸性の概念を定義します。まずは CR 多様体 M が複素多様体 $X^{2(n+1)}$ の領域 Ω の境界 $M=\partial\Omega$ である場合を考えます。このとき、M には Ω の境界としての向きが定まっています。ρ を Ω の内部で負、外部で正であるような定義関数とします。ρ の複素 Hessian が定める $T^{1,0}M$ の上の 2 次形式

$$(Z,W)\mapsto \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\rho(Z,\overline{W}),\quad Z,W\in T^{1,0}M$$

が正定値であるとき, 領域 Ω ないし向きづけられた CR 多様体 M は**強擬凸**であるといいます。

$$\theta \coloneqq \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\partial}-\partial)\rho|_{TM}$$

とおくと、θ は $HM\lrcorner\theta=0$ を満たす実 1 形式であり、その外微分 $d\theta=\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\rho$ は先程考えていた ρ の複素 Hessian と一致します。この状況を抽象化して、次の定義をします。

定義 1.2. M を向きづけられた CR 多様体とするとき、

$$(TM/HM)^*\simeq HM^{\perp}\ (\subset T^*M)$$

の positive な大域切断 θ がとれます。θ の外微分が定める $T^{1,0}M$ 上の 2 次形式

$$l_\theta(Z,W)\coloneqq d\theta(Z,\overline{W})$$

を **Levi 形式**といいます。θ を $\widehat{\theta}=e^{\Upsilon}\theta$ $(\Upsilon\in C^\infty(M,\mathbb{R}))$ に取り替えると、Levi 形式は $l_{\widehat{\theta}}=e^{\Upsilon}l_\theta$ に替わるので、その符号は θ のとり方によらずに定まります。そこで、Levi 形式が正定値であるとき、M は**強擬凸**であるといいます。このとき $2n+1$ 形式

$$\theta\wedge(d\theta)^n$$

は体積形式になっているので、θ は接触形式になっています。以降、CR 多様体が強擬凸であるという仮定のもとで、θ のことを単に接触形式と呼びます。

1.2 なぜ CR 幾何学か

ここでは、どうして CR 幾何学が重要であるかについて、個人的な見解を述べます。$\mathbb{C}^{n+1}$ の領域 Ω は、その上の正則関数 f で、これ以上定義域を拡張することができないようなものが存在するとき、**正則領域**であるといいます。また、C^2 級の境界をもつ領域 Ω について、その境界の Levi 形式が非負であるとき、Ω は**擬凸領域**であるといいます。岡潔らの結果により、この 2 つの概念は一致することが知られています。

定理 1.3 ([19, 2, 18])**.** Ω を $\mathbb{C}^{n+1}$ の領域で、C^2 級の境界をもつものとする[*1]。このとき、Ω が正則領域であることと擬凸領域であることは、同値である。

それでは、正則領域を分類することを考えてみましょう。ここでは特に、Ω が有界で、なめらかな境界をもっていて、境界 $M=\partial\Omega$ が強擬凸である場合に注目します。そのような領域が 2 つあったとして、それらを $\Omega_i\,(i=1,2)$ で表し、境界を $M_i=\partial\Omega_i$ とおきます。

境界の間の CR 同型写像 $f\colon M_1\to M_2$ があったとします。このとき、Bochner–Hartogs 原理 [1] と呼ばれる論法により、f がある双正則写像 $F\colon\Omega_1\to\Omega_2$ の境界値になっていることが示されます。逆に、Fefferman は次の定理を示しました。

[*1] 擬凸性の概念は境界が C^2 級でなくても定義でき、この定理も境界の微分可能性の仮定なしに成り立ちます。本稿では境界上の微分幾何学に重きをおいているので、この形で定理を述べました。

定理 1.4 ([10])**.** 有界強擬凸領域の間の双正則写像 $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は、境界までなめらかに延長され、*CR* 同型写像 $f\colon M_1 \to M_2$ を引き起こす。

これにより、有界強擬凸領域を分類するためには、その境界である強擬凸 CR 多様体を分類すればよいことがわかりました。この意味で、強擬凸 CR 多様体の CR 幾何学は多変数複素解析の分野で非常に重要なものになっています。

1.3 CR 多様体の局所不変量

ここでは、強擬凸 CR 多様体を局所的に完全に分類する Chern の結果 [8] を紹介します。結果として、Cartan 束上の標準 Cartan 接続というものが CR 構造を分類することになるのですが、まずはそのモデルケースとして、CR 球面上の標準 Cartan 接続を扱います。

行列

$$h = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & I_n & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

で与えられる $\mathbb{C}^{n+2}$ の Lorentz–Hermite 計量を考えます。h に関して長さが 0 である非零ベクトル全体の集合を

$$\mathcal{N} = \left\{ v \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} \mid \|v\|_h = 0 \right\}$$

とおきます。このとき、射影 $[\cdot] : \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^{n+1}$ による $\mathcal{N}$ の像 $[\mathcal{N}]$ は、($\mathbb{C}P^{n+1}$ の実超曲面としての)CR 構造も込めて球面 $\mathbb{S}^{2n+1}$ と同一視することができます。$\mathrm{SU}(h) = \mathrm{SU}(n+1,1)$ の $\mathcal{N}$ への作用は $\mathbb{S}^{2n+1}$ の CR 自己同型を引き起こし、$\mathrm{PSU}(n+1,1) = \mathrm{SU}(n+1,1)/\mathbb{Z}_{n+2}$ は $\mathbb{S}^{2n+1}$ の上に効果的に作用します。したがって、$P \subset \mathrm{PSU}(n+1)$ を球面上の 1 点の安定化部分群とすれば、$\mathbb{S}^{2n+1} = \mathrm{PSU}(n+1,1)/P$ であり、主 P 束 $\mathrm{PSU}(n+1,1) \to \mathbb{S}^{2n+1}$ が得られます。この主 P 束が Cartan 束のモデルであり、$\mathrm{PSU}(n+1,1)$ の Maurer–Cartan 形式 $\omega_{\mathrm{MC}} \in A^1(\mathrm{PSU}(n+1,1), \mathfrak{su})$ が標準 Cartan 接続のモデルになっています。

一般には、次のことが成り立ちます。

定理 1.5 ([8, 24])**.** 強擬凸 *CR* 多様体 M に対して、ある一定の手続きによって、主 P 束 $\mathcal{G} \to M$ が構成される。$\mathcal{G}$ の上には、以下の *4* 条件を満たす微分形式 $\omega \in A^1(\mathcal{G}, \mathfrak{su})$ がただ一つ存在する。

1. ω を $\mathcal{G}$ の各ファイバーに制限したものは、P の *Maurer–Cartan* 形式を与える。
2. 構造群 P の $\mathcal{G}$ への右作用に関して、$R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$ が成り立つ。
3. 各点 $u \in \mathcal{G}$ に対して、$\omega_u\colon T_u\mathcal{G} \to \mathfrak{su}(n+1,1)$ は同型写像である。
4. 曲率形式 $\Omega \coloneqq d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ はある *Lie* 環論的な条件*2をみたす。

$\mathcal{G}$ を ***Cartan* 束**、ω を**標準 *Cartan* 接続**と呼ぶ。

*(*分類定理*):* 強擬凸 *CR* 多様体の間に *CR* 同型写像が存在するための必要十分条件は、*Cartan* 束の間の写像で、標準 *Cartan* 接続を保つものが存在することである。

一般に微分形式を保つ写像の存在は Frobenius の定理によって判定できるので、Chern の結果は、強擬凸 CR 構造の同値性を微分式系の可積分性のレベルにまで還元したことになります。

---

*2 具体的な条件式については [8] を、Lie 環論的な導出については [17] を見てください。

1.4 Cheeger–Simons 微分指標

前節では、標準 Cartan 接続が強擬凸 CR 構造の局所的な情報をすべて持っていることを説明しました。ここでは、接続から情報を引き出す理論として、Cheeger–Simons 微分指標 [6] を紹介します。

$E \to M$ を階数 k の複素ベクトル束、∇ をその上の接続とします。不変多項式 $\Phi \in I^*(\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C}))$ に対し、特性形式 $\Phi(\nabla)$ そのものは接続のとり方に依存しますが、その de Rham コホモロジー類は依存しません。そこで、「微分したら特性形式になるもの」を考えると、それは接続のとり方に強く依存するであろうことが期待されます。しかし特性形式は一般に完全であるとは限らないので、なにか微分形式や特異コチェインの枠組みを超えた概念が必要です。

定義 1.6 ([6])**.** M を多様体とします。なめらかな $k-1$ サイクルに $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元を対応させる準同型写像

$$f\colon Z_{k-1}(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

に対して、ある微分形式 $\omega \in A^k(M)$ が存在して $f \circ \partial = \omega \mod \mathbb{Z}$ となるとき、すなわち

$$f(\partial c) = \int_c \omega + \mathbb{Z}, \quad c \in C_k(M,\mathbb{Z})$$

が成り立つとき、f を次数 k の**微分指標**といいます。

Chern–Weil 準同型は微分指標の世界にまで持ち上げることができます。階数 k の複素ベクトル束とその上の接続の組 $(E \to M, \nabla)$ を対象とし、接続を保つ束写像を射とする圏を $\mathscr{E}_k$ としましょう。$\Phi \in I_0^r(\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C}))$ を特性類が整係数になるような不変多項式とします。

定理 1.7 ([6])**.** $\mathscr{E}_k$ から次数 $2r$ の微分指標のなす圏への反変関手 $S_\Phi\colon (E \to M, \nabla) \mapsto S_\Phi(\nabla)$ で、$S_\Phi(\nabla)\circ\partial = \Phi(\nabla)$ を満たすものがただ一つ存在する。

本稿では $S_\Phi(\nabla)$ のことを **Cheeger–Simons 微分指標**と呼ぶことにします。

「微分したら特性形式になるもの」として最も有名なのは、Chern–Simons 形式 [9] でしょう。彼らのアイデアは、ベクトル束 $E \to M$ をそのフレーム束 $\pi\colon \mathcal{F}(E) \to M$ に引き戻したもの π^*E は自明束であるから、特性形式を引き戻したもの $\pi^*\Phi(\nabla)$ は完全であり、$dT_\Phi(\nabla) = \pi^*\Phi(\nabla)$ をみたす $\mathcal{F}(E)$ 上の微分形式 $T_\Phi(\nabla)$ が存在するであろう、というものでした。実際にそのような $T_\Phi(\nabla)$ の標準的な構成方法があり、**Chern–Simons 形式**と呼ばれています。Cheeger–Simons 微分指標と Chern–Simons 形式の間には次の関係が成り立ちます。

命題 1.8. $\pi^*S_\Phi(\nabla)$ は、$T_\Phi(\nabla)$ を $Z_{k-1}(\mathcal{F}(E),\mathbb{Z})$ に制限し、値を mod $\mathbb{Z}$ したものに等しい。

最後に、Cheeger–Simons 微分指標が「微分したら特性形式になる」ことから、Stokes の定理との類似で予想されうる事実を紹介します。

命題 1.9. Ω^{2n+2} をコンパクトかつ向きづけられた境界付き多様体、$M^{2n+1} = \partial\Omega$ をその境界とする。$E \to \Omega$ を階数 k の複素ベクトル束、∇ をその上の接続とし、整係数不変多項式 $\Phi \in I_0^{n+1}(\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C}))$ をとる。このとき、

$$\langle S_\Phi(\nabla|_M), M\rangle = \int_\Omega \Phi(\nabla) + \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

2 先行研究

ここでは、標準 Cartan 接続の Chern–Simons 形式から得られる大域 CR 不変量である Burns–Epstein 不変量について、今回の研究と直接関係する 3 つの先行研究を紹介します。

2.1 Burns–Epstein '88 [3]

M を 3 次元コンパクト強擬凸 CR 多様体で、$T^{1,0}M$ が自明であるものとします。このとき、Cartan 束 $\mathcal{G}$ も自明になるので、大域切断 $s\colon M \to \mathcal{G}$ をとることができます。そこで

$$\mu_{c_2}(M) \coloneqq \int_M s^* T_{c_2}(\omega)$$

とおくと、これは s のとり方によらないことが直接計算によって確かめられます。μ_{c_2} を **Burns–Epstein 不変量**と言います。

Burns–Epstein 不変量のもともとの動機は、CR 多様体の埋め込み不可能性を、不変量の非整数性から導くことでした。実際、Chern–Simons の原論文 [9] は、Riemann 多様体の Levi–Civita 接続の Chern–Simons 形式から同様にして得られる不変量の非整数性が、Riemann 多様体を与えられた余次元の Euclid 空間に共形埋め込みする際の障碍を与えていることを示しています。しかし、次の例が示すように、μ_{c_2} の非整数性は CR 多様体の埋め込み不可能性を導きませんでした。

例 2.1. $\Omega_r = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid (\log|z|)^2 + (\log|w|)^2 < r^2\right\}$ を Reinhardt 領域とし、その境界を $M_r = \partial\Omega_r$ とおきます。M_r は定義から $\mathbb{C}^2$ に埋め込み可能です。しかし、

$$\mu_{c_2}(M_r) = \frac{3\pi}{8r^2}$$

が成り立ちます。

後に示すように、3 次元 CR 多様体の $\mathbb{C}^2$ への埋め込み不可能性を検出するのは、c_2 ではなく、$(c_1)^2$ に対応する Chern–Simons 不変量でした。

2.2 Burns–Epstein '90 [4]

こんどは M を $\mathbb{C}^{n+1}$ の有界強擬凸領域 Ω の境界とします。この設定では Cartan 束が自明になるとは限らないので、Cartan 束の大域切断をとることはできません。そこで Burns と Epstein は、Cartan 束上の特別なサイクル $c \in H_{2n+1}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ で、射影すると CR 多様体の基本類になるものを考え、その上で標準 Cartan 接続の Chern–Simons 形式を積分することによって、CR 不変量を定義しました：不変多項式 $\Phi = c_{i_1} \cdots c_{i_p}$ $(i_1 + \cdots + i_p = n+1)$ に対して、

$$\mu_\Phi(M) \coloneqq \int_c T_\Phi(\omega)$$

を **Burns–Epstein 不変量**と呼びます。

さらに彼らは、不変量が境界付き Gauss–Bonnet 型の公式の境界項になることを示しました。これについて説明するために、少し準備をします。

2.2.1 Monge-Ampère 方程式

Ω 上の実数値関数 ρ に対して、Monge–Ampère 作用素 $\mathcal{J}$ を

$$\mathcal{J}[\rho] := \det \begin{bmatrix} \rho & \frac{\partial \rho}{\partial z^{\overline{j}}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z^i} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^i \partial z^{\overline{j}}} \end{bmatrix}$$

で定義します。Cheng–Yau [7] の結果より、Ω の定義関数であって、Monge–Ampère 方程式

$$\mathcal{J}[\rho] = -1 \quad \text{on } \Omega$$

を満たすものが一意に存在することが知られているのですが、この定義関数の境界正則性は $\rho \in C^{n+(5/2)-\varepsilon}(\overline{\Omega})$ 程度であり、特に n が小さいときに不都合が生じる可能性があります。そこで、Monge–Ampère 方程式の Fefferman [11] の意味での近似解

$$\mathcal{J}[\rho] = -1 + O(\rho^{n+2}), \quad \rho \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$$

をとり、以降これをひとつ固定します。

2.2.2 繰り込み接続

Ω 上の完備 Kähler 計量

$$g = -\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\log(-\rho)$$

を考えます。上述の Monge–Ampère 方程式は、g が Kähler–Einstein であることを述べているのですが、今回は近似解をとっているため、境界に近ければ近いほど Kähler–Einstein になっています。完備性から、g およびその Chern 接続 ∇^g は境界に近づくにつれて発散していきますが、∇^g の発散成分を

$$Y_{i\ k}^{\ j} := (\delta_i^{\ j}\rho_k + \delta_k^{\ j}\rho_i)/(-\rho)$$

とおいて ∇^g から引くことによって、境界までなめらかに延長される接続 $\nabla = \nabla^g - Y$ が得られます。これを**繰り込み接続**と呼びます。

さて、Burns と Epstein は次の定理を証明しました。

定理 2.2. 次の境界付き *Gauss-Bonnet* 型公式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} c_{n+1}(\nabla) = \chi(\Omega) + \mu_{c_{n+1}}(M)$$
$$\int_{\Omega} c_{i_1} \cdots c_{i_p}(\nabla) = \mu_{c_{i_p}\cdots c_{i_p}}(M) \quad (p > 1)$$

2.3 丸亀 '16 [15]

Burns–Epstein '90 の不変量の定義におけるサイクル c は、$\mathbb{C}^{n+1}$ の座標に依存しており、それが不変量の一般化の妨げになっていました。そこで丸亀 [15] は、最後に述べた境界付き Gauss–Bonnet 型公式を介して、Burns–Epstein 不変量を次のように一般化しました。

$X^{2(n+1)}$ を複素多様体、Ω をその相対コンパクトな強擬凸領域とし、境界を $M = \partial\Omega$ とおきます。繰り込み接続を構成するために、Ω の定義関数 ρ で、Monge–Ampère 方程式の [14] の意味での近似解になっているものが存在すると仮定します。これは次に紹介する擬 Einstein 構造の存在と同値になっています。

2.3.1 擬 Einstein 構造

CR 多様体 M の標準束を $\mathcal{K} = \bigwedge^{n+1}(T^{0,1}M)^{\perp}$ で定義します。M の接触形式 θ を決めるごとに、標準束上の接続 D_θ が、[13, 2 章] のようにして決まります。

定義 2.3. D_θ が平坦であるとき、θ を**擬 Einstein 構造**と呼びます。

ρ が Monge–Ampère 方程式の [14] の意味での近似解であるとき、$\theta = \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\partial} - \partial)\rho|_{TM}$ は M の擬 Einstein 構造になっています。この対応により、近似解の存在と境界上の擬 Einstein 構造の存在は同値であることが知られています [14]。特に、$\mathbb{C}^{n+1}$ の有界強擬凸領域の境界は必ず擬 Einstein 構造を持っています。

さて、この ρ から前と同様に繰り込み接続 ∇ を構成します。ξ を M に沿った外向き法線 $(1,0)$ ベクトルとし、$\nabla_{\xi\text{-triv}}$ を $T^{1,0}X|_M$ の接続で、ξ を平行化するものとします。丸亀 [15] は次の定理を示しました[*3]。

定理 2.4. 繰り込み *Chern–Gauss–Bonnet* 公式

$$\int_\Omega c_{n+1}(\nabla) = \chi(\Omega) + \int_M c_{n+1}(\nabla_{\xi\text{-triv}}, \nabla)$$

が成り立つ[*4]。境界積分は *CR* 不変量である。これを $\mu_{c_{n+1}}(M)$ と書き、***Burns–Epstein* 不変量**と呼ぶ。

3 主結果

3.1 境界付き Gauss–Bonnet 型公式の一般化

丸亀 '16 を参考にして、境界付き Gauss–Bonnet 型公式を一般化しました。丸亀 '16 の設定で、さらに $T^{1,0}X|_M$ には $r+1$ フレーム $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_{r+1})$、すなわち至るところ一次独立な $r+1$ 個の大域切断が存在すると仮定します。このとき障碍理論により、**留数サイクル**と呼ばれる $2r$ サイクル

$$\mathrm{Res}_{c_q}(\boldsymbol{s}) \in H_{2r}(\Omega, \mathbb{Z}), \quad q = n - r + 1$$

が存在して、$\boldsymbol{s}$ を平行化する任意の接続 $\nabla_{\boldsymbol{s}\text{-triv}}$ に対して

$$\int_\Omega (c_q \cdot \Psi)(\nabla) = \left\langle \Psi(T^{1,0}\Omega), \mathrm{Res}_{c_q}(\boldsymbol{s}) \right\rangle + \int_M c_q(\nabla_{\boldsymbol{s}\text{-triv}}, \nabla) \wedge \Psi(\nabla) \tag{3.1}$$

が成り立ちます [20, 21]。ここで $\Psi = c_{j_1} \cdots c_{j_p}$ $(j_1 + \cdots + j_p = r = n - q + 1)$ とおきました。真ん中のペアリングは常に整数値であることに注意してください。丸亀'16 の式は $r = 0$、$\boldsymbol{s} = (\xi)$ とおいた場合に相当します。$r > 0$ のときは、一般に $r+1$ フレーム $\boldsymbol{s}$ の標準的なとり方が無いため、$\boldsymbol{s}$ のとり方を変えるごとに境界積分の値は整数だけ変化します。それでも、次の定理が成り立ちます。

定理 3.1. 式 *(3.1)* の境界積分を *mod* $\mathbb{Z}$ したもの

$$\int_M c_q(\nabla_{\boldsymbol{s}\text{-}triv}, \nabla) \wedge \Psi(\nabla) + \mathbb{Z}$$

は *CR* 不変量である。

この結果は、最高次の Chern 多項式以外の不変多項式に対応する Burns–Epstein 不変量を一般化するには、値を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で考えたほうが自然であることを示唆しています。

[*3] ξ や $\nabla_{\xi\text{-triv}}$ のとり方などを少し一般化してあります。

[*4] $c_{n+1}(\nabla_{\xi\text{-triv}}, \nabla)$ は相対 Chern–Simons 形式です。例えば [21] を見てください。

3.2 不変量の定義

M^{2n+1} をコンパクト強擬凸 CR 多様体で擬 Einstein 構造をもつものとします。Cartan 束 $\mathcal{G}$ の構造群 P は $\mathrm{PSU}(n+1,1) = \mathrm{SU}(n+1,1)/\mathbb{Z}_{n+2}$ の部分群なので、局所的に $n+2$ 重被覆 $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ をとって、構造群を $\widetilde{P} \subset \mathrm{SU}(n+1,1)$ にすることができます。$\widetilde{P}$ の標準的な表現に関する $\widetilde{\mathcal{G}}$ の同伴ベクトル束

$$\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{G}} \times_{\widetilde{P}} \mathbb{C}^{n+2}$$

を**トラクター束**、標準 Cartan 接続の同伴接続 $\nabla^{\mathcal{T}}$ を**標準トラクター接続**と呼びます。

トラクター束は局所的にしか存在しませんが、CR 多様体の標準束の分数べきをテンソルして

$$\mathcal{T}' = \mathcal{K}^{-\frac{1}{n+2}} \otimes \mathcal{T}$$

とおくと、これは大域的に存在することがわかります*5。標準束の分数べきには擬 Einstein 構造からくる平坦接続 D_θ が備わっているので、$\mathcal{T}'$ 上の接続を

$$\nabla^{\mathcal{T}'} = D_\theta \otimes \nabla^{\mathcal{T}}$$

とおきます。$\Phi = c_{i_1} \cdots c_{i_p}$ $(i_1 + \cdots + i_p = n+1)$ とおきます。

定理 3.2. *Cheeger–Simons* 微分指標の基本類における値

$$\widetilde{\mu}_\Phi(M) \coloneqq \left\langle S_\Phi(\nabla^{\mathcal{T}'}), M \right\rangle \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

は擬 *Einstein* 接触形式 θ のとり方によらない、*CR* 不変量である。これを ***Burns–Epstein* 不変量**と呼ぶ。

定義から直ちに、

命題 3.3. *Burns–Epstein '88* の状況で、

$$\widetilde{\mu}_{c_2}(M) = \mu_{c_2}(M) + \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

また、CR 幾何学における ambient metric construction [25, 12, 5] と丸亀 [16] の計算と命題 1.9 より、

定理 3.4. もし $T^{1,0}X|_M$ が $r+1$ フレーム $\boldsymbol{s}$ をもてば、式 *(3.1)* の境界積分に関して

$$\widetilde{\mu}_{c_q \cdot \Psi}(M) = \int_M c_q(\nabla_{\boldsymbol{s}\text{-}triv}, \nabla) \wedge \Psi(\nabla) + \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

系 3.5. $\widetilde{\mu}_\Phi$ は、*Burns–Epstein '90* や丸亀 *'16* における不変量を *mod* $\mathbb{Z}$ したものとも一致する。

Ω が $\mathbb{C}^{n+1}$ の有界強擬凸領域であれば、$T^{1,0}\mathbb{C}^{n+1}|_M$ は必ず $n+1$ フレームをもつので、$c_1(\nabla) = 0$ on M であることも合わせると、

系 3.6. M^{2n+1} が $\mathbb{C}^{n+1}$ に埋め込めるならば、$\widetilde{\mu}_{c_1 \cdot \Psi}(M) = 0$ である。

これより、$\widetilde{\mu}_{c_1 \cdot \Psi} \neq 0$ であることを示せば、CR 多様体は実余次元 1 の複素 Euclid 空間に埋め込めないことが従うのですが、まだそのような非自明な例は見つかっていません。

---

*5 例えば [25] を見てください。

3.3 計算例

Y^{2n} をコンパクト複素多様体、$(L,h)\to Y$ を負のラインバンドルとします。曲率形式から得られる Kähler 計量を

$$\omega \coloneqq -\mathrm{i}\Theta_h = \mathrm{i}\partial\overline{\partial}\log h$$

とおき、(Y,ω) は Kähler–Einstein 多様体であると仮定します。M を (L,h) に付随する $U(1)$ 束、$\theta = -\mathrm{i}\partial\log h$ を接続形式とすると、(L,h) が負であることから M は強擬凸、(Y,ω) が Einstein であることから θ は擬 Einstein 接触形式になっています。このとき、次の公式が成り立ちます。

定理 3.7. (Y,ω) の *Einstein* 定数を λ とおくと、

$$\widetilde{\mu}_{c_1\cdot\Psi}(M) = -\lambda\int_Y \Psi(T^{1,0}Y) \mod \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

証明は竹内 [22, 23] の結果を参考にしています。一般の不変多項式に対応する不変量に対しても同様にして計算できますが、Chern 指標を経由するため複雑になってしまうので、ここでは省略します。

参考文献

[1] Salomon Bochner. Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. *Ann. of Math. (2)*, 44:652–673, 1943.

[2] Hans J. Bremermann. ÃIJber die ÃĎquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen VerÃďnderlichen. *Math. Ann.*, 128:63–91, 1954.

[3] Daniel M. Burns, Jr. and Charles L. Epstein. A global invariant for three-dimensional CR-manifolds. *Invent. Math.*, 92(2):333–348, 1988.

[4] Daniel M. Burns, Jr. and Charles L. Epstein. Characteristic numbers of bounded domains. *Acta Math.*, 164(1-2):29–71, 1990.

[5] Jeffrey S. Case and A. Rod Gover. The P'-operator, the Q'-curvature, and the CR tractor calculus. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 20(2):565–618, 2020.

[6] Jeff Cheeger and James Simons. Differential characters and geometric invariants. In *Geometry and topology (College Park, Md., 1983/84)*, volume 1167 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–80. Springer, Berlin, 1985.

[7] Shiu Yuen Cheng and Shing Tung Yau. On the existence of a complete KÃďhler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(4):507–544, 1980.

[8] Shiing-Shen Chern and JÃijrgen K. Moser. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math.*, 133:219–271, 1974.

[9] Shiing-Shen Chern and James Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Ann. of Math. (2)*, 99:48–69, 1974.

[10] Charles L. Fefferman. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. *Invent. Math.*, 26:1–65, 1974.

[11] Charles L. Fefferman. Monge-AmpÃĺre equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains. *Ann. of Math. (2)*, 103(2):395–416, 1976.

[12] Kengo Hirachi. Q-prime curvature on CR manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 33:213–245, 2014.

[13] Kengo Hirachi, Taiji Marugame, and Yoshihiko Matsumoto. Variation of total Q-prime curvature on CR manifolds. *Adv. Math.*, 306:1333–1376, 2017.

[14] Peter D. Hislop, Peter A. Perry, and Siu-Hung Tang. CR-invariants and the scattering operator for complex manifolds with CR-boundary. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(9):651–654, 2006.

[15] Taiji Marugame. Renormalized Chern-Gauss-Bonnet formula for complete KÃďhler-Einstein metrics. *Amer. J. Math.*, 138(4):1067–1094, 2016.

[16] Taiji Marugame. Renormalized characteristic forms of the Cheng-Yau metric and global CR invariants. *Adv. Math.*, 377:Paper No. 107468, 55, 2021.

[17] Yoshihiko Matsumoto. The CR Killing operator and Bernstein-Gelfand-Gelfand construction in CR geometry, May 2022. arXiv:2205.11022 [math].

[18] FranÃğois Norguet. Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (Passage du local au global.). *Bull. Soc. Math. France*, 82:137–159, 1954.

[19] Kiyoshi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intÃľrieur. *Jpn. J. Math.*, 23:97–155, 1953.

[20] Tatsuo Suwa. Residue theoretical approach to intersection theory. In *Real and complex singularities*, volume 459 of *Contemp. Math.*, pages 207–261. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[21] Tatsuo Suwa. *Complex analytic geometry—from the localization viewpoint*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2024.

[22] Yuya Takeuchi. Ambient constructions for Sasakian eta-Einstein manifolds. *Adv. Math.*, 328:82–111, 2018.

[23] Yuya Takeuchi. Formulae of some global CR invariants for Sasakian eta-Einstein manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 32(3):667–692, 2024.

[24] Noboru Tanaka. On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 2(1):131–190, 1976.

[25] Andreas ÄŇap and A. Rod Gover. CR-tractors and the Fefferman space. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(5):2519–2570, 2008.