D 型 Shi 配置の制限の特性準多項式

大阪大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
鴻池真斗 (Masato KONOIKE) *

概要

特性準多項式は, 正整数を法として超平面配置の補集合に含まれる点の個数を数え上げるものである. [3] において, 東谷・中島は B 型 Shi 配置に対し、1 つの超平面で制限した場合の特性準多項式を計算した. 本講演では, D 型 Shi 配置に対しても同様に, 1 つの超平面で制限したときの特性準多項式を計算した結果について紹介する. さらに, D 型 Shi 配置から特定の超平面を削除した場合に, 特性準多項式の周期崩壊がいつ起こるのかについて得られた結果についても述べる.

本講演は [2] の内容に基づく.

1　準備

体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間 $V := \mathbb{K}^\ell$ 上の余次元 1 の affine 部分空間を V の**超平面**という. V 上の**超平面配置**とは, 超平面の有限個の集合のことをいう. $\mathcal{A}$ を超平面配置とし, $H_0 \in \mathcal{A}$ を 1 つ固定する. このとき,

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A}\backslash\{H_0\}, \qquad \mathcal{A}'' := \mathcal{A}^{H_0} := \{H \cap H_0 \mid H \in \mathcal{A}\backslash\{H_0\},\ H \cap H_0 \neq \emptyset\}$$

と定め, $\mathcal{A}'$ を $\mathcal{A}$ の **削除**, $\mathcal{A}''$ を $\mathcal{A}$ の **制限**という.

$\mathcal{A}$ の**特性多項式** $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ は削除と制限を用いて次のように帰納的に定義される：

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} t^\ell & (\mathcal{A} = \emptyset, \ell = \dim V) \\ \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t) & (\mathcal{A} \neq \emptyset) \end{cases}$$

特に $\mathcal{A} \neq \emptyset$ の場合の等式は**削除制限公式**と呼ばれる. また, 素数 q に対して $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ とすると, 特性多項式は補集合

$$M(\mathcal{A}) := V \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

に含まれる点の個数を数え上げることによって求められることが知られている [1]. さらに, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合, $(-1)^\ell \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ は $M(\mathcal{A})$ の連結成分の個数と等しくなることが知られている. このように, 特性多項式は超平面配置に関する多くの幾何的・組合せ論的情報を持つため, この理論において中心的な役割を果たしている.

* E-mail:kounoike-m@ist.osaka-u.ac.jp

関数 $\chi:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}$ が**準多項式**であるとは，正の整数 $\rho\in\mathbb{Z}_{>0}$ と多項式 $\chi^1(t),\chi^2(t),\ldots,\chi^\rho(t)\in\mathbb{Z}[t]$ が存在し，任意の $q\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して次を満たすときにいう:

$$\chi(q)=\begin{cases}\chi^1(q) & \text{if } q\equiv 1 \mod \rho,\\ \chi^2(q) & \text{if } q\equiv 2 \mod \rho,\\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ \chi^\rho(q) & \text{if } q\equiv \rho \mod \rho.\end{cases}$$

このとき, ρ を χ の**周期**と呼び，各多項式 χ^i を**第 i 構成素**と呼ぶ.

周期 ρ をもつ準多項式 χ が ρ に関する **gcd 性**をもつとは, 各構成素 χ^i が $\gcd\{\rho,i\}$ だけで決まる, つまり, $i,j\in\{1,\ldots,\rho\}$ に対して $\gcd\{\rho,i\}=\gcd\{\rho,j\}$ ならば, $\chi^i=\chi^j$ が成り立つことをいう.

以下，$q\in\mathbb{Z}_{>0}$ とし，$\mathbb{Z}_q:=\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ と定める．$a\in\mathbb{Z}$ に対して $[a]_q:=a+q\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}_q$ を a の **q-reduction** と呼ぶ．整数成分をもつ $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ および整数ベクトル $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対し，$\mathbb{Z}_q$ 上の超平面配置 $\mathcal{A}_q=\{H_{1,q},\ldots,H_{n,q}\}$ を次のように定める：

$$H_{i,q}:=\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{Z}_q^m \mid [a_{1,i}]_q x_1+\cdots+[a_{m,i}]_q x_m=[b_i]_q\}\quad (i\in[n]).$$

さらに，$\mathcal{A}_q$ の補集合 $M(\mathcal{A}_q)$ を

$$M(\mathcal{A}_q):=\mathbb{Z}_q^m\setminus\bigcup_{i=1}^n H_{i,q}=\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{Z}_q^m \mid [a_{1,i}]_q x_1+\cdots+[a_{m,i}]_q x_m\neq[b_i]_q\ \forall i\in[n]\}$$

と定める.

空でない部分集合 $J\subseteq[n]$ に対し，行列 $A_J\in\mathrm{Mat}_{m\times|J|}(\mathbb{Z})$ を A のうち J に対応する列からなる部分行列として定める．$\ell(J):=\mathrm{rank}(A_J)$ とし，$e_{J,1}|e_{J,2}|\cdots|e_{J,\ell(J)}$ を A_J の基本因子とする．この基本因子を用いて

$$\rho_A:=\mathrm{lcm}\left\{e_{J,\ell(J)}\ \middle|\ \emptyset\neq J\subseteq[n]\right\}$$

と定め, これを **lcm 周期**という.

[5, 6] により, $|M(\mathcal{A}_q)|$ は周期 ρ_A をもつ準多項式であり, ρ_A に関する gcd 性を持つことが示されている．この準多項式 $|M(\mathcal{A}_q)|$ は**特性準多項式**と呼ばれている．特に $|M(\mathcal{A}_q)|$ の第 1 構成素は特性多項式と等しいことが分かる．また, $|M(\mathcal{A}_q)|$ の周期の最小の値を**最小周期**といい, $\rho_{\min}$ と表す．最小周期と lcm 周期に関して，[4] で得られた次の興味深い結果が知られている.

定理 1.1. (1) 任意の $s|p$ を満たす $s,p\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\rho_{\min}=s$ かつ $\rho_{\mathcal{A}}=p$ を満たすような行列 A と, 整数ベクトル $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ が存在する.

(2) $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ のとき, $\rho_{\min}=\rho_{\mathcal{A}}$ が成り立つ.

定理 1.1(1) より, lcm 周期と最小周期が一致しない超平面配置が存在することが分かる．このように, $\rho_{\min}<\rho_{\mathcal{A}}$ が成り立つとき, 特性準多項式に**周期崩壊**が起こるという．この周期崩壊がどのような配置で起こるのかを理解することは，特性準多項式の算術的性質を調べる上で自然な問題である．例えば, [7] により, Shi 配置の一般化である拡張 Shi 配置の特性準多項式は多項式になることが示された．一方で, B 型 Shi 配置の場合, lcm 周期は 2 であることが知られており, このことから周期崩壊

が起こる代表的な例となっている．ここで **B 型 Shi 配置**とは

$$\mathcal{B}_m := \{\{x_i = 0\}, \{x_i = 1\}\}_{i=1}^m \cup \{\{x_i \pm x_j = 0\}, \{x_i \pm x_j = 1\}\}_{1\le i<j\le m}$$

によって定められる超平面配置である．この B 型 Shi 配置に対しては, 超平面を 1 枚削除した場合の特性準多項式が [3] において計算されており, 周期崩壊が起こる場合と起こらない場合が明らかにされている．しかしながら, B 型以外のルート系に対応する Shi 配置について同様の問題が十分には理解されていない．そこで本講演では, **D 型 Shi 配置**と呼ばれる B 型 Shi 配置から一部の超平面を除いた配置として得られる配置, 具体的には,

$$\mathcal{D}_m := \{\{x_i \pm x_j = 0\}, \{x_i \pm x_j = 1\}\}_{1\le i<j\le m}$$

によって定義される超平面配置に対して同様の問題を考える．本研究では, 先行研究で得られている B 型 Shi 配置に関する結果を手がかりとして, D 型 Shi 配置に対して超平面を削除した場合の特性準多項式を計算し, 周期崩壊が起こる条件を紹介する.

2 主結果

[3] において, [1] で用いられた計算方法を用いて B 型 Shi 配置から超平面を 1 枚除いたときの特性準多項式が計算された．本研究では, 同様の手法に加え, B 型 Shi 配置と D 型 Shi 配置の間に全単射となる写像を構成することにより, D 型 Shi 配置から超平面を 1 枚削除した場合の特性準多項式を計算した.

定理 2.1. $1 \le i < j \le m$ とする．このとき, 次が成り立つ.

$$\left|M((\mathcal{D}_m^{\{x_i-x_j=0\}})_q)\right| = \begin{cases} (T+3)^{j-i-1}(T+4)^{m-j}((T+4)^i-(T+3)^{i-1}) \\ -(T+3)^{m-i-1}(T+4)^{i-1} & (q\text{: 奇数}), \\ (T+3)^{j-i-1}(T+4)^{i-1}((T+4)^{m-j+1}-(T+3)^{m-j}) \\ -(T+3)^{m-i-1}(T+4)^{i-1} & (q\text{: 偶数}); \end{cases}$$

$$\left|M((\mathcal{D}_m^{\{x_i-x_j=1\}})_q)\right| = (T+2)^{m+i-j}(T+3)^{j-i-1};$$

$$\left|M((\mathcal{D}_m^{\{x_i+x_j=0\}})_q)\right| = \begin{cases} (T+2)^{m-j}(T+3)^{j-i}((T+4)^{i-1}-(T+3)^{i-2}) & (q\text{: 奇数}), \\ (T+2)^{m-j+1}(T+3)^{j-i-1}(T+4)^{i-1} & (q\text{: 偶数}); \end{cases}$$

$$\left|M((\mathcal{D}_m^{\{x_i+x_j=1\}})_q)\right| = \begin{cases} (T+2)^{i-1}(T+3)^{j-i}(T+4)^{m-j}-(T+2)^{i-1}(T+3)^{m-i-1} & (q\text{: 奇数}), \\ (T+2)^{i-1}(T+3)^{j-i-1}((T+4)^{m-j+1}-(T+3)^{m-j}) \\ -(T+2)^{i-1}(T+3)^{m-i-1} & (q\text{: 偶数}). \end{cases}$$

ここで $T := q - 2m$ である.

定理 2.1 から, D 型 Shi 配置からある超平面を 1 枚または 2 枚除いた特性準多項式に対して周期崩壊が起きる必要十分条件を得た.

系 2.2. (1) $H \in \mathcal{D}_m$ を固定する．このとき, $\mathcal{D}_m \setminus \{H\}$ の特性準多項式が多項式になることと H が次のどれか一つであることは必要十分である:

- $H = \{x_i - x_{m+1-i} = 0\} \quad (1 \le i \le m)$;
- $H = \{x_i - x_j = 1\} \quad (1 \le i < j \le m)$;
- $H = \{x_1 + x_j = 0\} \quad (2 \le j \le m)$;
- $H = \{x_i + x_m = 1\} \quad (1 \le i \le m-1)$.

(2) 互いに並行な $H, H' \in \mathcal{D}_m$ を固定する．このとき，$\mathcal{D}_m \setminus \{H, H'\}$ の特性準多項式が多項式になることと次の条件の一つを満たすことは必要十分である

- $H = \{x_i - x_{m+1-i} = 0\}$, $H' = \{x_i - x_{m+1-i} = 1\} \quad (1 \le i \le m)$;
- $H = \{x_i + x_{m+1-i} = 0\}$, $H' = \{x_i + x_{m+1-i} = 1\} \quad (1 \le i \le m)$.

参考文献

[1] Christos A Athanasiadis. Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *advances in mathematics*, 122(2):193–233, 1996.

[2] Akihiro Higashitani, Masato Konoike, Norihiro Nakashima, and Satoshi Ono. Characteristic quasi-polynomials of deletions of shi arrangements of type c and type d. *arXiv preprint arXiv:2509.02043*, 2025.

[3] Akihiro Higashitani and Norihiro Nakashima. Characteristic quasi-polynomials of deletions of shi arrangements of type b and their period collapse. *arXiv preprint arXiv:2405.20102*, 2024.

[4] Akihiro Higashitani, Tan Nhat Tran, and Masahiko Yoshinaga. Period collapse in characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements. *International Mathematics Research Notices*, 2023(10):8934–8963, 2023.

[5] Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, and Hiroaki Terao. Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 27(3):317–330, 2008.

[6] Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, and Hiroaki Terao. Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers. *Annals of Combinatorics*, 15(3):449–464, 2011.

[7] Masahiko Yoshinaga. Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 70(1):39–63, 2018.