Characterization of the wave front set of solutions to the fractional Schrödinger equation with potentials

東京理科大学　大学院理学研究科　数学専攻　修士課程 2 年
金井 拓海 (Takumi Kanai) *

概要

本研究では，ポテンシャル付き分数冪 Schrödinger 方程式の解 u の波面集合 $WF(u(t))$ の特徴づけを行い，分数冪ラプラシアンの次数に応じたポテンシャルの増大度の元で特異性の伝播が起こることを明らかにした．Kato-Ito(2014) [2] の手法に基づき，波束変換を用いて方程式の変形および特性曲線の評価を行うことで，主定理の証明を与える．

1　導入

本講演では，分数冪ラプラシアン $(-\Delta)^{\theta/2}$ $(0 < \theta < 2)$ とポテンシャル $V(x)$ を用いて表される Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u = (-\Delta)^{\theta/2}u + V(x)u, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

について考察する．分数冪ラプラシアン $(-\Delta)^{\theta/2}$ は Fourier 変換を用いて，

$$(-\Delta)^{\theta/2}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|^\theta \mathcal{F}[f]\right](x)$$

で定義される．(1) において，ポテンシャル $V(x)$ は以下の仮定を満たすとする．

仮定 1.1 (ポテンシャル V の仮定)**.** ポテンシャル $V(x)$ は $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する実数値関数とする．さらに，$1 < \theta < 2$ の場合は，ある $\nu < \frac{\theta}{\theta-1}$ が存在して，任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，ある定数 $C_\alpha > 0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{\nu - |\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

が成立する．

Hörmander[1] によれば，関数の滑らかさはそのフーリエ変換の無限遠における減衰の速さと密接に関係している．具体的には，関数 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ がソボレフ空間 $H^s(\mathbb{R}^n)$ に属することは，

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

---

* E-mail:1124506@ed.tus.ac.jp
本研究は杉山裕介氏（東京理科大学），村松亮氏（東京理科大学）との共同研究に基づく．

が成立することと同値である．これは，$\widehat{u}(\xi)$ が無限遠において $|\xi|^{-s}$ 程度の速さで減衰することを意味している．しかし，このような大域的な滑らかさの概念では，関数の局所的な特異性を捉えることができない．そこで，Hörmander は波面集合という概念を導入した．定義は以下の通りである．

定義 1.2 (波面集合)**.** $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$ であるとは, x_0 の近傍上で $\chi(x)\equiv 1$ となる $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し $C_N>0$ が存在して，次が成立することである：

$$|\widehat{\chi f}(\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{-N},\quad \xi\in\Gamma.$$

錐近傍とは，ある開集合 $U\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し，$\Gamma=\{\lambda\xi\mid\xi\in U,\lambda>0\}$ で定義される集合をいう．この定義によれば，波面集合は特異性の位置と方向の組み合わせとして記述され，関数の特異性をより詳細に捉えることができる．主定理の紹介と証明に先立ち，波束変換の定義を以下に示す．

定義 1.3 (波束変換)**.** $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ と $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，波束変換 $W_\varphi[f](x,\xi)$ を以下で定義する．

$$W_\varphi[f](x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi(y-x)}f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

2　主定理

本研究では，(1) の解 $u(t,x)$ の波面集合 $WF(u(t))$ の特徴付けを行い，分数冪ラプラシアンの次数に応じたポテンシャルの増大度の元で特異性の伝播が起こることを明らかにした．

定理 2.1. $u(t,x)$ を $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する (1) の解とする．ポテンシャルは仮定 *1.1* を満たし，パラメータ b は $0<b<(2-\theta)/2$ を満たすとする．このとき，以下の主張 *(i), (ii)* は同値である．

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し，任意の $N\in\mathbb{N}$, 任意の $a\ge 1$, そして任意の $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対してある定数 $\lambda_0>0, C_{N,a,\varphi}>0$ が存在して，

$$|W_{\varphi_\lambda}[u_0](x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi))|\le C_{N,a,\varphi}\lambda^{-N}\tag{2}$$

が，$\lambda>\lambda_0, a^{-1}\le|\xi|\le a$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma$ なるすべての λ,x,ξ に対して成立する．ただし，$\varphi_\lambda(x)=\lambda^{nb/2}\varphi(\lambda^b x)$ であり，$(x(s),\xi(s)):=(x(s;t,x,\lambda\xi),\xi(s;t,x,\lambda\xi))$ は以下の方程式の解である．

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}x(s)=\theta|\xi(s)|^{\theta-2}\xi(s), & x(t)=x,\\ \frac{d}{ds}\xi(s)=-\nabla_x V(x(s)), & \xi(t)=\lambda\xi.\end{cases}\tag{3}$$

3　背景

(1) は，パラメータ $0<\theta<2$ の値によってその性質が異なる．$\theta=1$ の場合は，主要部は波動方程式に一致し，ポテンシャルの増大度がいかなるものであっても，解の特異性は古典軌道に沿って伝播することが Hörmander によって古くから知られている．一方，$\theta=2$ の場合は，通常のラプ

ラシアンを持つ Schrödinger 方程式となる．この場合については多くの研究が行われている．中村 [3] では，Schrödinger 方程式の解の波面集合を初期状態の項によって特徴付けられ，さらに特異性が古典軌道に沿って伝播することが示されている．加藤・伊藤 [2] では，劣二次のポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式について，波束変換を用いて本研究の主定理に相当する波面集合を特徴付ける結果が示されている．本研究では，これらの先行研究を踏まえ，分数冪 Schrödinger 方程式の特異性の伝播について考察を行った．先行研究では，特異性の伝播が起こるためにはポテンシャルの増大度が劣二次であることが必要であったが，本研究では分数冪ラプラシアンの次数に応じたポテンシャルの増大度の下で特異性の伝播が起こることを明らかにした．これにより，分数冪ラプラシアンの次数が小さくなるにつれてポテンシャルの増大度の制限が緩和され，特異性伝播が起こる条件を拡張することに成功した．

4　証明のための準備

4.1　補題の用意

主定理の証明に先立ち，いくつかの重要な主張について述べる．

命題 4.1 (波面集合の特徴付け：[2] より)**.** $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．$0 < b < 1$ を固定する．このとき，以下の条件は同値である．

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$

(ii) (x_0, ξ_0) の錐状近傍 V が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$, 任意の $a \geq 1$, そして任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対してある定数 $C_{N,a,\varphi} > 0$ が存在して,

$$|W_{\varphi_\lambda}[f](x, \lambda\xi)| \leq C_{N,a,\varphi} \lambda^{-N}$$

が，$\lambda \geq 1$ かつ $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ なるすべての $(x, \xi) \in V$ に対して成立する．

補題 4.2 (特性曲線のオーダー評価)**.** $0 < T_0 < T < \infty$ とする．仮定 *1.1* の下で，特性方程式 (3) の解 $(x(s), \xi(s))$ について，λ に依存しない正の定数 C_ξ, C'_ξ, C_x, C'_x および $\lambda_0 > 0$ が存在し，全ての $\lambda \geq \lambda_0$ に対して

$$C'_\xi \lambda \leq |\xi(s)| \leq C_\xi \lambda \quad (T_0 \leq |s - t| \leq T) \tag{4.1}$$

が $T_0 \leq |s - t| \leq T$ 上で成立する．また，$x(s)$ については $T_0 \leq |s - t| \leq T$ において，

$$\begin{cases} C'_x \lambda^{\theta - 1} \leq |x(s)| \leq C_x \lambda^{\theta - 1} & (1 < \theta < 2), \\ |x(s)| \leq C_x & (0 < \theta \leq 1). \end{cases} \tag{4.2}$$

が成立する．

証明は省略するが，加藤・伊藤 [2] の appendix の議論と同様に，Picard の逐次近似法により証明できる．

4.2 波束変換による方程式の表現と積分方程式への変形

波束変換を (1) に適用し，方程式を変形する．$C_{\xi'}, \lambda_0$ を補題 4.2 の定数とし，cut-off 関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$\chi(\eta) = \begin{cases} 1 & \left(|\eta| \le \frac{C'_\xi \lambda_0}{2}\right) \\ \text{smoothly decreasing from 1 to 0} & \left(\frac{C'_\xi \lambda_0}{2} < |\eta| < C'_\xi \lambda_0\right) \\ 0 & (|\eta| \ge C'_\xi \lambda_0) \end{cases}$$

で定義する．この χ を用いて $a(\eta) = \chi(\eta)|\eta|^\theta$ と $b(\eta) = (1 - \chi(\eta))|\eta|^\theta$ とおく．a, b を用いて分数冪ラプラシアンの分割，及び表象 b とポテンシャルに関してテイラー展開を行い，波束変換の計算を行うと方程式 (1) は以下のように表される．

$$(\partial_t + \nabla_\xi b(\xi) \cdot \nabla_x - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_\xi) W_{\varphi_\lambda} u(t, x, \xi) = iP(x, \xi) W_{\varphi_\lambda} u(t, x, \xi) + iRu(t, x, \xi) \qquad (4.3)$$

ここで $P(x, \xi) = \left(-b(\xi) - V(x) + \left(x \cdot \nabla_x V(x)\right)\right)$ であり，

$$\begin{aligned} Ru(t, x, \xi) = &- W_{\varphi_\lambda}[a(D)u(t, \cdot)](x, \xi) - W_{\varphi_\lambda}[R_V u(t, \cdot)](x, \xi) \\ &- \iint \overline{\varphi_\lambda(y - x)} e^{iy(\eta - \xi)} R_b(\eta, \xi) \hat{u}(\eta) d\eta dy \end{aligned} \qquad (4.4)$$

と定義した．特性曲線法により，(4.3) の解を積分方程式の形で表す．$\lambda \ge \lambda_0$ のときに補題 4.2 が成立していることに注意すると，特性曲線の方程式は (3) を満たす解となる．したがって，(4.3) の解は以下の積分方程式の形で表される．

$$\begin{aligned} W_{\varphi_\lambda} u(t, x(t), \xi(t)) = &\exp\left(\int_0^t iP(x(\tau), \xi(\tau)) d\tau\right) W_{\varphi_\lambda}[u_0](x(0), \xi(0)) \\ &+ i \int_0^t \exp\left(\int_t^s iP(x(\tau), \xi(\tau)) d\tau\right) Ru(s, x(s), \xi(s)) ds \end{aligned} \qquad (4.5)$$

P, R_1, R_2 は以下のように与えられる．

$$P(x(s), \xi(s)) = -|\xi(s)|^\theta - V(x(s)) + (x(s) \cdot \nabla_x V(x(s))) \qquad (4.6)$$

$$R_1(\eta, \xi(s)) = \sum_{2 \le |\alpha| < L} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta\right)\Big|_{\xi = \xi(s)} (\eta - \xi(s))^\alpha \qquad (4.7)$$

$$R_2(\eta, \xi(s)) = L \sum_{|\alpha| = L} \frac{(\eta - \xi(s))^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - \tau)^{L-1} \left(\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta\right)\Big|_{\xi = \xi(s) + \tau(\eta - \xi(s))} d\tau \qquad (4.8)$$

5 主定理の証明

証明は加藤・伊藤 [2] の手法に基づき，帰納法を用いて行う．(ii) $\Rightarrow$ (i) を示す．逆側の証明は同様の議論により得られるため省略する．命題 4.1 より，(i) を示すためには，次の主張を示せば十分で

ある．

$P(\sigma,\varphi)$：任意の $\sigma\geq 0$ と任意の $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対して、ある定数 $C_{\sigma,a,\varphi}>0$ が存在し、

$$|W_{\varphi_\lambda}u(s,x(s),\xi(s))|\leq C_{\sigma,a,\varphi}\lambda^{-\sigma}$$

が、$\lambda\geq\lambda_0$，$a^{-1}\leq|\xi|\leq a$，$x\in K$，$\xi\in\Gamma$，$T_0\leq s\leq T$ なるすべての λ,x,ξ,s に対して成立する．

$P(0)$ は $u\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ であり，波束変換が有界であることを踏まえると成立する．続いて，$P(\sigma)$ の成立を仮定し，$P(\sigma+\delta)$ がある $\delta>0$ について成立することを示す．そのためには積分方程式 (4.5) の右辺第 2 項に含まれる剰余項 Ru について，

$$|Ru(s,x(s),\xi(s))|\leq C_{\sigma,a,\varphi}\lambda^{-(\sigma+\delta)}\quad(\delta>0)$$

と評価できることを示せば十分である．剰余項 Ru は (4.4) で定義される 3 つの項の和であるため，各項について順に評価を行う．テイラー展開の次数 L は証明中で N に依存して十分大きくとるものとする．

5.1 $W_{\varphi_\lambda}[a(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価

$e^{-iy\xi(s)}=\frac{-\Delta_y}{|\xi(s)|^2}e^{-iy\xi(s)}$ の関係式を用いて y について M 回部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}W_{\varphi_\lambda}[a(D)u(s,\cdot)](s,x(s),\xi(s))&=\int\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(a(D)u(s,\cdot))(y)\left(\frac{-\Delta_y}{|\xi(s)|^2}\right)^M e^{-iy\xi(s)}dy\\&=\left(\frac{-1}{|\xi(s)|^2}\right)^M\int\Delta_y^M\left(\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(a(D)u(s,\cdot))(y)\right)e^{-iy\xi(s)}dy.\end{aligned}$$

ここで，$a(D)u(s,\cdot)(y)$ は Cauchy-Schwarz の不等式を用いると有界であることに注意すると，$\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(a(D)u(s,\cdot))(y)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に属する．そのため，ある定数 $C_{M,\varphi}>0$ が存在して，

$$\left|\Delta_y^M\left(\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(a(D)u(s,\cdot))(y)\right)\right|dy\leq C_{M,\varphi}$$

が成立する．このことと補題 4.2 を用いると，次の評価が得られる．

$$|W_{\varphi_\lambda}[a(D)u(s,\cdot)]|\leq(C'_\xi)^{-2M}C_{M,\varphi}\lambda^{-2M}.$$

M は任意に選べるため，$-2M<-(\sigma+\delta)$ となるように M を十分大きく選べば，この項の評価が完了する．

5.2 $W_{\varphi_\lambda}[R_b(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価

まず，$W_{\varphi_\lambda}[R_1(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価を行う．$R_\alpha:=(\partial_\xi^\alpha|\xi|^\theta)\Big|_{\xi=\xi(s)}(\eta-\xi(s))^\alpha$ とおき，$(\eta-\xi(s))^\alpha e^{iy(\eta-\xi(s))}=(-i\nabla_y)^\alpha e^{iy(\eta-\xi(s))}$ であることを用いて部分積分を行うと，

$$W_{\varphi_\lambda}[R_1(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))=i^{|\alpha|}\left(\partial_\xi^\alpha|\xi|^\theta\right)\Big|_{\xi=\xi(s)}W_{\nabla_y^\alpha\varphi_\lambda}[u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))\qquad(5.1)$$

となる．$W_{\nabla_y^\alpha \varphi_\lambda}[u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ について，

$$\nabla_y^\alpha \varphi_\lambda(y-\xi(s)) = \lambda^{\frac{nb}{2}} \nabla_y^\alpha \varphi(\lambda^b(y-x)) = \lambda^{\frac{nb}{2}} \lambda^{b|\alpha|} (\nabla_y^\alpha \varphi)(\lambda^b(y-x))$$

であるから，新しく基本波束を $\psi(y) := \nabla_y^\alpha \varphi(y)$ と定義すれば，

$$W_{\nabla_y^\alpha \varphi_\lambda}[u(s,\cdot)](x(s),\xi(s)) = \lambda^{b|\alpha|} W_{\psi_\lambda}[u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$$

となる．よって，W_ψ に帰納法の仮定を適用できて，ψ が φ に依存していることに注意すると，

$$|W_{\nabla_y^\alpha \varphi_\lambda}[u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \leq C'_{\sigma,a,\psi} \lambda^{-\sigma+b|\alpha|}$$

が成立する．一方，$(\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\Big|_{\xi=\xi(s)}$ については，特性曲線の評価と斉次関数の性質より，ある定数 $K_\alpha > 0$ が存在して，$(\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\Big|_{\xi=\xi(s)} \leq K_\alpha \lambda^{\theta-|\alpha|}$ となる．以上より，(5.1) の各項は次のように評価できる．

$$\begin{aligned} |W_{\varphi_\lambda}[R_\alpha(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| &\leq K_\alpha C_{\sigma,a,\psi} \lambda^{\theta-|\alpha|} \lambda^{-\sigma+b|\alpha|} \\ &= K_\alpha C_{\sigma,a,\psi} \lambda^{-(\sigma-\theta+|\alpha|(1-b))}. \end{aligned}$$

ここで，$\sigma - \theta + |\alpha|(1-b) \geq \sigma - \theta + 2(1-b)$ であるから，$\delta_1 := -\theta + 2(1-b)$ とおくと，$W_{\varphi_\lambda}[R_\alpha(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s)) \leq C''_{\sigma,a,\alpha,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta_1)}$ となる．これを踏まえると，

$$\begin{aligned} |W_{\varphi_\lambda}[R_1(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| &\leq \sum_{2\leq|\alpha|<L} \frac{1}{\alpha!} |W_{\varphi_\lambda}[R_\alpha(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \\ &\leq \sum_{2\leq|\alpha|<L} \frac{1}{\alpha!} C''_{\sigma,a,\alpha,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta_1)} \\ &= C_{\sigma,a,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta_1)} \end{aligned}$$

が成立し，$W_{\varphi_\lambda}[R_1(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価が完了する．
次に，$W_{\varphi_\lambda}[R_2(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価を行う．$\mathcal{S}'$ におけるフーリエ (逆) 変換の定義を用いて式変形を行うと，

$$\begin{aligned} W_{\varphi_\lambda}[R_2(D)u](x(s),\lambda\xi) &= \langle R_2(D)u, \overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i\cdot\lambda\xi} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[R_2(D)u], \overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i\cdot\lambda\xi} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[R_2(D)u], \mathcal{F}^{-1}[\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i\cdot\lambda\xi}] \rangle \\ &= \int R_2(\eta,\xi(s)) \widehat{u}(\eta) \mathcal{F}^{-1} \left[\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i\cdot\xi(s)} \right] (\eta) d\eta \end{aligned} \tag{5.2}$$

となる．(5.2) 式の積分を以下の二つの領域に分けてそれぞれ評価を行う．

$$A_1 := \{\eta \in \mathbb{R}^n \, |\eta - \xi(s)| \leq \lambda^c\}, A_2 := \{\eta \in \mathbb{R}^n \, |\eta - \xi(s)| > \lambda^c\}$$

c は $b < c < 1$ を満たすようにとる．また，$I_1 := \int_{A_1} \cdots d\eta, I_2 := \int_{A_2} \cdots d\eta$ とする．まず，I_1 の評価を行う．$R_2(\eta, \xi(s))$ について，補題 4.2 と斉次関数の性質を用いると，

$$\begin{aligned}|R_2(\eta, \xi(s))| &\leq L \sum_{|\alpha|=L} \frac{|\eta - \xi(s)|^L}{\alpha!} \int_0^1 (1-\tau)^{L-1} \left| (\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\big|_{\xi=\xi(s)+\tau(\eta-\xi(s))} \right| d\tau \\ &\leq \sum_{|\alpha|=L} \frac{K_L}{\alpha!} \lambda^{cL} \left(\frac{1}{2} C'_\xi\right)^{\theta - L} \lambda^{\theta - L}\end{aligned}$$

となる．従って，I_1 は次のように評価できる．

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_{A_1} |R_2(\eta, \xi(s))| |\widehat{u}(\eta)| \left| \mathcal{F}^{-1} \left[\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i \cdot \xi(s)} \right] (\eta) \right| d\eta \\ &\leq \sum_{|\alpha|=L} \frac{K_L}{\alpha!} \left(\frac{1}{2} C'_\xi\right)^{\theta - L} \lambda^{\theta - L(1-c)} \int_{A_1} |\widehat{u}(\eta)| \cdot \left| \mathcal{F}^{-1} \left[\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i \cdot \xi(s)} \right] (\eta) \right| d\eta \\ &\leq \sum_{|\alpha|=L} \frac{K_L}{\alpha!} \left(\frac{1}{2} C'_\xi\right)^{\theta - L} \|\varphi\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} \lambda^{\theta - L(1-c)}\end{aligned}$$

となる．$1 - c > 0$ であることに注意して，L を十分大きくとれば，ある定数 $C_{\sigma,\varphi} > 0$ が存在して，

$$|I_1| \leq C_{\sigma,\varphi} \lambda^{-(\sigma + \delta_1)}$$

が成立する. 次に, I_2 の評価を行う. 領域 A_2 において, 斉次関数の性質, 及び L を十分大きくとることを踏まえると, $(\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\big|_{\xi=\gamma}$ は有界となる. すなわち, ある定数 K_L が存在して, $\left| (\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\big|_{\xi=\gamma} \right| \leq K_L$ となる．このことから，$R_2(\eta, \xi(s))$ は,

$$\begin{aligned}|R_2(\eta, \xi(s))| &\leq L \sum_{|\alpha|=L} \frac{|\eta - \xi(s)|^L}{\alpha!} \int_0^1 (1-\tau)^{L-1} \left| (\partial_\xi^\alpha |\xi|^\theta)\big|_{\xi=\xi(s)+\tau(\eta-\xi(s))} \right| d\tau \\ &\leq \sum_{|\alpha|=L} \frac{K_L}{\alpha!} |\eta - \xi(s)|^L\end{aligned}$$

と評価できる．従って，Cauchy-Schwartz の不等式，基本波束のスケーリングの性質，及び急減少性を踏まえると I_2 は,

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \lambda^{-Mc} C'_{N,a,L} \int_{A_2} |\hat{u}(\eta)| |\eta - \xi(s)|^{M+L} \left| \mathcal{F}^{-1} [\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i \cdot \xi(s)}](\eta) \right| d\eta \\ &\leq \lambda^{-Mc} C'_{N,a,L} \left(\int |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int |\eta - \xi(s)|^{2(M+L)} \left| \mathcal{F}^{-1} [\overline{\varphi_\lambda(\cdot - x(s))} e^{-i \cdot \xi(s)}](\eta) \right|^2 d\eta \right)^{1/2} \\ &\leq \lambda^{-Mc} C'_{N,a,L} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lambda^{2b(M+L)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^{2(M+L)} |\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\zeta)|^2 d\zeta \right)^{1/2} \\ &= C_{N,a,L,M,\varphi} \lambda^{-M(c-b)+bL}\end{aligned}$$

と評価できる．途中で積分の変数変換を行い，適切に定数をまとめた．$c - b > 0$ であることに注意して，M を $-M(c-b) + bL < -N$ となるように十分大きく取ると，I_2 の評価が完了する．以上より，$W_{\varphi_\lambda}[R_2(D)u(s,\cdot)](x(s), \xi(s))$ の評価が完了する．

5.3 $W_{\varphi_\lambda}[R_V u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価

まず，$W_{\varphi_\lambda}[R_{V,1}u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価を行う．$R_{V,1}$ の波束変換は

$$\begin{aligned}I_\alpha(s) &:= W_{\varphi_\lambda}[(\partial_x^\alpha V)(x(s))(\cdot - x(s))^\alpha u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))\\ &= (\partial_x^\alpha V)(x(s))W_{\varphi_\lambda}[(\cdot - x(s))^\alpha u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))\\ &= (\partial_x^\alpha V)(x(s))\int \overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(y-x(s))^\alpha u(s,y)e^{-iy\xi(s)}dy\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，$\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))}(y-x(s))^\alpha$ の部分について新しい基本波束 $\psi(y) = y^\alpha\varphi(y)$ を取り直すと，帰納法の仮定を用いることで，$|W_{\varphi_\lambda}[(\cdot - x(s))^\alpha u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \leq C_{\sigma,a,\psi}\lambda^{-\sigma-b|\alpha|}$ が成立する．一方，$(\partial_x^\alpha V)(x(s))$ については，仮定 1.1 を用いて評価を行う．$1 < \theta < 2$ で，さらに $\nu \leq |\alpha|$ のとき，$\langle x(s)\rangle^{\nu-|\alpha|} \leq 1$ であるから，

$$|I_\alpha(s)| \leq C_\alpha C_{\sigma,a,\psi}\lambda^{-\sigma-b|\alpha|} \leq C_\alpha C_{\sigma,a,\psi}\lambda^{-(\sigma+2b)}$$

が成立する．

$1 < \theta < 2$ で，さらに $\nu > |\alpha|$ のとき，補題 4.2 より，ある定数 $C_x > 0$ が存在して，

$$\langle x(s)\rangle^{\nu-|\alpha|} \leq (1+|x(s)|)^{\nu-|\alpha|} \leq (1+C_x\lambda^{\theta-1})^{\nu-|\alpha|} \leq (1+C_x)^{\nu-|\alpha|}\lambda^{(\theta-1)(\nu-|\alpha|)}$$

となる．よって，$|I_\alpha(s)| \leq C_\alpha C_{\sigma,a,\psi}(1+C_x)^{\nu-|\alpha|}\lambda^{-\sigma-b|\alpha|+(\theta-1)(\nu-|\alpha|)}$ が成立する．ここで，指数部分について，

$$-\sigma - b|\alpha| + (\theta-1)(\nu-|\alpha|) = -\sigma + (\theta-1)\nu - (\theta-1+b)|\alpha| \leq -\sigma + (\theta-1)\nu - 2(\theta-1+b)$$

であり，主定理の ν に関する仮定より，$-2b + (\theta-1)(\nu-2) < 0$ が成り立っている．一方で，$0 < \theta \leq 1$ のとき，補題 4.2 より，ある定数 $C_x > 0$ が存在して，$|x(s)| \leq C_x$ が成り立つので，$\langle x(s)\rangle^{\nu-|\alpha|}$ は定数で抑えることができる．よって，ある定数 $C'_{\sigma,a,\varphi} > 0$ が存在して，

$$|I_\alpha(s)| \leq C'_{\sigma,a,\varphi}\lambda^{-(\sigma+2b)}$$

が成立する．ここで，$\delta_2 := \min(2b, -2b + (\theta-1)(\nu-2))$ と定義すると，$1 < \theta < 2$ のときも $0 < \theta \leq 1$ のときも，ある定数 $C_{\sigma,a,\varphi} > 0$ が存在して，

$$|W_{\varphi_\lambda}[R_{V,1}u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \leq C_{\sigma,a,\varphi}\lambda^{-(\sigma+\delta_2)}$$

が成立する．次に，$W_{\varphi_\lambda}[R_{V,2}u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ の評価を行う．手法は $W_{\varphi_\lambda}[R_2(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))$ とほとんど同様であるが，ここでは積分範囲を

$$B_1 := \{y \in \mathbb{R}^n \ |y - x(s)| \leq \lambda^{-d}\}, B_2 := \{y \in \mathbb{R}^n \ |y - x(s)| > \lambda^{-d}\}$$

と分割する．d は $0<d<b$ を満たすようにとる．また，$J_1 := \int_{B_1}\cdots dy, J_2 := \int_{B_2}\cdots dy$ とする．
まず，J_1 の評価を行う．Casuchy-Schwartz の不等式を用いると，

$$
\begin{aligned}
|J_1(s)| &\leq \left|\int_{B_1} \overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s)) u(s,y) e^{-iy\xi(s)}(y) dy\right| \\
&\leq \left(\int_{B_1} \left|\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s))\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} \left|u(s,y)e^{-iy\xi(s)}(y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\| \left(\int_{B_1} \left|\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s))\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\| |B_1| \sup_{y\in B_1} |\varphi_\lambda(y-x(s))|^2 \sup_{y\in B_1} |R_{V,2}(y,x(s))|^2
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$|B_1|$ は n 次元球の体積であり，$|B_1| = C_n\lambda^{-nd}$ である．$\left(C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\right)$
φ_λ については，

$$
\sup_{y\in B_1} |\varphi_\lambda(y-x(s))|^2 = \sup_{|z|\leq \lambda^{-d}} |\lambda^{\frac{nb}{2}} \varphi(\lambda^b z)|^2 \leq C_\varphi \lambda^{nb}
$$

が成立する．次に，$R_{V,2}(y,x(s))$ について評価を行う．

$$
\begin{aligned}
|R_{V,2}(y,x(s))| &\leq L \sum_{|\alpha|=L} \frac{|y-x(s)|^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\tau)^{L-1} |(\partial_x^\alpha V)(x(s)+\tau(y-x(s)))| d\tau \\
&= L\lambda^{-Ld} \sum_{|\alpha|=L} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\tau)^{L-1} |(\partial_x^\alpha V)(x(s)+\tau(y-x(s)))| d\tau
\end{aligned}
$$

となる．$z := x(s)+\tau(y-x(s))$ とおく．ポテンシャル V に関する仮定より，$|(\partial_x^\alpha V)(z)| \leq C_L \langle z\rangle^{\nu-L}$ が成り立つ．ここで，L は十分大きくとることから，$\nu \leq L$ であるから，$\langle z\rangle^{\nu-L} \leq 1$ となる．
よって，

$$
\begin{aligned}
|J_1(s)| &\leq \|u_0\| C_n \lambda^{-nd} C_\varphi \lambda^{nb} \left(\sum_{|\alpha|=L} \frac{1}{\alpha!} C_L \lambda^{-Ld}\right)^2 \\
&= C_{L,\varphi} \lambda^{-nd+nb-2Ld} \\
&= C_{\sigma,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta_1)}
\end{aligned}
$$

となる．途中で，L は適切に十分大きく取った．
次に，J_2 の評価を行う．

$$
\begin{aligned}
|J_2(s)| &= \left|\int_{B_2} \overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s)) u(s,y) e^{-iy\xi(s)}(y) dy\right| \\
&\leq \left(\int_{B_2} \left|\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s))\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_2} |u(s,y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\| \left(\int_{B_2} \left|\overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s))\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

となる．$K_2(s) := \int_{B_2} \left| \overline{\varphi_\lambda(y-x(s))} R_{V,2}(y,x(s)) \right|^2 dy$ とおく．B_1 の評価の際と同様に，$\langle x \rangle^{\nu - L} \le 1$ である．よって，

$$\begin{aligned} K_2(s) &\le C_L^2 \int_{B_2} |\varphi_\lambda(y-x(s))|^2 |y-x(s)|^{2L} dy \\ &= C_L^2 \lambda^{nb-2bL} \int_{B_2} |\varphi(\lambda^b(y-x(s)))|^2 |\lambda^b(y-x(s))|^{2L} dy \\ &= C_L^2 \lambda^{-2bL} \int_{|z|>\lambda^{b-d}} |\varphi(z)|^2 |z|^{2L} dz \\ &\le C_{L,\varphi} \lambda^{-2bL} \end{aligned}$$

となる．これを踏まえて $J_2(s)$ の評価を行うと，

$$|J_2(s)| \le \|u_0\| \sqrt{C_{L,\varphi}} \lambda^{-bL} = C_{\sigma,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta_1)}$$

が成立する．途中で，L は適切に十分大きく取った．
以上の議論を踏まえ，剰余項全体の評価についてまとめる．$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく．このとき，ある定数 $C_{\sigma,a,\varphi} > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned} |Ru(s,x(s),\xi(s))| &\le |W_{\varphi_\lambda}[a(D)u(s,\cdot)](s,x(s),\xi(s))| + |W_{\varphi_\lambda}[R_b(D)u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \\ &\quad + |W_{\varphi_\lambda}[R_V u(s,\cdot)](x(s),\xi(s))| \\ &\le C_{\sigma,a,\varphi} \lambda^{-(\sigma+\delta)} \end{aligned}$$

が成立する．
以上から目標としていた剰余項の評価が得られ，主定理の証明は完了した．

参考文献

[1] Hörmander, L., *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis.* Reprint of the second (1990) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] Kato, K.; Ito, S., Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential. *SUT J. Math.* **50** (2014), no. 2, 383–398.

[3] Nakamura, S., Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations. *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), no. 1, 177–211.