Non-admissible なカンドルについて

大阪大学　大学院理研究科　数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI) *

概要

カンドルは Reidemeister 変形に対応する公理系をもつ代数系であり, 結び目不変量の構成に重要である．一方で, admissible なカンドルによる彩色不変量は絡み目群からの準同型の個数に帰着し, 得られる情報が限られる．これに対し, non-admissible なカンドルの彩色不変量は，絡み目群が同型な絡み目を区別し得る．本研究では，カンドルが non-admissible となるための十分条件を与え，それに基づく non-admissible カンドルの発見・構成を行う．

本研究は, 甲斐涼哉氏（大阪公立大学・奈良教育大学）, 姫野圭佑氏（広島大学）, 小澤裕子氏（明治大学）との共同研究に基づく．

1　準備

1.1　カンドル

カンドルは結び目理論における Reidemeister 変形に対応する公理系をもつ代数系であり, 結び目不変量の研究において重要な役割を果たしている．さらに [14, 18] を発端として, 近年では微分幾何学における対称空間の観点からカンドルの研究が行われている．

Definition 1.1 ([10, 15])**.** 集合 X $(\neq \emptyset)$ と二項演算 $\triangleleft : X \times X \to X$ の組 $X = (X, \triangleleft)$ が**カンドル (quandle)** であるとは次の条件 (i)–(iii) を満たすことである:

(i) 任意の $x \in X$ に対して, $x \triangleleft x = x$ を満たす.
(ii) 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \to X$, $S_y(x) = x \triangleleft y$, は全単射である.
(iii) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

カンドル $X = (X, \triangleleft)$ において, $S_y^{-1}(x)$ を $x \overline{\triangleleft} y$ と表す $(x, y \in X)$．さらに, 本研究では次の Fenn-Rourke Notation も用いる (詳しくは [13, Section 8.5] を参照せよ): $x^y := x \triangleleft y$, $x^{y^{-1}} := x \overline{\triangleleft} y$ $(x, y \in X)$.

Remark 1.2. カンドル $(X, \triangleleft)$ に対して, $(X, \overline{\triangleleft})$ もカンドルとなる．このカンドル $(X, \overline{\triangleleft})$ をカンドル $(X, \triangleleft)$ の**双対カンドル (dual quandle)** といい, 二項演算 $\overline{\triangleleft}$ を $\triangleleft$ の**双対演算 (dual operation)** と呼ぶ.

* E-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

二つのカンドルの間の写像がカンドルの演算を保つとき**カンドル準同型 (quandle homomorphism)** といい, 全単射カンドル準同型を**カンドル同型 (quandle isomorphism)** という. 二つのカンドルの間にカンドル同型が存在するときそれらは**同型**であるという. カンドル X において, 写像 $S_y : X \to X$ $(y \in X)$ はカンドル同型である[*1]. カンドル $(X, \triangleleft)$ の**部分カンドル (subquandle)** とは X の部分集合で $\triangleleft$ と $\triangleleft^{-1}$ で閉じているものをいう[*2]. カンドル X, Y に対して, 単射カンドル準同型 $f : X \to Y$ が存在するとき, 像 $f(X)$ は X と同型な Y の部分カンドルである.

Example 1.3 (共役カンドル)**.** G を群とする. G 上の二項演算 $\triangleleft : G \times G \to G$ を $x \triangleleft y = y^{-1}xy$ で定義する. このとき, $\mathrm{Conj}(G) := (G, \triangleleft)$ はカンドルであり, このカンドルを G の**共役カンドル (conjugation quandle)** と呼ぶ.

H を群 G のいくつかの共役類の和集合, すなわち, $H = \bigsqcup_\lambda C_\lambda$ (C_λ は群 G の共役類) とする. このとき, H は群 G の元の右からの共役作用で閉じている. 従って, $\mathrm{Conj}(H) = (H, \triangleleft)$ は $\mathrm{Conj}(G)$ の部分カンドルであり, このカンドルも共役カンドルと呼ぶ. 位数 $2n$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ の二面体群 D_{2n} の鏡映変換全体がなす共役類 H の共役カンドルは**二面体カンドル (dihedral quandle)** $R_n := (\mathbb{Z}_n, x \triangleleft y = 2y - x)$ と同型である.

任意の共役カンドルに対して, その部分カンドルはある群の共役類の和集合上の共役カンドルである.

カンドル $(X, \triangleleft)$ に対して, 群 $\mathrm{As}(X) := \left\langle e_x (x \in X) \mid e_{x \triangleleft y} = e_y^{-1} e_x e_y (x, y \in X) \right\rangle$ を X の**付随群 (associated group)** という[*3]. 写像 $\eta_X : X \to \mathrm{As}(X)$, $\eta_X(x) = e_x$, を**自然な写像 (natural map)** と呼ぶ[*4].

Remark 1.4. 自然な写像は常に単射になるとは限らない. 実際, 位数 3 のカンドルで自然な写像が単射ではないものが存在する.

Definition 1.5 ([11])**.** カンドル X が **admissible** であるとは自然な写像 η_X が単射であることをいう. X が **non-admissible** であるとは X が admissible でないことをいう.

Remark 1.6. カンドル X が admissible であることと次の二つの条件は同値である:

- ある群 G とある単射準同型 $f : X \to \mathrm{Conj}(G)$ が存在する.
- ある群 G が存在して X は $\mathrm{Conj}(G)$ の部分カンドルと同型である.

Remark 1.7. カンドルが admissible [11], reducible [9, 17], injective [6], そして embeddable [1] は同値な概念である. さらに, 共役カンドルの部分カンドルを standard [2] と呼ぶこともある. 本研究では admissible という言葉に統一する.

Question 1.8. 与えられたカンドルが non-admissible であるかどうか判定することはできるか.

[*1] Definition 1.1 の条件 (iii) は, $S_z(x \triangleleft y) = S_z(x) \triangleleft S_z(y)$ と書けるので写像 S_z はカンドル準同型である. さらに, 条件 (ii) より全単射であるからカンドル同型である.

[*2] カンドル $(X, \triangleleft)$ の部分集合で $\triangleleft$ で閉じているが $\triangleleft^{-1}$ で閉じていないものが存在する [12, Theorem 2].

[*3] [10] では $\mathrm{AdConj}(X)$ と書かれている.

[*4] 自然な写像は $\eta_X : X \to \mathrm{Conj}(\mathrm{As}(X))$ とみなすことでカンドル準同型と考えることができる.

2　主結果

2.1　補題

I を単位閉区間 $[0,1]$ とし，D を 2 次元閉円板とする．$(1,1)$ **タングル**とはプロパー埋め込み $f : I \sqcup S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \to D \times I$ の像であって $f(I)$ が $f(0) \in D \times \{0\}$ から $f(1) \in D \times \{1\}$ を結ぶ道になっているものをいう．本講演では，$(1,1)$ タングルは向き付けられており，$f(I)$ は常に $f(0)$ から $f(1)$ へ向かう向きをもつものとする．$(1,1)$ タングルの**図式**も結び目と同様に定義される．D を有向絡み目 L の図式とする．D 上の弧の内点を 1 つ切り開くことにより，Fig. 1 のように $(1,1)$ タングル $\tilde{L}$ の図式 $\tilde{D}$ を得る．以下では，$f(0)$ に対応する点を含む弧を a_s，$f(1)$ に対応する点を含む弧を a_t と

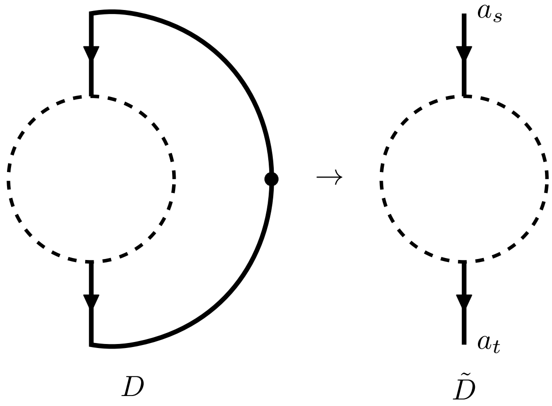

図 1　D から得られる図式 $\tilde{D}$

する．

Definition 2.1. X をカンドル，D を有向絡み目 L の図式または $(1,1)$ タングル $\tilde{L}$ の図式とする．$\mathrm{Arc}(D)$ を D の弧全体の集合とする．写像 $C : \mathrm{Arc}(D) \to X$ が D の X **彩色**であるとは D の各交差において次の条件を満たすことである：Fig. 2 の弧 $a_i, a_j, a_k \in \mathrm{Arc}(D)$ に対して，$C(a_i) \triangleleft C(a_j) = C(a_k)$. D の X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く．

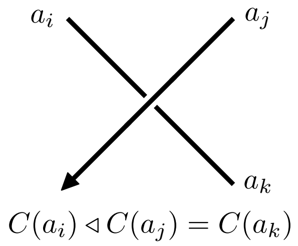

図 2　彩色条件

Lemma 2.2 (cf. [3, Lemma 4.4], [16, Lemma 5.6])**.** X をカンドルとする．ある $(1,1)$ タングル

$\tilde{L}$, $\tilde{L}$ のある図式 $\tilde{D}$, そして $\tilde{D}$ のある X 彩色 $\tilde{C}$ が存在して, $\tilde{C}(a_s) \neq \tilde{C}(a_t)$ を満たすならば X は non-admissible である.

Remark 2.3. カンドル X の**内部自己同型群 (Inner automorphism group)** $\mathrm{Inn}(X)$ とは, 写像 S_x $(x \in X)$ が生成する群のことである. カンドル X が **faithful** であるとは, 写像 $X \to \mathrm{Inn}(X)$, $x \mapsto S_x$, が単射であることをいう. [3, Lemma 4.4], [16, Lemma 5.6] では次が示されている: カンドル X が faithful ならば任意の $(1,1)$ タングル $\tilde{L}$, $\tilde{L}$ の任意の図式 $\tilde{D}$, そして $\tilde{D}$ の任意の X 彩色 $\tilde{C}$ に対して, $\tilde{C}(a_s) = \tilde{C}(a_t)$ を満たす.

2.2 Hopf 絡み目型 $(1,1)$ タングルを用いた判定法

Proposition 2.4. X をカンドルとする. ある $x, y \in X$ が存在して $x \triangleleft y = x$ かつ $y \triangleleft x \neq y$ を満たすならば X は non-admissible である.

Proof. $\tilde{D}$ を Fig. 3 の図式とする. $\tilde{D}$ の任意の X 彩色は Fig. 3 で与えられ次の関係式を満たさなければならない:

$$x \triangleleft (y \triangleleft x) = x, \text{ すなわち } x \triangleleft y = x.$$

ある $x, y \in X$ が存在して, $x \triangleleft y = x$ かつ $y \triangleleft x \neq y$ を満たすならばある $\tilde{D}$ の X 彩色 $\tilde{C}$ が存在し

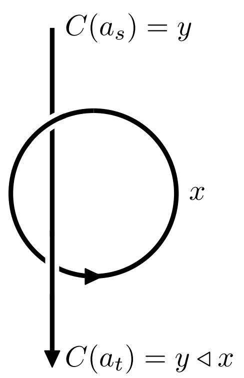

図 3　X 彩色された図式 $\tilde{D}$

て $\tilde{C}(a_s) = y$ かつ $\tilde{C}(a_t) = y \triangleleft x$ を満たす. 従って Proposition 2.2 より, X は non-admissible である. □

Theorem 2.5. G を群, $N \subset G$ を正規部分群とする. このとき, 二項演算 $\triangleleft : (G \times N) \times (G \times N) \to G \times N$ を次で定義する:

$$(g_1, n_1) \triangleleft (g_2, n_2) = ((g_2 n_2)^{-1}(g_1 n_1) g_1 (g_1 n_1)^{-1}(g_2 n_2), (g_2 n_2)^{-1}(g_1 n_1) n_1 (g_1 n_1)^{-1}(g_2 n_2)).$$

(i) $X = (G \times N, \triangleleft)$ はカンドルである.
(ii) $N \not\subset Z(G)$ ならば X は non-admissible である.

Proof. (i) 直接計算すればよい.

(ii) $N \not\subset Z(G)$ を仮定する．このとき, ある $A \in G$ と $B \in N$ が存在して $AB \neq BA$ を満たす. $x = (e,e), y = (A,B) \in X$ とおくと,

$$\begin{aligned} x \triangleleft y &= (e,e) \triangleleft (A,B) \\ &= (e,e) = x, \\ y \triangleleft x &= (A,B) \triangleleft (e,e) \\ &= ((AB)A(AB)^{-1}, (AB)B(AB)^{-1}) \\ &= ((AB)A(AB)^{-1}, ABA^{-1}). \end{aligned}$$

$AB \neq BA$ であるので, $ABA^{-1} \neq B$ である．従って, $y \triangleleft x \neq y$. Proposition 2.4 より, X は non-admissible である. □

G を群とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ を群自己同型とする．このとき, $\mathrm{GAlex}(G,\sigma) = (G, x \triangleleft y = \sigma(xy^{-1})y)$ を**一般化された Alexander カンドル (generalized Alexander quandle)** という．一般化された Alexander カンドルについては, admissibility に関する先行研究がある.

Proposition 2.6 ([1, Corollary], [4, Proposition 3.12]*5). $X = \mathrm{GAlex}(G,\sigma)$ を一般化された Alexander カンドルとする.

(i) σ の固定点集合が単位元のみからなるならば X は admissible である.
(ii) X が Alexander カンドル, すなわち, G がアーベル群ならば X は admissible である.

Proposition 2.6 より, 非可換群 G 上の一般化された Alexander カンドルが non-admissible であるかどうかを判定することは次に取り組むべき問題である．さらに [7] では GAP*6 を用いて位数 127 までの一般化された Alexander カンドルの同型類の完全なリストが与えられている．従って, このリスト内の一般化された Alexander カンドルの admissibility を決定することも取り組むべき問題である.

Remark 2.7. Proposition 2.4 は一般化された Alexander カンドルが non-admissible であることを示すことができない．実際, Proposition 2.4 の条件を満たす x, y が存在しないことを直接計算で確かめることができる．従って, Theorem 2.5 の (ii) におけるカンドルは一般化された Alexander カンドルではない.

2.3 三つ葉結び目型 $(1,1)$ タングルを用いた判定条件

カンドル $X = (X, \triangleleft)$ において, $\mathrm{Inn}(X)$ による X への作用の軌道を X の**代数的連結成分 (algebraic connected component)** と呼ぶ. X が**代数的連結 (algebraically connected)** であるとは $\mathrm{Inn}(X)$ による X への作用が推移的であることをいう.

*5 この論文中では, 共役カンドルを Dehn カンドルと呼んでいるが, このような呼び方は不適切に思われる.
*6 `https://github.com/Kurihara190/Classification_of_Generalized_Alexander_Quandles`

位相カンドル (topological quandle) (resp. **滑らかなカンドル (smooth quandle)**) $X = (X, \triangleleft)$ とは位相空間 (resp. 多様体) X 上のカンドル構造であり任意の $y \in X$ に対して S_y が自己同相写像 (resp. 自己微分同相写像) であることをいう. 位相カンドル X がハウスドルフかつ局所コンパクトならば写像 $S : X \to \mathrm{Inn}(X)$, $S(x) = S_x$, は連続写像である. ここで $\mathrm{Inn}(X)$ はコンパクト開位相により位相空間とみなす (詳細は [5] を参照[*7]). カンドル X に対して, $\mathrm{Dis}(X) = \left\langle S_x \circ S_y^{-1} \mid x, y \in X \right\rangle$ を X の **displacement 群**と呼ぶ.

Lemma 2.8. カンドル X の displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は次を満たす:

(i) $\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ による X への作用の軌道全体の集合は一致する.

(ii) X がハウスドルフかつ局所コンパクトな位相カンドルならば X の displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ はコンパクト開位相により連結な位相群となる. 特に X の代数的連結成分は連結な位相空間である.

Remark 2.9. (i) の証明は [8] による. 詳細な証明は省略する.

$\mathbb{H}$ を四元数全体の集合, すなわち, 次の関係式を満たす $\{1, i, j, k\}$ が張る $\mathbb{R}$ 上線形空間とする:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j.$$

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ のノルムを

$$\|q\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

で定義する. $\mathbb{H}$ のノルムを保つ線形同型写像 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 全体の集合がなす群を**シンプレクティック群 (symplectic group)** といい, $\mathrm{Sp}(1)$ と書く. $\mathrm{Sp}(1)$ は単純リー群である. 従って, $\mathrm{Sp}(1)$ は連結な正規部分群を持たない. $\sigma \in \mathrm{Sp}(1)$ を

$$\sigma(1) = 1,\ \sigma(i) = j,\ \sigma(j) = k,\ \sigma(k) = i$$

で定義される自己同型とすると σ は自己同型 $\sigma : \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{Sp}(1)$ を誘導する. このとき, 一般化された Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(\mathrm{Sp}(1), \sigma)$ は滑らかなカンドルである.

Proposition 2.10. 一般化された Alexander カンドル $\mathrm{GAlex}(\mathrm{Sp}(1), \sigma)$ は代数的連結で non-admissible である.

Proposition 2.10 を示すために Proposition 2.11 を用いる.

Proposition 2.11. X をカンドルとする. ある $x, y \in X$ が存在して $(x \triangleleft y) \triangleleft x = y$ かつ $(y \triangleleft x) \triangleleft y \neq x$ を満たすならば X は non-admissible である.

Proof. $\tilde{D}$ を Fig. 4 の図式とする. $\tilde{D}$ の任意の X 彩色は Fig. 4 で与えられ次の関係式を満たさなければならない:

$$(x \triangleleft y) \triangleleft x = y.$$

[*7] ここでは二項演算の連続性のみを仮定して S_y が自己（微分）同相写像であると述べているが, 双対演算 $\triangleleft^{-1}$ の連続性を仮定しなければ S_y^{-1} が連続になるとは限らない.

ある $x, y \in X$ が存在して, $(x \triangleleft y) \triangleleft x = y$ かつ $(y \triangleleft x) \triangleleft y \neq x$ を満たすならばある $\tilde{D}$ の X 彩

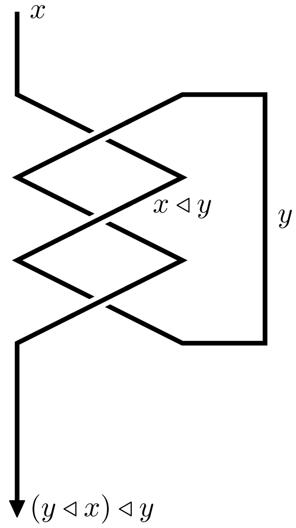

図 4　X 彩色された図式 $\tilde{D}$

色 $\tilde{C}$ が存在して $\tilde{C}(a_s) = x$ かつ $\tilde{C}(a_t) = (y \triangleleft x) \triangleleft y$ を満たす．従って Proposition 2.2 より, X は non-admissible である． □

Proof of Proposition 2.10. まず $\mathrm{GAlex}(\mathrm{Sp}(1), \sigma)$ が代数的連結であることを示す． 単位元 $1 \in \mathrm{Sp}(1)$ を含む代数的連結成分 P が $\mathrm{Sp}(1)$ と一致することを示せばよい．このとき P は Lemma 2.8 の (ii) より, 連結な位相空間である．さらに [7] より, P は $\mathrm{Sp}(1)$ の正規部分群である．$\mathrm{Sp}(1)$ は単純であるから, $P = \mathrm{Sp}(1)$ が従う．従って $\mathrm{GAlex}(\mathrm{Sp}(1), \sigma)$ は代数的連結である．

次に X が non-admissible であることを示す．$x = 1, y = j \in \mathrm{GAlex}(\mathrm{Sp}(1), \sigma)$ とおくと,

$$(x \triangleleft y) \triangleleft x = (1 \triangleleft j) \triangleleft 1 = (\sigma(-j)j) \triangleleft 1 = \sigma(\sigma(-j)j) = \sigma(-kj) = \sigma(i) = j = y,$$
$$(y \triangleleft x) \triangleleft y = (j \triangleleft 1) \triangleleft j = \sigma(j) \triangleleft j = \sigma(\sigma(j)(-j))j = \sigma(-kj)j = i^{-1} = -1 \neq x.$$

Proposition 2.11 より, X は non-admissible である． □

Remark 2.12. Proposition 2.10 のカンドル X は, [19, Conjecture 1.1] の反例である．

参考文献

[1] T. Akita, *Embedding Alexander quandles into groups*, J. Knot Theory Ramifications **32** (2023), no. 2, Paper No. 2350011.

[2] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. Math. **178** (2003), no. 2, 177–243.

[3] W. E. Clark, M. Saito, and L. Vendramin, *Quandle coloring and cocycle invariants of composite knots and abelian extensions*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 5, 1650024, 34.

[4] N. K. Dhanwani, H. R. Raundal and M. Singh, *Dehn quandles of groups and orientable surfaces*, Fund. Math. **263** (2023), no. 2, 167–201.

[5] M. Elhamdadi and E. M. Moutuou, *Foundations of topological racks and quandles*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 3, 1640002.

[6] M. Graña, I. Heckenberger and L. Vendramin, *Nichols algebras of group type with many quadratic relations*, Adv. Math. **227** (2011), no. 5, 1956–1989.

[7] A. Higashitani, S. Kamada, J. Kosaka, and H. Kurihara, *Classification of generalized Alexander quandles*, arXiv:2406.01074.

[8] A. Hulpke, D. Stanovský and P. Vojtěchovský, *Connected quandles and transitive groups*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), no. 2, 735–758.

[9] A. Inoue, *Knot quandles and infinite cyclic covering spaces*, Kodai Math. J. **33** (2010), no. 1, 116–122.

[10] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.

[11] S. Kamada and Y. Matsumoto, *Enveloping monoidal quandles*, Topology Appl. **146/147** (2005), 133–148.

[12] S. Kamada, *Quandles derived from dynamical systems and subsets which are closed under quandle operations*, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 298–301.

[13] S. Kamada, *Surface-knots in 4-space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017.

[14] O. Loos, *Symmetric spaces. I: General theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[15] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N. S.) **119** (**161**) (1982), no. 1, 78–88, 160.

[16] T. Nosaka, *On homotopy groups of quandle spaces and the quandle homotopy invariant of links*, Topology Appl. **158** (2011), no. 8, 996–1011.

[17] H. Ryder, *The Structure of Racks*, (Doctoral dissertation, University of Warwick), 1993.

[18] M. Takasaki, *Abstraction of symmetric transformations*, Tôhoku Math. J. **49** (1943), 145–207.

[19] K. Yonemura, *An embedding of a smooth quandle into Lie group*, Quandles and Symmetric Spaces 2023, 2024.