Generalizations of Regular Sequences and Grade, and Problems Related to Applications

東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻 / 株式会社スキルアップ NeXt
安藤遼哉 (Ryoya ANDO) *

概要

近年の可換環論において，Noether とは限らない環上の加群についてのホモロジー代数的な考察の重要度は年々高まっている．本講演では，正則列，grade といった概念の一般化とその応用について紹介し，講演者が得た結果に触れる．本稿の内容は [And22] と，未発表の内容に基づく．

1　導入

本稿を通して，環といえば 1 を持つ可換環のこととする．特に断らない限り Noether 性は課さない．可換環とは，可換な 2 つの演算，加法と乗法を備えた集合であり，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の一般化として考えることができる．また，イデアルは素因数分解における因子の一般化として導入された概念であり，これを解析することで様々な環の特徴づけが可能となる．その中でも，もっとも有名なものは Noether 環であろう．Noether 環とは，すべてのイデアルが有限生成であるような環のことである．特に体上の有限生成代数など，初等的な例が代数幾何学でも多く扱われる対象であること，またイデアルの有限性からくる扱いやすさから，可換環論における主要な興味の対象は Noether 環にあった．また，可換環論においては線型空間の拡張である加群と，その全体のなす圏の観察，すなわちホモロジー代数が重要な役割を果たす．

Noether 環論において，イデアル論的な不変量と，ホモロジー代数的な不変量の間の関係によって特徴づけられる環はよく研究されている．イデアル論的な不変量の代表例は，素イデアル列の長さの極大値として定義される Krull 次元 である．また，ホモロジー代数的な不変量として，射影次元，入射次元，大域次元 (global dimension) や，深さ (depth) などがあり，正則局所環，Cohen–Macaulay 局所環，Gorenstein 局所環はそれぞれ Krull 次元が大域次元，深さ，入射次元と等しい環として特徴つけられる．このように，環のイデアルとホモロジー的性質の関係を調べることは，可換環論における主要な潮流の一つである．

1960 年代からホモロジカル予想と呼ばれる一連の予想が提唱され始め，Hochster によりこれを包括する big Cohen–Macaulay（CM）予想が提唱された（ほとんどのホモロジカル予想は big CM 予想から従う）．

* E-mail:andou@ma.noda.tus.ac.jp, r_ando@skillupai.com.

定理 1.1 (big CM 予想, André, 2018)**.**
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．このとき，以下の条件を満たす A 代数 B が存在する．

- $B \neq \mathfrak{m}B$
- A の巴系 (system of parameters) は，B 上で正則列をなす．

このような B を，A の big CM 代数と呼ぶ．

big CM 代数は，A 自身が Cohen–Macaulay 環でない場合に，A をうまく近似するような代数であって，CM 性に近い性質を持ったもの，と考えることができる．

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とする．環 A の標数 $\operatorname{Char} A$ は以下の 4 つの場合に分類される．

	$\operatorname{Char} A$	$\operatorname{Char} k$
等標数 0	0	0
等標数 p	p	p
混標数 $(0, p)$	0	p
混標数 $(p^n, p), (n > 1)$	p^n	p

表 1　環とその標数の組み合わせ

ホモロジー予想は，等標数の場合には古典的に解決されていたが，混標数の場合はより困難であった．等標数の場合，フロベニウス写像 $F : A \to A;\ a \mapsto a^p$ は環準同型となり，この写像の解析が重要な手法となる．フロベニウス写像が全単射であるとき，A は**完全 (perfect)** であるという．この概念を混標数の場合に拡張したものが，**パーフェクトイド (perfectoid)** である．André ([And18],[And18]) はパーフェクトイド代数を駆使することで big CM 予想を解決した．また，等標数の場合に強力であった Kunz の定理は，パーフェクトイドの手法を用いることで混標数の場合に拡張できる．

定理 1.2 ([Kun76])**.**
A を $\operatorname{Char} A = p > 0$ であるような Noether 環とする．このとき，以下の条件は同値である．

1. A は正則である．
2. $F : A \to A; a \mapsto a^p$ は平坦である．

定理 1.3 ([BIM19, Theorem 4.7.])**.**
A を $p \in \operatorname{rad} A$ であるような Noether 環とする．このとき，以下の条件は同値である．

1. A は正則である．
2. 忠実平坦 A 代数 $A \to B$ で，B がパーフェクトイドとなるものが存在する．

このようにパーフェクトイド環は Noether 環を調べる上でも重要な環のクラスであるが，そのような環はもはや Noether 環ではない．例えば，p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ に，p の p べき根をすべて付け加え p 進完備化した環 $\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]}$ がパーフェクトイド環の典型例であるが，これは Noether ではない巨大な

環である．よって，Noether 環論の研究においても，非 Noether 環に対して適用可能な理論を展開する必要がある．

2　局所コホモロジーと弱副正則列

その例として，Grothendieck によって導入された局所コホモロジーを紹介する．局所コホモロジーは一般に有限生成ではないが，Artin 加群にはなる．Noether 環上では Čech コホモロジーという計算可能なデータと一致することもあり，ホモロジカルな環論の研究において非常に有用な道具となっている．これを非 Noether 環上でどのようにして扱うべきか，についてそのさわりを紹介する．

定義 2.1.
A を環，I を A のイデアルとする．$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/I^n, -)$ の右導来関手 $H^i_I(-)$ を**局所コホモロジー (local cohomology)** と呼ぶ．

帰納極限をとる操作は完全関手であるため，以下の同型が成り立つことに注意されたい．

$$H^i_I(M) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^i(A/I^n, M)$$

局所コホモロジーは，その定義から直接計算することが難しいが，Noether 環上であれば次の Čech コホモロジーによって具体的な計算を行うことが可能である．

定義 2.2.
A を環，$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ とする．$\{e_i\}$ を A^r の標準基底とする．各 $I = \{j_1, \ldots, j_i\}$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq r)$ に対し，$a_I = a_{j_1} \cdots a_{j_i}$ および $e_I = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ とおく．
$C^\bullet(\underline{a})$ を以下で定義される複体とする．

$$C^i(\underline{a}) \coloneqq \sum_{\# I = i} A_{a_I} e_I,$$

$$d^i : C^i(\underline{a}) \to C^{i+1}(\underline{a}); e_I \mapsto \sum_{j=1}^{r} e_I \wedge e_j.$$

これを **Čech 複体**と呼ぶ．また，$C^\bullet(\underline{a})$ のコホモロジー $\check{H}^i(\underline{a})$ を **Čech コホモロジー**と呼ぶ．$M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，$C^\bullet(\underline{a}, M) \coloneqq C^\bullet(\underline{a}) \otimes M, \check{H}^i(\underline{a}, M) \coloneqq H^i(C^\bullet(\underline{a}, M))$ と定義する．

定理 2.3.
A を Noether 環，$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ とする．任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，以下の同型が存在する．

$$H^i_I(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

ここで Noether 性の仮定を外すとどうなるだろうか？という疑問が自然に湧いてくる．Schenzel [Sch03] は**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** を導入することで，この定理を拡張した．弱副正則列は Koszul ホモロジーを用いて定義される．

定義 2.4 (Schenzel)**.**

A を環，$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ とする．$\underline{a}$ が**弱副正則列**であるとは，すべての $1 \leq i \leq r$ および $n \geq 0$ に対し，ある $m \geq n$ が存在して，$\varphi_{mn} : H_i(\underline{a}^m) \to H_i(\underline{a}^n)$ がゼロ写像になることである．

[GM92] では，副正則列が定義されており，Schenzel はそれをふまえて弱副正則列の定義を導入した．正則列ならば副正則列，副正則列ならば弱副正則列である．

定義 2.5 ([GM92])**.**
A を環とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ について，$((a_1^m, \ldots, a_{i-1}^m) : a_i^m A) \subset ((a_1^n, \ldots, a_{i-1}^n) : a_i^{m-n} A)$ がなりたつとき，$a_1, \ldots, a_r$ を**副正則列 (proregular sequence)** という．

定理 2.6 (Schenzel)**.**
A を環，$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ とする．

$$\underline{a} \text{ が弱副正則列である} \iff {}^{\forall} i \geq 0, {}^{\forall} M \in \mathrm{Mod}(A), H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M).$$

A が Noether 環ならば，任意の列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ は弱副正則列であり，Schenzel の定理は Noether 環の場合の拡張になっている．

Schenzel は導来圏の理論を用いて定理 2.6 を証明したが，著者は [And22] において，Abel 圏の枠組み内に収まるより単純な証明を与えた．これにより，Schenzel の定理は教科書レベルのホモロジー代数の命題を適切に組み合わせることで証明のフォローを行うことが可能になった．

弱副正則列は，[BIM19] により正則性の特徴づけに応用されている．

定理 2.7 ([BIM19, Theorem 4.13])**.**
$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所優秀整域とし，以下のいずれかの条件が満たされるならば，A は正則である．

1. A は正標数であり，ある $i \geq 1$ で $\mathrm{Tor}_i^A(A_{\mathrm{perf}}, k) = 0$ となる．
2. A は正標数であり，ある $i \geq 1$ で $\mathrm{Tor}_i^A(A^+, k) = 0$ となる．
3. A は混標数であり，$\dim A \leq 3$ かつ，ある $i \geq 1$ で $\mathrm{Tor}_i^A(A^+, k) = 0$ となる．

この定理において，$\underline{a}$ を A の巴系としたとき，各条件のもとで A_{perf} および A^+ 上で弱副正則であることが示される．それによって十分大きい i について $\mathrm{Tor}_i(k, k)$ が消滅することを導くことができ，A が正則であることを証明することができる．

3 Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化

Noether 環論において，Cohen–Macaulay 環は特に振る舞いの良い環のクラスとして活発に研究されてきた．Noether 局所環 A に対して，以下の条件は同値である．

1. $\dim A = \operatorname{depth} A$．ここで $\operatorname{depth} A$ は A の極大イデアルに含まれる正則列の最大の長さと等しい．
2. すべての巴系は正則列である．
3. すべての（真の）イデアル I に対して，$\operatorname{ht} I = \operatorname{grade} I$．

これらの条件を満たす環を **Cohen–Macaulay 環**と呼ぶのであった．しかし，これらの概念の単

純な一般化はうまくいかない．例えば付値環を考えてみよう．

- 任意の（体でない）付値環 V に対して，$\operatorname{depth} V = 1$ である．
- 非 Noether 付値環 V に対して，$\dim V \geq 2$ である．

一方で，すべての付値環は連接正則環 (coherent regular ring) である．この概念は正則環の一般化であり，Noether な連接正則環は Cohen–Macaulay である．したがって，（Noether とは限らない）付値環もまた Cohen–Macaulay であると考えるのが自然である．ゆえに，$\dim A = \operatorname{depth} A$ という条件に基づいて Cohen–Macaulay 性を非 Noether 環へ一般化することは自然ではない．そこで，以下の条件を満たすような非 Noether 環への一般化を模索する．

1. Noether 環の場合には，古典的な定義と一致する．
2. 連接正則環は Cohen–Macaulay となる．
3. A が Cohen–Macaulay $\iff$ $A[X]$ が Cohen–Macaulay.
4. A が Cohen–Macaulay $\iff$ すべての $P \in \operatorname{Spec} A$ で A_P が Cohen–Macaulay.

big CM 予想（定理 1.1）や [BIM19] の結果（定理 2.7）においても，巴系がどのような挙動を示すか，とくに正則かどうかに焦点が当てられていた．そこで，[HM07] において，弱副正則列を用いて巴系を一般化することで，条件 1 および 2 を満たし，かつ条件 3, 4 の「if」部分を満たす定義が提案された（「only if」部分については未解決である）．

定義 3.1 ([HM07, Definition 3.1, 4.1])**.**
A を環，M を A 加群とする．点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ が**パラメータ列 (parameter sequence)** であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. $\underline{a}$ は弱副正則列である．
2. $\underline{a}A \neq A$.
3. $\underline{a}$ を含むすべての素イデアル P に対して，$\check{H}^r(\underline{a}, A)_P \neq 0$ である．

また，点列 $\underline{a}$ が**強パラメータ列 (strong parameter sequence)** であるとは，$i = 1, \ldots, r$ に対して $a_1, \ldots, a_i$ がパラメータ列となることである．すべての強パラメータ列が正則列となるとき，環 A は **Cohen–Macaulay** であるという．

A が Noether 環であれば，パラメータ列と巴系の概念は一致する．したがって，この定義は Noether 環における定義の一般化となっている．

[HM07] では，いくつかのクラスの環が実際に Cohen–Macaulay になることが示されている．例えば，A を標数 $p > 0$ の優秀整域としたときの A^+ などである．

彼らの議論では, Hochster [Hoc74] によって導入された, 古典的な grade の拡張である polynomial grade が用いられている．本稿では，この概念に関連するいくつかの命題を提示し，また [HM07] の主張に対する反例を挙げる．

4 polynomial grade

定義 4.1 ([Hoc74])**.**
A を環，M を A 加群とする．点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$. $\underline{a}$ が weak M-sequence であるとは，a_i が $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ の非零因子であることをいう．

weak M-sequence $\underline{a}$ について $M/\underline{a}M \neq 0$ なら，これは正則列に他ならない．この呼び方は [BH97] に倣った．[Hoc74] は possibly improper regular sequence on M と定義している．

イデアル I について $\mathrm{grade}_I(M)$ を I の中の weak M-sequence の最長の長さとし，$\mathrm{depth}_I(M)$ を I の中の regular M-sequence の最長の長さとする．ここで，grade について Noether 環においては次の事実が正しい．

補題 4.2.
A を Noether 環，I をそのイデアルとし，M を有限生成 A 加群とする．

$$\mathrm{grade}_I(M) > 0 \iff (0 :_M I) \coloneqq \{x \in M \mid Ix = 0\} = 0.$$

証明.
($\Longrightarrow$) は明らかであるから，逆を示そう．$(0 :_M I) = 0$ とすると，任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ に対して $I \not\subset P$ である．A が Noether で M が有限生成だから $\operatorname{Ass} M$ は有限であり，Prime avoidance より $I \not\subset \cup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$ となる．右辺は M の零因子全体だから，I の中に M 正則元が存在する． □

しかし Noether をはずすと，$(0 :_M I) = 0$ だが grade が 0 となることがある．つまり，任意の $x \in M$ に対してある $a \in I$ が存在して $ax = 0$ となっているにも関わらず，任意の $a \in I$ に対してある $x \in M$ が存在して $ax = 0$ となることがある．そのような例は，例えば trivial extension を用いることで構成できる．

定義 4.3 (trivial extension, [Nag62])**.**
A を環とし，M を A 加群とする．直和 $A \oplus M$ に次の演算を定めると環になる；

$$(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y),$$
$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx).$$

これを $A * M$ とかき，A の M による trivial extension またはイデアル化 (idealization) という．

$(a, x) \in A * M$ が $A * M$ 正則であることは，a が A 正則かつ M 正則であることと同値である．

例 4.4 ([Vas71])**.**
k を体とし，$A = k[[x, y]], \mathfrak{m} = (X, Y), M = \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec} A, \operatorname{ht} P = 1} A/P$ とする．このとき $A * M$ において，$(0 :_{A*M} \mathfrak{m} * M) = 0$ だが $\mathrm{grade}_{\mathfrak{m}*M} A * M = 0$ である．

さて，補題 4.2 を多項式環上に拡大すると，次の事実が成り立っている．

補題 4.5 ([Nor76, Chap. 5, Thm. 7])**.**
A を環とし，M を A 加群とする．有限生成イデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ に対し，$\mathrm{grade}_{IA[X]}(M \otimes_A A[X]) > 0$ であることは，$(0 :_M I) = 0$ と同値である．

そこで，次の指標を考える．

定義 4.6 ([Nor76, Chap. 5.5])**.**
A を環とし，I をそのイデアル，M を A 加群とする．

$$\text{p-grade}_I M := \lim_{n\to\infty} \mathrm{grade}_{IA[X_1,\ldots,X_n]}(M[X_1, \ldots, X_n]).$$

これを M の I に関する polynomial grade という．

一般に次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{grade}_{IA[X_1,\ldots,X_n]}(M[X_1, \ldots, X_n]) \leq \sup\left\{\mathrm{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \mid B : \text{faithfully flat } A\text{-algebra}\right\}.$$

これの等号がなりたつことを示したい．[HM07] には証明抜きで言及されている．

また，[Hoc74] は，(I, M) が許容的（定義 4.7）であるときに，右辺を classical ではない grade の定義としている．

定義 4.7 ([Hoc74])**.**
(I, M) が**許容的 (admissible)** であるとは，任意の忠実平坦 A 代数 B に対して，任意の IB に含まれる weak $M \otimes B$-sequence が $M \otimes B$ 正則列になっていることをいう．

$IM \neq M$ ならば，(I, M) は許容的である．また M が有限生成の時，$IM \neq M$ と (I, M) が許容的であることは同値．つまり，M が有限生成ならば $IM = M$ であるとき (I, M) は許容的ではない．

命題 4.8 ([Hoc74, Sect.1, Prop.2])**.**
A を環とし，I をそのイデアル，M を A 加群とする．B を忠実平坦 A 代数としたとき，(I, M) が許容的ならば，ある $n \geq 0$ が存在して，$\mathrm{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \leq \mathrm{grade}_{IA[X_1,\ldots,X_n]}(M[X_1, \ldots, X_n])$ である．

よって，$IM \neq M$ のとき $\lim \mathrm{grade}(M[X_1, \ldots, X_n]) = \sup\{\mathrm{grade}(M \otimes B)\}$ であることはわかった．

$IM = M$ の場合を考える．M が有限生成なら，中山の補題により左辺が ∞ となり，等号の成立がわかる．

命題 4.9.
A を環, I をそのイデアル, M を有限生成 A 加群とし, $IM = M$ とする．このとき $\mathrm{grade}_I M = \infty$ である．特に $\lim \mathrm{grade}(M[X_1, \ldots, X_n]) = \infty$ となり所望の等号は成り立つ．

証明.
$IM = M$ なので，中山の補題より $a \in A$ であって $(a + 1) \in I$ かつ $aM = 0$ となるものがとれる．すると $a + 1$ は M 正則であって，$M/(a + 1)M = 0$ なので $a + 1, a + 1, \cdots,$ のように取り続けることができる．すなわち $\mathrm{grade}_I(M) = \infty$ である． □

つまり $IM = M$ かつ M が有限生成でないときが問題である．

例 4.10 (A.)**.**

$A = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z}, M = \{a/2^n + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ とおくと，$IM = M$ かつ I の任意の元は M 正則ではありえない．すなわち $\operatorname{grade}_I M = 0$ である．よって，$IM = M$ のとき $\operatorname{grade}_I(M) = \infty$ となるとは限らない．この例では，I が単項生成なので，任意の忠実平坦な A 代数 B について $\operatorname{grade}_{IB}(M \otimes B) = 0$ である（結果的に両辺 0 で等号は成り立つ）．

$\operatorname{grade}_I M = 0$ だからといって，p-grade が 0 とは限らない．特に Vasconcelos の例（例 4.4）では，補題 4.5 により p-grade が正になる（この例では $IM \neq M$ ではあるが）．

また (I, M) が許容的でないならば，次が言えている．

補題 4.11.

A を環とし，I をそのイデアル，M を A 加群とする．(I, M) が許容的でないならば，

$$\sup \{\operatorname{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \mid B : \text{faithfully flat } A\text{-algebra}\} = \infty$$

である．

証明.

ある忠実平坦 A 代数 B と，IB の点列で weakly $M \otimes B$-sequence だが regular $M \otimes B$-sequence でない列 $\underline{b}$ が存在する．つまり，$\underline{b}, b_0, b_0, \cdots$ が長さ無限の weakly $M \otimes B$-sequence となる． $\square$

よって次の命題を示せばよい．

命題 4.12 (A.)**.**

A を環とし，I をそのイデアル，M を A 加群とする．(I, M) を許容的でないとする．このとき，$\lim \operatorname{grade}(M[X_1, \ldots, X_n]) = \infty$ である．

証明.

[Hoc74, Sect. 1, Prop. 3] より，ある $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \subset I$ が存在して，任意の i に対して Koszul ホモロジーが消えている，つまり $H_i(\underline{a}, M) = 0$ である．いま Koszul 複体 $K_\bullet(\underline{a}, M)$ を考えると $d_r : M \to M^r; x \mapsto (a_1 x, -a_2 x, \ldots, \pm a_r x)$ である．よって

$$H_r(\underline{a}, M) = \ker d_r = \{x \in M \mid a_i x = 0 \text{ for all } i\}$$

であり，いますべての Koszul ホモロジーが消えているから $\{x \in M \mid a_i x = 0 \text{ for all } i\} = 0$ である．すると $u_1 \coloneqq \sum_{i=1}^r a_i X_1^i$ は $M[X_1]$ の正則元である．各 i に対して $H_i^{A[X_1]}(\underline{a}, M[X_1]) = H_i^A(\underline{a}, M) \otimes A[X_1] = 0$ であり，また短完全列

$$0 \longrightarrow M[X_1] \xrightarrow{u_1 \cdot} M[X_1] \longrightarrow M[X_1]/uM[X_1] \longrightarrow 0$$

から誘導される Koszul homology の長完全列を考えることで，$H_i^{A[X_1]}(\underline{a}, M[X_1]/uM[X_1]) = 0$ となる．よって $u_2 \coloneqq \sum_i^r a_i X_2^i$ とおくと，これは同様に $M[X_1]/u_1 M[X_1]$ 上の正則元となり，$H_i^{A[X_1, X_2]}(\underline{a}, M[X_1, X_2]/uM[X_1, X_2]) = 0$ となる．よって，繰り返すことによって $\lim \operatorname{grade}(M[X_1, \ldots, X_n]) = \infty$ であることがわかる． $\square$

定理 4.13 (A.).

A を環とし，I をそのイデアル，M を A 加群とする．

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{grade}_{IA[X_1,\ldots,X_n]} M[X_1,\ldots,X_n] = \sup\{\mathrm{grade}_{IB}(M\otimes_A B) \mid B : \text{faithfully flat } A\text{-algebra}\}$$

である．

再掲になるが、[HM07] には証明なしで記載されており，well-known for expart かと思うが，証明はある程度非自明である．

証明.

(I, M) が許容的であるならば，命題 4.8 により，等号が成り立っている．許容的でないときは命題 4.12 により，等号が成り立つ． □

また，本稿の最後に，[HM07] に記載されている主張の反例について触れておく．[HM07, Prop. 2.7.] によると，A を環，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ を有限生成イデアル，M を A 加群とするとき，次が成り立つ．

$$\text{p-grade}_I(M) = \sup\{k \geq 0 \mid H_{\ell-i}(\underline{a}, M) = 0 \text{ for all } i < k\} = \sup\left\{k \geq 0 \;\middle|\; \check{H}^i_I(M) = 0 \text{ for all } i < k\right\}.$$

さらに，$\text{p-grade}_I(M) < \infty$ であることは $IM \neq M$ と同値である，と主張している．しかしこれは正しくない．例 4.10 が反例である．この例については $\text{p-grade}_I(M) = 0$ であり，Koszul ホモロジー, Čech コホモロジーを計算すると (2),(3) もすべて 0 ではある．証明を読む限りでは，これらの不変量が一致することは正しそうだが，証明なしに言及されている「Moreover」の部分は正しくない，という形のようである．

参考文献

[And22] R. Ando (2022) "A note on weakly proregular sequences", *Moroc. J. Algebra Geom. Appl.*, Vol. 1, No. 1, pp. 98–107.

[And18] Y. André (2018a) "La conjecture du facteur direct", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, Vol. 127, No. 1, pp. 71–93, DOI: 10.1007/s10240-017-0097-9.

[And18] Y. André (2018b) "Le lemme d' Abhyankar perfectoide", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, Vol. 127, No. 1, pp. 1–70, DOI: 10.1007/s10240-017-0096-x.

[BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma (2019) "Regular rings and perfect(oid) algebras", *Comm. Alg.*, Vol. 47, No. 6, pp. 2367–2383, DOI: 10.1080/00927872.2018.1524009.

[BH97] W. Bruns and J. Herzog (1997) *Cohen–Macaulay Rings*, Vol. 39 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics : Camb. Univ. Press, revised edition.

[GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) "Derived functors of I-adic completion and local homology", *J. Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.

[HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) "Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings", *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.

[Hoc74] M. Hochster (1974) "Grade-Sensitive Modules and Perfect Modules", *Proc. London. Math. Soc.*, Vol. s3-29, pp. 55–76, DOI: 10.1112/plms/s3-29.1.55.

[Kun76] E. Kunz (1976) "On Noetherian Rings of Characteristic p", *Amer. J. Math.*, Vol. 98, No. 4, pp. 999–1013, DOI: 10.2307/2374038.

[Nag62] M. Nagata (1962) *Local rings*, Vol. No. 13 of Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics : Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, pp.xiii+234.

[Nor76] D. G. Northcott (1976) *Finite free resolutions*, Vol. 71 of Cambridge tracts in mathematics : Camb. Univ. Press.

[Sch03] P. Schenzel (2003) "Proregular sequences, local cohomology, and completion", *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.

[Vas71] W. V. Vasconcelos (1971) "Annihilators of modules with a finite free resolution", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 440–442, DOI: 10.2307/2038576.