

A simple derived categorical generalization of Ulrich bundles

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

吉田 智輝 (Tomoki Yoshida) ^{*1}

概要

本稿では, Ulrich 束の導来圏の一般化として Ulrich 対象を定義する. Ulrich 束とは非常に豊富な直線束による偏極非特異射影代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 上に定まる特殊な層の一種である. また, 接続層の導来圏とは代数多様体上の層のコホモロジーの情報を統一的に扱うことのできる圏である. 層の Ulrich 性にはいくつかの特徴づけが知られており [ES03], それはコホモロジー的な条件による特徴づけを含んでいる. この特徴づけを用いて Ulrich 性の定義を層の複体へと一般化することで Ulrich 対象を定義する. また, [ES03] における Ulrich 束の特徴づけの Ulrich 対象における類似の結果や, Ulrich 対象を用いた Eisenbud-Schreyer 予想への応用についても紹介し, それらの証明の概略を解説する.

1 イントロダクション

代数幾何学は, 有限個の多項式の零点集合を貼り合わせて構成される代数多様体と呼ばれる幾何的対象の性質を研究する分野である. 代数多様体はその幾何的性質によってその呼び名が決まることが多い. たとえば, 標準束が自明であり, 不正則数 $q = 0$ を満たす代数曲面は K3 曲面と呼ばれる. また, 射影曲面を一般の位置にある $d(< 9)$ 個の点で爆発して得られる曲面は del Pezzo 曲面と呼ばれる. これらの代数多様体は多様体としての性質が豊かである一方で, それらを定義する具体的な代数方程式の形を明らかにすることは, しばしば非常に困難である.

具体的な方程式を考える上で最も単純なケースは超曲面の場合である. 代数多様体が射影空間 $\mathbb{P}_k^{n+1}$ 内の超曲面であるとは, ある代数的な既約斉次多項式 $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ の零点集合 $(F = 0)$ により定義されるときをいう. このときは Beauville によって次のようなことが知られている:

定理 A ([Bea00]). $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を次数 d の斉次方程式 F により定義される超曲面とする. このとき, 次の 2 条件は同値である:

1. 正整数 r と 1 次式係数行列 M が存在して $F^r = \det M$ と書ける,
2. X 上の階数 r ベクトル束 $\mathcal{E}$ で次の線形分解を持つものが存在:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-1)^{\oplus rd} \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}^{\oplus rd} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

つまり, 特殊な条件を満たすベクトル束の存在性が, 超曲面が“線形代数的”な表示をもつことに対応している, ということを示している.

1.1 Ulrich 束について

Eisenbud と Schreyer ([ES03]) は, 一般の射影空間に埋め込まれた非特異射影代数多様体 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対して **定理 A** の同値条件 2. の線形分解の長さを一般化した性質をもつ X 上の特殊なベクトル束

^{*1} E-mail: [tomoki_y\[at\]asagi.waseda.jp](mailto:tomoki_y[at]asagi.waseda.jp) or [tomoki.yoshida6\[at\]gmail.com](mailto:tomoki.yoshida6[at]gmail.com)

を **Ulrich 束** と定義した．定義方程式について議論するためには，代数多様体が射影空間へどのように埋め込まれているかについても固定しておかなければならないこと，代数多様体 X の射影空間への埋め込みは， X 上の非常に豊富な直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ (または単に $\mathcal{O}(1)$) を固定することに対応している [Har77, Chapter II, Section 7] ことに注意する．

以上をまとめると，次のようになる： X を n 次元の非特異射影代数多様体， $\Phi_{|\mathcal{O}(1)|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を X 上の非常に豊富な直線束 $\mathcal{O}(1)$ による埋め込みとする． X 上の接続層 $\mathcal{E}$ が Ulrich 束であるとは，次の ($\mathbb{P}^N$ 上における) 線形分解が存在するときをいう：

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-N+n)^{\oplus a_{N-n}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{\oplus a_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}^{\oplus a_0} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

(Ulrich 束にはいくつかの同値な定義がある．[定義 2.2](#) と [定理 2.4](#) をみよ．)

従って，与えられた $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 上に Ulrich 束が存在するということは，射影空間 $\mathbb{P}^N$ の中で X が (X に台を持つ層 $\mathcal{E}$ を通じて) 線形代数的な情報のみによって切り出すことができるということに等しい．従って，このような出自から Ulrich 束の研究上最も重要視される点はその存在性である．次の予想は，今日 Eisenbud-Schreyer 予想と呼ばれている予想である．

予想 B (Eisenbud-Schreyer 予想)．任意の非特異射影代数多様体 X と X 上の非常に豊富な因子 $\mathcal{O}_X(1)$ に対して，Ulrich 束が存在する．

Eisenbud-Schreyer 予想は広く肯定的な答えを持っていると考えられている．現時点で知られている例としては，代数曲線 [ES09]，完全交叉 [HUB91]，グラスマン多様体 [CMR15] などがある．これらの証明は完全交叉の場合は超曲面の行列因子化，グラスマンの場合は Borel-Weil-Bott の定理などそれぞれの代数多様体固有の技術を用いている．そのため [予想 B](#) の一般的な解決には遠い状況である．

1.2 接続層の導来圏と Ulrich 対象について

接続層の導来圏とは， X 上の接続層の複体を対象に持つ圏であり，三角圏の一種である．代数多様体を調べる際に導来圏を考えることは，環を調べる際に環上の加群の複体の圏を考えることに対応している．接続層の導来圏は層係数コホモロジー理論の基盤言語として導入された．その後，Bondal と Orlov によって，標準層が豊富もしくは反豊富のとき，導来圏の同値 $D^b(X) \cong D^b(Y)$ が多様体の同型 $X \cong Y$ を誘導することが示された．これをきっかけに代数幾何学における文脈では，主に代数多様体の不変量として研究されてきた．

そのようにして発展してきた導来圏の理論は近年，ベクトル束や層それ自体の分類や研究にも役に立つことが分かっている．例えば，福岡，原，石川は [FHI23] において，「次数 2 以下の 3 次元 del Pezzo 多様体上の階数 2 の弱ファノ束は常に分裂する」という主張を導来圏の例外生成列やその変異関手といった手法を用いて証明している．

[Yos25] では，そのベクトル束として Ulrich 束に着目し，導来圏の理論を適用することを考える．まず，Ulrich 束の導来圏への一般化として，**Ulrich 対象**を定義する．そのために Ulrich 束のコホモロジーの特徴づけ ([定理 2.4](#)) を利用する．その定義の下で，Ulrich 束の特徴づけ ([定理 2.4](#)) の部分的な Ulrich 対象における類似として，次の定理を得た．

定理 C ([Yos25, Proposition 2.2])． $(X, \mathcal{O}_X(1))$ を非常に豊富な直線束による偏極非特異射影代数多

様体とし、 $E \in D^b(X)$ を Ulrich 対象、 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を有限線形射影 (定義 2.3 をみよ) とする。このとき、次は同値である：

1. $E \in D^b(X)$ が Ulrich 対象である。
2. $\pi_* E \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rangle$ 。
3. ゼロでない任意のコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(E)$ が Ulrich 束である。

1.3 Eisenbud-Schreyer 予想への応用について

定理 C から、Ulrich 束の存在性と Ulrich 対象の存在性は同値である。これを導来圏的観点から再解釈すると、Ulrich 束の存在性は次のように言い換えることができる：

$$\mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n) \text{ が導来圏 } D^b(X) \text{ の生成元でない。}$$

これを用いて次の定理を得た：

定理 D ([Yos25, ES09]). 任意の代数曲線 C とその上の非常に豊富な因子に対して、Ulrich 対象が存在する。

代数曲線上の Ulrich 束の存在性は、結果としては既に [ES09] で知られていた。しかし本研究で行った証明はこれまでの証明と比べ、代数多様体自体の幾何学的条件やその射影空間への埋め込みに依らない証明である。

本稿の内容は筆者による論文 [Yos25] に基づく。

また、本稿を通じて、 $k = \bar{k}$ で代数閉体、 X で k 上定義された n 次元非特異射影代数多様体、 $\mathcal{O}_X(1)$ (または単に $\mathcal{O}(1)$) によって X 上の非常に豊富な直線束を表すものとする。また、 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 上の層 $\mathcal{E}$ に対し、 $\mathcal{E}(i) := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(i)$ と定める。

本稿の構成. Section 2 では、Ulrich 対象の定義とその特徴づけ (定理 C) を紹介し、その証明で用いられる技術やアイデアに関して記述する。そのために Section 2.1 では Ulrich 束に関する準備、Section 2.2 では導来圏に関する準備を行う。Section 3 では、Ulrich 束の導来圏への一般化である Ulrich 対象を用いた予想 B へのアプローチについて紹介する。特に定理 D の証明の概略を紹介する。

謝辞. 本研究は JST SPRING, Grant Number JPMJSP2128 の助成を受けたものである。

2 Ulrich 対象の定義と初等的性質

2.1 Ulrich 束に関する準備

本節では、Ulrich 束に関してその基本的な定義と性質を述べる。基本的な事柄や証明については [CMRPL21] を参照。

定義 2.1. X 上の層 $\mathcal{E}$ が **arithmetically Cohen-Macaulay** (または単に aCM) とは、locally Cohen-Macaulay (つまり、任意の $x \in X$ に対して $\text{depth } \mathcal{E}_x = \dim \mathcal{O}_{X,x}$) かつ任意の $t \in \mathbb{Z}$ と

$i = 1, \dots, n-1$ に対して $H^i(X, \mathcal{E}(t)) = 0$ が成り立つときをいう.

定義 2.2. $(X, \mathcal{O}(1))$ 上の正規化された (initialized) 層 $\mathcal{E}$ が **Ulrich 束** であるとは, aCM 束かつ $h^0(\mathcal{E}) = \deg X \operatorname{rk} \mathcal{E}$ が成り立つときをいう.

Ulrich 層がどのようなものであるかを主張する特徴づけを紹介する前に, ひとつ記法を導入する.

定義 2.3. $(X, \mathcal{O}(1))$ に対して, 射 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を次のように定める:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi_{|\mathcal{O}(1)|}} & \mathbb{P}^N \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & \mathbb{P}^n, \end{array}$$

ここで, p は $\mathbb{P}^N \setminus X$ の点からの線形射影の合成であり, $\pi := p \circ \Phi_{|\mathcal{O}(1)|}$ である. このように定められた π を **有限線形射影 (finite linear projection)** と呼ぶ.

注意. • Ulrich 層は aCM であるから常にベクトル束である. 実際, Auslander-Buchsbaum の公式から, 各 $x \in X$ に対して

$$\operatorname{pd} \mathcal{E}_x = \operatorname{depth} \mathcal{O}_{X,x} - \operatorname{depth} \mathcal{E}_x = 0$$

が成り立つ. 従って, $\mathcal{E}_x$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ 自由加群となる. 従って, Ulrich 層と Ulrich 束は同一の概念であり, 特に区別なくどちらの呼称も用いる.

- 有限線形射影は有限射である.

以上の準備の下, Eisenbud と Schreyer によって証明された, Ulrich 束の性質を記述する特徴付けを紹介する.

定理 2.4 ([ES03, Proposition 2.1.]). X の埋め込みを $\Phi_{|\mathcal{O}_X(1)|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ とかく. また, $\mathcal{E}$ を正規化された X 上のベクトル束とする. このとき次の 4 条件は同値となる:

1. $\mathcal{E}$ は Ulrich 束である.
2. 次の分解が存在する:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-N+n)^{\oplus a_{N-n}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{\oplus a_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}^{\oplus a_0} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

3. $H^i(\mathcal{E}(-j)) = 0$ ($i \geq 0, j = 1, \dots, n$),
4. ある有限線形射影 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ と, ある正整数 m に対して, $\pi_* \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus m}$ が成り立つ.

定理 2.4 の特徴づけは各々が非常に意義のある表示をしている. 2 つめは, Ulrich 束は Beauville の結果 **定理 A** を一般化したものであるということ, 3 つめは Ulrich 束はコホモロジー的に特徴づけることができるということ, 4 つめは, Ulrich 束とはある種, 射影空間の構造層のような振る舞いをする層のことであるということを示している.

2.2 導来圏に関する簡潔な復習

ここでは, **Section 2.3** 以降で用いられる連接層の導来圏に関する基本的事項や記法・約束について簡単に述べる. より正確には, また, 証明については [Huy06, 上戸 20] を参照.

X を n 次元の非特異射影代数多様体とし、 $D^b(X) := D^b(\mathbf{Coh}(X))$ を接続層の有界導来圏とする (右肩の b は有界を表す bounded の b である). 導来圏の対象 $E \in D^b(X)$ は実体としては次のような接続層の複体である:

$$E : (\cdots \xrightarrow{d^{-2}} E^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \cdots).$$

ここで、各 E^i は X 上の接続層であり、各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $d^i \circ d^{i-1} = 0$ を満たす. また、複体が有界であるとは、 $|i| \gg 0$ に対し、 $E^i = 0$ が成り立つときをいう.

導来圏の対象 E に対して、層の複体としての i 次コホモロジー層を $\mathcal{H}^i(E) \in \mathbf{Coh}(X)$ と書き、(通常の意味での、つまり層コホモロジーの導来圏の対象への一般化の) コホモロジー群を $H^i(E) := \mathcal{H}^i(\mathbf{R}\Gamma(E)) \in \mathbf{Vec}$ と書く. ここで、 $\mathbf{R}\Gamma : D^b(X) \rightarrow D^b(\mathbf{Vec})$ は大域切断関手の右導来関手である.

また、 $E, F \in D^b(X)$ に対して $\mathrm{Ext}^i(E, F) := R^i \mathrm{Hom}(E, F)$ と定める. このとき、

$$\mathrm{Ext}^i(E, F) = \mathrm{Hom}(E, F[i])$$

が成り立つ. ここで、 F の i 次シフト $F[i]$ とは、 $(F[i])^j = F^{j+i}$, $d_{F[i]}^j = (-1)^i d_F^{j+i}$ によって定義される対象である. 各 $\mathrm{Hom}(E, F)$ は有限次元の k ベクトル空間である. 簡単のため $\mathrm{hom}(E, F) := \dim \mathrm{Hom}(E, F)$ と略記する.

次に、導来圏の部分圏と生成について定義と記法を導入しておく:

定義 2.5. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を充満部分圏、 Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合 (もしくは部分圏) とする.

1. $\mathcal{C}$ の ($\mathcal{D}$ 内での) thick 閉包とは、 $\mathcal{C}$ の対象を含み、直和因子で閉じているような最小の部分三角圏である. また、 $\mathcal{C}$ の thick 閉包を $\mathrm{thick} \mathcal{C}$ と書く.
2. 部分三角圏 $\mathcal{C}$ が **thick** であるとは、 $\mathcal{C} = \mathrm{thick} \mathcal{C}$ が成り立つときをいう. また、 $\mathcal{C}$ を含む最小の thick 部分三角圏を $\langle \mathcal{C} \rangle$ で表す.
3. Ω を含む $\mathcal{D}$ の最小の thick 部分三角圏を $\langle \Omega \rangle$ とかく.

もうひとつ記法を導入する: Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合 (もしくは部分圏) とする. このとき Ω の右直交部分圏 $\langle \Omega \rangle^\perp$ を次で定める:

$$\begin{aligned} \langle \Omega \rangle^\perp &:= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, \forall X \in \Omega\} \\ &= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, \forall X \in \langle \Omega \rangle\}. \end{aligned}$$

2 つ目の等号は自明ではないが容易である.

次に、導来圏もしくはより一般の三角圏における半直交分解と例外列について復習しておく. 半直交分解とは導来圏の“既約分解”ともいえる概念であり、導来圏をより小さい三角圏に分割していくための議論である.

定義 2.6. $\mathcal{D}$ を三角圏とする. 充満部分圏の列 $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解であるとは、次の 2 条件を満たすときをいう:

- (1) $m > n$ に対して、 $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n) = 0$.
- (2) 任意の対象 $D \in \mathcal{D}$ に対して、 $\mathrm{Cone}(D_i \rightarrow D_{i-1}) \in \mathcal{C}_i$ であるような次の列が存在する

$$0 = D_l \rightarrow D_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow D_1 \rightarrow D_0 = D.$$

充満部分圏の列 $\{C_1, \dots, C_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解を与えるとき、 $\mathcal{D} = \langle C_1, \dots, C_l \rangle$ と書く。

例外生成列は半直交分解の中でも最も単純な構造をもつ半直交分解である。ざっくりといえば、例外生成列の各成分である例外対象はベクトル空間における長さ 1 のベクトル（の張る部分空間）に対応し、例外生成列はベクトル空間の正規直交基底に対応する概念である。

定義 2.7. $\mathcal{D}$ を三角圏、 E を $\mathcal{D}$ の対象とする。 E が例外対象であるとは、次の条件を満たすときをいう：

$$\mathrm{hom}(E, E[i]) = \begin{cases} 1 & (i = 0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

定義 2.8. (順序付き) 例外対象の列 $(E_1, \dots, E_n) \subset \mathcal{D}$ が例外列であるとは、任意の $j < i$ なる $i, j \in \{1, \dots, n\}$ と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[k]) = 0$$

が成り立つときをいう。また、例外列 $\mathbb{E} = (E_1, \dots, E_n)$ が例外生成列であるとは、 $\mathbb{E}$ が導来圏全体をシフトと拡大によって生成するときをいう。

例 2.9 ([Bei78]). 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の導来圏 $D^b(\mathbb{P}^n)$ 上には次の例外生成列が存在する：

$$D^b(\mathbb{P}^n) = \mathbb{E} := (\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)).$$

この例外生成列は、Beilinson の例外生成列と呼ばれる。

2.3 Ulrich 対象の定義と初等的性質

準備が整ったので、Ulrich 束の導来圏への一般化として Ulrich 対象を定義する。定理 2.4 における Ulrich 層のコホモロジー的特徴づけを用いて複体の Ulrich 性を定めることを考える。正確には、次のような定義をする：

定義 2.10. X を n 次元非特異射影代数多様体、 $\mathcal{O}(1)$ を X 上の非常に豊富な因子、 E を導来圏 $D^b(X)$ の対象とする。 E が (偏極 $\mathcal{O}(1)$ に関して) **Ulrich 対象** であるとは、各 $i \in \mathbb{Z}$ と $1 \leq j \leq n$ に対して次が成り立つときをいう：

$$H^i(E(-j)) = 0.$$

この定義の下、定理 2.4 の部分的な類似として次の特徴付けを得た：

命題 2.11. 定義 2.10 と同じ設定の下、 $E \in D^b(X)$ を Ulrich 対象とする。また、 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を有限線形射影 (定義 2.3) とする。このとき、次は同値である：

1. $E \in D^b(X)$ が Ulrich 対象である。
2. $\pi_* E \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rangle$.
3. ゼロでない任意のコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(E)$ が Ulrich 束である。

Outline of the Proof. 詳細な証明は書かないが、その証明のアイデアと主な手法についてコメントしておく。

(1) $\Rightarrow$ (2) 定義から, Ulrich 対象は π によって $\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)\}$ の右直交部分圏に入るが, ここで Beilinson の例外生成列を用いれば主張が従う.

(2) $\Rightarrow$ (3) π が有限射であることと, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の構造層が例外対象であることを用いれば, Eisenbud-Schreyer による特徴づけ [定理 2.4](#) の条件 4. を満たすことが分かる.

(3) $\Rightarrow$ (1) 複体のコホモロジーを各コホモロジー層のコホモロジーを用いて分割するスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{H}^q(E)(-j)) \Longrightarrow H^{p+q}(E(-j))$$

を用いればよい. □

上の定理から, 導来圏の一般化を考えても真に新しいものは生まれないということが推測されるが, Ulrich 対象であって, Ulrich 束でないものは存在する. それは Ulrich 束の間の高次の拡大に対応する複体である米田拡大と呼ばれる技術を用いて構成されるが, 本稿ではこれ以上説明をしないことにする. つまり, Ulrich 対象へ一般化して考えることは, Ulrich 束に加え, Ulrich 束の間の高次の拡大までの情報を統一的に扱う対象のクラスを考えることにするということである.

3 Eisenbud-Schreyer 予想への応用

[命題 2.11](#) から, $(X, \mathcal{O}(1))$ 上に Ulrich 対象 E が存在すれば, そこからゼロでないコホモロジー層を取ることで Ulrich 層を構成することができる. 逆に, 定義より自明に Ulrich 層は Ulrich 対象である. 従って, Ulrich 層の存在性と Ulrich 対象の存在性は同値となる. 導来圏の対象 $E \in D^b(X)$ が Ulrich であることと E が部分圏 $\langle \{\mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)\} \rangle^\perp$ に入っていることは同値であったから, Ulrich 束の存在性と $\langle \{\mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)\} \rangle^\perp \neq 0$ は同値である.

この直交成分がゼロかそうでないかという条件は導来圏において重要な意味がある. その意味を明らかにするために, 導来圏の生成元を導入する必要がある.

3.1 導来圏の生成元

定義 3.1. $\mathcal{D}$ を三角圏, Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合 (もしくは部分圏) とする. このとき, Ω が

1. **古典的生成元** であるとは, $\langle \Omega \rangle = \mathcal{D}$ が成り立つときをいい,
2. **弱生成元** (もしくは単に**生成元**) であるとは, $\langle \Omega \rangle^\perp = 0$ が成り立つときをいう.

ここで,

$$\begin{aligned} \langle \Omega \rangle^\perp &= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, \forall X \in \langle \Omega \rangle\} \\ &= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, \forall X \in \Omega\}. \end{aligned}$$

であったことを思い出すと, 古典的生成元は弱生成元である. しかし, 一般に逆は成り立たない.

例 3.2. X を代数多様体とする. このとき $\Omega = \{k(x)\}_{x \in X}$ とすると, Ω は連接層の導来圏 $D^b(X)$ の弱生成元であるが古典的生成元ではない.

次に古典的生成元の性質をいくつか紹介する。例 3.2 は弱生成元の例でもあったが、古典的生成元の例としては次のようなものがある。

定理 3.3 ([Orl09, Theorem 4.]). X を n 次元の非特異射影代数多様体, $\mathcal{O}(1)$ を X 上の非常に豊富な直線束とする。このとき, $G = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(n)$ は $D^b(X)$ の古典的生成元である。

命題 3.4 ([Sta18, Tag 09SR], [Nee92]). $\mathcal{D}$ を任意の直和を含む三角圏とし, G を $\mathcal{D}$ のコンパクト対象であるとする。このとき, 次は同値である：

1. G は $\mathcal{D}^{\text{cpt}}$ の古典的生成元かつ $\mathcal{D}$ がコンパクト生成,
2. G が $\mathcal{D}$ の生成元.

我々の考える代数幾何学的設定においては、「任意の直和を含む三角圏」として準連接層のなすアーベル圏の非有界導来圏 $D(\mathbf{Qcoh}(X))$ をとることを念頭に置いている。このとき, 代数多様体 X が非特異であれば, $\mathcal{D}^{\text{cpt}} = D(\mathbf{Qcoh}(X))^{\text{cpt}} = \text{Perf}(X) = D^b(X)$ が成り立つ。

3.2 定理 D の証明

本節では, 定理 D の証明の概略について述べる。その前に定理の主張を再掲する。

定理 3.5. $\Phi_{|\mathcal{O}_C(1)|} : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を滑らかな代数曲線 C の非常に豊富な直線束 $\mathcal{O}_C(1)$ による埋め込みとする。このとき, $(C, \mathcal{O}_C(1))$ 上に Ulrich 対象が存在する。

証明のアイデアは以下のとおりである：

Ulrich 束は代数多様体とその埋め込みのペアに対して定義される概念であった。定理 3.3 から, 射影代数多様体に対して埋め込みを固定することは導来圏の古典的生成元をひとつ固定することであると考えられる。従って, Ulrich 束の存在性問題に導来圏の生成性に関する議論を使うには弱生成元のまま考えるより, 古典的生成元となにかしらの関係付けを行う方がよいように見える。

本証明ではまず, 理想的な条件下, 弱生成元と古典的生成元が同値であることを示す。そうすれば Ulrich 束の存在証明は, 三角圏 $\{\mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)\}$ が三角圏 $D^b(X)$ 全体に一致しないことを証明することに帰着できる。そのためには, いずれかの三角圏としての不変量を比較すればよい。これが純導来圏的な議論によって Ulrich 束の存在性を証明するためのアイデアである。

命題 3.6. C を代数曲線とし, $G \in D^b(C)$ とする。 G が $D^b(C)$ を弱生成するとき, G は $D^b(C)$ を古典的に生成する。

Outline of the Proof. 証明に用いる材料は主に 3 つである：

1. 命題 3.4. これを用いて古典的生成性の証明を“大きい”三角圏の生成性を証明することに帰着させる。
2. ホモトピー余極限。帰納極限の概念の導来圏における類似である。正確な定義は [Sta18, Tag 0A5K] を参照のこと。これを用いて“大きい”三角圏の対象を“小さい”三角圏の対象で近似する。

3. 対象の分裂. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の大域次元が 1 以下のとき, 任意の $D^b(\mathcal{A})$ の対象 E は

$$E \cong \bigoplus_i \mathcal{H}^i(E)[-i]$$

とかける. □

Proof of 定理 3.5. 命題 3.6 から, $\mathcal{O}(1) \in D^b(C)$ の生成する三角圏が導来圏全体でないことを証明すればよい.

そのためには, $\mathcal{O}$ の生成する導来圏が全体でないことをいえばよい. ここで, $\mathcal{O}$ は安定層であるから, $\mathrm{rk} K_0(\langle \mathcal{O} \rangle) = 1$ である. 一方, $2 = \mathrm{rk} K_0(D^b(C))$ であるから,

$$2 = \mathrm{rk} K_0(D^b(C)) > \mathrm{rk} K_0(\langle \mathcal{O}_C \rangle) = 1$$

となり示された. □

参考文献

- [Bea00] Arnaud Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Math. J. **48** (2000), 39–64, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. MR 1786479
- [Bei78] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69. MR 509388
- [CMR15] L. Costa and R. M. Miró-Roig, *$GL(V)$ -invariant Ulrich bundles on Grassmannians*, Math. Ann. **361** (2015), no. 1-2, 443–457. MR 3302625
- [CMRPL21] Laura Costa, Rosa María Miró-Roig, and Joan Pons-Llopis, *Ulrich bundles—from commutative algebra to algebraic geometry*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 77, De Gruyter, Berlin, [2021] ©2021. MR 4409698
- [ES03] David Eisenbud and Frank-Olaf Schreyer, *Resultants and Chow forms via exterior syzygies*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 537–579, With an appendix by Jerzy Weyman. MR 1969204
- [ES09] ———, *Betti numbers of graded modules and cohomology of vector bundles*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 3, 859–888. MR 2505303
- [FHI23] Takeru Fukuoka, Wahei Hara, and Daizo Ishikawa, *Rank two weak Fano bundles on del Pezzo threefolds of degree five*, Internat. J. Math. **34** (2023), no. 13, Paper No. 2350084, 36. MR 4663826
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR 463157
- [HUB91] J. Herzog, B. Ulrich, and J. Backelin, *Linear maximal Cohen-Macaulay modules over strict complete intersections*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), no. 2-3, 187–202. MR 1117634
- [Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. MR 2244106

- [Nee92] Amnon Neeman, *The connection between the K -theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 547–566. MR 1191736
- [Orl09] Dmitri Orlov, *Remarks on generators and dimensions of triangulated categories*, Mosc. Math. J. **9** (2009), no. 1, 153–159, back matter. MR 2567400
- [Sta18] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [Yos25] Tomoki Yoshida, *A simple derived categorical generalization of Ulrich bundles*, Preprint, 2025.
- [上戸 20] 上原北斗 and 戸田幸伸, **連接層の導来圏と代数幾何学**, シュプリンガー現代数学シリーズ / 伊藤雄二編, no. [21], 丸善出版, 2020.