

What is a genuine graph-complex to describe the space of long embeddings modulo immersions?

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻
吉岡玲音 (Leo YOSHIOKA) *

概要

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼ぶ。講演者はこの空間のホモトピー型が余次元 $n - j$ に応じてどのように異なるかに興味がある。埋め込みの空間のホモトピー群を記述する組み合わせ的な複体として、2010 年ごろからグラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体が導入された。これらのグラフ複体には、大きく 2 種類ある。1 つはオペラッドなどのホモトピー論を起源とするグラフ複体である。もう一つは、配置空間積分と呼ばれる、幾何学的なコチェインの構成を背景とするグラフ複体である。2 つのグラフ複体には、適用範囲や得られる情報に本質的な差異がある。この講演では 2 種類のグラフ複体を、スペクトル系列の E_1 項で結びつける方法を紹介する。

目次

1	埋め込みの空間 $\text{Emb}_\partial(D^j, D^n)$	2
2	主結果	4
3	ホモロジー代数からの準備	4
3.1	dga (余) 代数	4
3.2	dga (余) 代数の bar-cobar 複体	5
3.3	捩れテンソル積と標準分解	6
4	dg Hopf オペラッド	6
4.1	オペラッド	6
4.2	小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$	7
4.3	グラフオペラッド $\text{Graph}_n(\bullet)$	7
5	グラフ複体: オペラッドによる記述	9
5.1	グラフ複体 HGC と PGC	9
5.2	新しいグラフ複体 DGC	9

* E-mail:yoshioka@ms.u-tokyo.ac.jp

Introduction

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼び $\text{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ と書く*1. (n, j) が一般の場合の埋め込みの空間は、1950年代後半の微分トポロジーの創始期*2から研究されている基本的で重要な対象である。講演者はこの空間のホモトピー型が次元 n, j や余次元 $n - j$ に応じてどのように異なるかに興味がある。

埋め込みの空間のホモトピー群を記述する強力な手法として、2010年ごろからグラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体が導入された。これらのグラフ複体は、大きく分けて次の2種類がある。

- (A) オペラッドなどのホモトピー論を起源とするグラフ複体 [AT1, AT2, FTW]
- (B) 配置空間積分と呼ばれる、幾何学的なコチェインの構成を背景とするグラフ複体 [Bot, CR, Sak, SW, Wat, Yos1]

2つのグラフ複体には、適用範囲や得られる情報に本質的な差異がある。(A)のホモトピー論的手法は余次元 $n - j$ が3以上のとき強力な手法だが、幾何学的な情報を得づらいついという側面を持つ。(B)の手法は余次元が2以上で適用可能な幾何学的な手法だが、あまり整備がなされていない。その1つの原因は、(B)の複体が(A)の複体に比べ組み合わせ的に複雑であることであった。

講演者の論文 [Yos2] では(A)のグラフ複体の top ホモロジーから(B)のグラフ複体の top ホモロジーへの写像を構成した。さらにこの写像の \ker は、STU 関係式と呼ばれる(B)のホモロジーの基本的な関係式では消えないことを示した。この結果はホモトピー論由来の(A)のグラフ複体と同等なグラフ複体を用いて配置空間積分((B)の手法)ができる可能性を示唆していた。

この講演では(A)のグラフ複体 HGC と擬同型なグラフ複体 DGC を導入し、このグラフ複体を用いた配置空間積分を導入する。DGC や HGC は組み合わせ的に定義される複体だが、オペラッドや dga 代数の言葉を用いて自然な記述が可能であり、この記述が擬同型の証明にも用いられる。

このアブストラクトの目標は、オペラッドや dga 代数の復習をしたのち、グラフ複体 DGC をそれらの言葉で記述することである。DGC を用いた配置空間積分については講演中に紹介する。

謝辞

本講演やアブストラクトの内容は、講演者が2023年秋に Kansas State University に滞在した際の研究に基づく。受け入れ教員の Victor Turchin 氏には Turchin 氏の論文の内容や、本研究に必要な知識を丁寧に説明して頂いた。感謝申し上げます。

1 埋め込みの空間 $\text{Emb}_\partial(D^j, D^n)$

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼び $\text{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ と書く。 $\text{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ には C^∞ 位相という標準的な位相が

*1 $(n, j) = (3, 1)$ のときは通常の long knot の空間である。

*2 Haefliger が代表的である。

入る。埋め込みならばめ込みであるから、はめ込みの空間への標準的な写像 $\iota : \text{Emb}_\partial(D^j, D^n) \rightarrow \text{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ がある。 $\text{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ はよく調べられている対象^{*3}なので、この2つの空間のホモトピー論的な差

$$\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n) = \text{hofib}(\iota : \text{Emb}_\partial(D^j, D^n) \rightarrow \text{Imm}_\partial(D^j, D^n))$$

の方を調べることがある。

Arone, Turchin [AT1, AT2] と Fresse, Turchin, Willwacher [FTW] は 2010 年代に、Goodwillie, Klein, Weiss の埋め込みの微積分 [GKW, GW, Wei] というホモトピー論の手法を発展させ次の驚べき結果を示した。

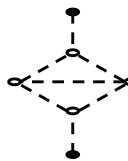
定理 1.1. $n - j \geq 3$ のとき、次数シフトを除き $\pi_*(\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q}$ は n, j の偶奇のみによる。^{*4}

この性質の背後にあるのは hairy グラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体である。

定理 1.2. [FTW] $n - j \geq 3$ のとき、次の同型写像がある。(次数の対応は n と j に応じて異なる.)

$$\pi_*(\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_*(\text{HGC}_{n,j}).$$

右辺の複体 $\text{HGC}_{n,j}$ は n, j の偶奇のみに依存し、そのホモロジーは組み合わせ的に計算できる。

例 1.3. n, j がどちらも奇数のとき、グラフ  は $H_*(\text{HGC}_{n,j})$ の非自明な元を与える。こ

こから n と j が奇数で、 $n - j \geq 3$ のとき、 $\pi_{3(n-j-2)+(j-1)}(\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ が従う。

Arone と Turchin[AT2] は別のグラフ複体 $\text{PGC}_{n,j}$ を導入し、射影 $\text{PGC}_{n,j} \rightarrow \text{HGC}_{n,j}$ が擬同型であること示した。講演者はこのグラフ複体 $\text{PGC}_{n,j}$ を用いて、定理 1.2 の対応が $n - j = 2$ の場合に延長されるかを調べている：

問題 1.4. $n - j \geq 2$ を満たす n, j に対し、対応

$$\pi_*(\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H_*(\text{PGC}_{n,j}, \mathbb{R})$$

を配置空間積分と呼ばれる幾何学的な手法により構成せよ。

配置空間積分は元々は Kontsevich 不変量と呼ばれる強力な結び目不変量を与える枠組みの一つである。配置空間積分による結び目不変量の構成は、Witten[Wit] による場の量子論的な定式化を起源とし、Bar-Natan[Bar], Bott, Taubes[BT] らにより 1990 年代後半に数学的な定式化がされた。後に Bott[Bot], Cattaneo, Cotta-Ramusino, Longoni[CCL], Cattaneo, Rossi[CR], Watanebe[Wat], Sakai[Sak, SW] らによって、 n, j やホモトピー群の次数が一般化された。この配置空間積分では

^{*3} $\text{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ は Stiefel 多様体の多重ループ空間とホモトピー同値である。

^{*4} $n - j \geq 3$ のとき、 $\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)$ は群的なホモトピー結合的 H 空間という構造を持つ。このことから $n - j \geq 3$ のとき $\overline{\text{Emb}}_\partial(D^j, D^n)$ の任意の連結成分はホモトピー同値である。定理 1.1 は π_0 の情報も捨てることに注意。

$\text{PGC}_{n,j}$ と類似のグラフ複体が用いられ、問題 1.4 と同様の写像が形式的に構成できる。しかし写像の well-definedness も含め未だ十分な整備がなされていない。

問題 1.4 を $\text{PGC}_{n,j}$ の「双対」を与えるグラフ複体 $\widetilde{\text{PGC}}_{n,j}$ で定式化すると次のようになる。

問題 1.5. $n - j \geq 2$ を満たす n, j に対し、コチェイン写像

$$I : \widetilde{\text{PGC}}_{n,j} \rightarrow \Omega_{dR}^*(\overline{\text{Emb}}_{\partial}(D^j, D^n))$$

を配置空間積分により構成せよ。 I がコホモロジーに誘導する写像は同型写像か。

2 主結果

問題 1.5 において、 I の候補を構成することは可能だが、コチェイン写像であることは期待できなさそうである。そこで $\widetilde{\text{PGC}}_{n,j}$ 本体ではなく、擬同型な別のグラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}_{n,j}$ を用いる。

以下に主結果を述べる。 dga 代数や標準分解 $A \otimes_{\tau} BA$ については 3 節で復習する。 グラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}$ や $\widetilde{\text{PGC}}$ の構成は 5 節で与える。 グラフ複体の定義に必要なオペラッドは 4 節で復習する。

定理 2.1 (Y.). A は dga 代数 $\Omega_{dR}(V_{n,j})$ のある特定の部分 dga 代数とする。 グラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}$ は $\widetilde{\text{PGC}}$ に A の標準分解 $A \otimes_{\tau} BA \simeq \mathbb{Q}$ を「テンソル積」した複体とする。 このとき次が成立する。

- (1) 射影 $\widetilde{\text{DGC}}_{n,j} \rightarrow \widetilde{\text{PGC}}_{n,j}$ は擬同型である。
- (2) 配置空間積分 $I : \widetilde{\text{DGC}}_{n,j} \rightarrow \Omega_{dR}^*(\overline{\text{Emb}}_{\partial}(D^j, D^n))$ を構成でき I は hidden face と呼ばれる寄与を除いてコチェイン写像である。

このアブストラクトではグラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}_{n,j}$ を構成し、(1) を示す。 講演では (2) の写像の構成する。

3 ホモロジー代数からの準備

3.1 dga (余) 代数

定義 3.1 (dga 代数). dga 代数 (dga = differential graded associative^{*5}) とは、体 \mathbb{K} 上の次数つきベクトル空間 $A = \bigoplus_n A_n$ であって

- 次数 1 の微分 $d : A_n \rightarrow A_{n+1}$
- 単位元 $u : \mathbb{K} \rightarrow A_0$
- 次数 0 の結合的 (かつ単位的な) 積 $\mu : A_m \otimes A_n \rightarrow A_{m+n}$

を持ち Leibniz 則 $d(a_1 a_2) = d(a_1) a_2 + (-1)^{|a_1|} a_1 d(a_2)$ を満たすものである。 さらに $\varepsilon : A_0 \rightarrow \mathbb{K}$ で積と両立するものを持つとき、この dga 代数は augmented であるという。

定義 3.2 (dga 余代数). dga 余代数とは、体 \mathbb{K} 上の次数付きベクトル空間 $C = \bigoplus_n C_n$ であって、

^{*5} dga = differential graded algebra が一般的な用法かもしれない。

- 次数 1 の微分 $d : C_n \rightarrow C_{n+1}$
- 余単位元 $v : C_0 \rightarrow \mathbb{K}$
- 次数 0 の結合的 (かつ余単位的な) 余積 $\Delta : C_{m+n} \rightarrow C_m \otimes C_n$

を持ち Leibniz 則を満たすものである。さらに $\eta : \mathbb{K} \rightarrow C_0$ で余積と両立するものを持つとき、この dga 余代数は coaugmented であるという。

3.2 dga (余) 代数の bar-cobar 複体

ここでは体 \mathbb{K} 上の dga 代数と dga 余代数の間の随伴関手

$$\Omega : \{\text{conilpotent dga 余代数}\} \rightleftarrows \{\text{augmented dga 代数}\} : B$$

を導入する *6。 B は bar 構成、 Ω は cobar 構成とそれぞれ呼ばれる。この bar 構成を用いて 3.3 節では \mathbb{K} の分解 $A \otimes_{\tau} BA \simeq \mathbb{K}$ を与える。3.2 節の内容は [LV] を参考にしている。

記号 3.3. A を augmented dga 代数とする。 $\bar{A} = \ker(\varepsilon_A : A \rightarrow \mathbb{K})$ とし、 \bar{A} の次数を +1 シフトを $s\bar{A} = \bar{A}[1]$ と書く。

定義 3.4 (bar 構成 B)。 augmented dga 代数 A の bar 構成 BA は、次のように定義される conilpotent dga 余代数である。 BA は次数付き余代数としては $s\bar{A}$ の自由余代数:

$$T^c(s\bar{A}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (s\bar{A})^{\otimes n}.$$

である。 $T^c(s\bar{A})$ の元を $[sa_1|sa_2|\dots|sa_n]$ という記号で書くと BA の余積 Δ は次のように書ける。

$$\Delta[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=0}^n [sa_1|sa_2|\dots|sa_i] \otimes [sa_{i+1}|sa_{i+2}|\dots|sa_n].$$

BA の微分は $d_{BA} = d_1 + d_2$ と分解され、第一微分 d_1 、第二微分 d_2 はそれぞれ次で定義される。

$$d_1[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=1}^n \pm [sa_1|sa_2|\dots|sa_{i-1}|s(d_A a_i)|sa_{i+1}|\dots|sa_n]$$

$$d_2[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \pm [sa_1|sa_2|\dots|sa_{i-1}|s(a_i a_{i+1})|sa_{i+1}|\dots|sa_n].$$

bar 構成と双対的に、coaugmented dga 余代数 C に対し、cobar 構成 ΩC を定義できる。 ΩC は augmented dga 代数である。

定理 3.5. $\text{Hom}_{\text{dga alg}}(\Omega C, A)$ と $\text{Hom}_{\text{dga coalg}}(C, BA)$ の間に自然な全単射がある。さらにこれらの空間と振れ準同型*7と呼ばれる写像の空間 $\text{Tw}(C, A)$ に全単射がある。

*6 余代数に coaugmented より強い conilpotent の条件をつけているのは、自由余代数の普遍性を用いるためである。

*7 Maurer-Cartan 方程式という関係式を満たす線型写像を振れ準同型という。

例 3.6. 次で定義される次数 +1 の線形写像 $\tau_A : BA \rightarrow A$ を振れ準同型である.

$$\tau_A[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 1) \\ a_1 & (n = 1). \end{cases}$$

3.3 振れテンソル積と標準分解

定義 3.7. A を augmented dga 代数, C を coaugmented dga 余代数とする. $\tau : C \rightarrow A$ は次数 +1 の線形写像とする. このとき振れテンソル積 $A \otimes_\tau C$ は次数付きベクトル空間としては $A \otimes C$ であり微分が次で与えられるものである.

$$d_\tau = d_A \otimes Id_C + Id_A \otimes d_C + (\mu_A \otimes Id_C) \circ (Id_A \otimes \tau \otimes Id_C) \circ (Id_A \otimes \Delta_C)$$

τ が振れ準同型であるとき, $A \otimes_\tau C$ はコチェイ複体となることが知られている.

定理 3.8. 振れ準同型 $\tau : C \rightarrow A$ に対し, 誘導写像 $C \rightarrow BA$ が擬同型であることと $A \otimes_\tau C$ が acyclic であることは同値である. 特に $A \otimes_\tau BA$ は acyclic であり, これを \mathbb{K} の標準分解と呼ぶ.

4 dg Hopf オペラッド

5 節でグラフ複体をオペラッドにより記述するため, この節でオペラッドの復習をする.

4.1 オペラッド

定義 4.1. \mathcal{C} を対称モノイダル圏とする (e.g. 可換 dga 余代数の圏, 位相空間の圏). \mathcal{C} 上のオペラッドとは, \mathcal{C} の対象の系列 $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ であって

- 各 $n \geq 1$ に対し, 対称群 Σ_n の $\mathcal{O}(n)$ への右作用
- 各 n, m と $1 \leq i \leq n$ を満たす i に対し, 対称群の作用と両立する i 番目の合成 (図 1 を参照)

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n+m-1)$$

- 合成の単位元 $1 \in \mathcal{O}(1)$

を持ち, 垂直合成と水平合成に関する適切な公理を満たすものである. 可換 dga 余代数の圏のオペラッドを dg Hopf オペラッドと呼ぶ.

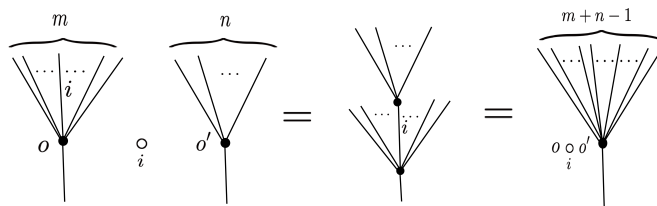


図 1 オペラッドの合成の例

4.2 小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$

n 次元小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$ ($n \geq 1$) は位相空間の圏のオペラッドの例であり、埋め込みの空間や、より広くループ空間を調べる上で重要な道具である。

定義 4.2. $D = D^n$ ($n \geq 1$) は原点中心、半径 1 の n 次元閉球とする。 D_i は D のコピーとする。 集合 $\mathcal{D}^n(k)$ ($k \geq 1$) は写像 $f : D_1 \sqcup \dots \sqcup D_k \hookrightarrow D$ で次を満たすもの全体の集合である (図 2 を参照)。

- D_i への制限 $f|_{D_i}$ は恒等写像 $id : D_i \rightarrow D$ と平行移動、拡大縮小の合成である。
- 像 $f(\text{Int}(D_i))$ ($i = 1, 2, \dots, k$) は互いに交わらず、 D の内部に含まれる。

$\mathcal{D}^n(k)$ は集合 $\text{Int}(D)^k \times (0, 1]^k$ の部分集合と同一視でき、誘導位相を入れることができる。

定義 4.3. $\mathcal{D}^n(\bullet)$ のオペラッド構造を次のように定める。

- 対称群 Σ_k は $\mathcal{D}^n(k)$ に、球体の順番の入れ替えとして作用する。
- i 番目の合成 $\mathcal{D}^n(k) \otimes \mathcal{D}^n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathcal{D}^n(k+l-1)$ は、第二項の外側の球体を第一項の i 番目の球体に挿入することで定義される (図 2 を参照)。
- 単位元 $1 \in \mathcal{D}^n(1)$ は恒等写像 $id : D = D_1 \rightarrow D$ である。

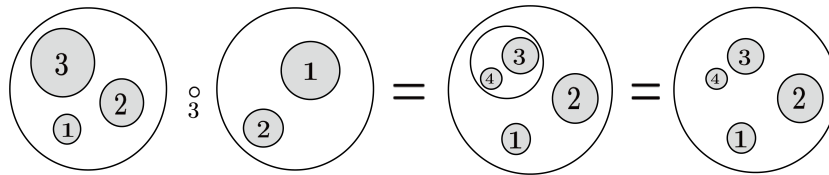


図 2 小球体オペラッドの合成の例

$\mathcal{D}_n(\bullet)$ のオペラッド構造と Künneth 写像により $H_*(\mathcal{D}_n(\bullet))$ にオペラッドの構造が入る。 $H_*(\mathcal{D}_n(k))$ には torsion がないため、自然に余積が定まる。微分を自明な微分とすることで $H_*(\mathcal{D}_n(\bullet))$ は dg Hopf オペラッドの構造を持つ^{*8}。

4.3 グラフオペラッド $\text{Graph}_n(\bullet)$

グラフ複体を記述するための dg Hopf オペラッド $\text{Graph}_n(\bullet)$ を定義する。 $\text{Graph}_n(\bullet)$ は小球体オペラッドのホモロジーの分解を与える。つまり擬同型 $H_*(\mathcal{D}^n(\bullet), \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Graph}_n(\bullet)$ がある。

定義 4.4 (グラフ). ここではグラフは、2 種類の頂点 (白と黒) 及び 1 種類の辺 (点線) を持つとする。白頂点は少なくとも 3 本の辺を持ち、黒頂点は任意の数の辺を持つ。各グラフ Γ の黒頂点の集合 $B(\Gamma)$ 、白頂点の集合 $W(\Gamma)$ 、辺の集合 $E(\Gamma)$ はそれぞれ番号付けされている。各辺は向き付けられている。定義 4.8 の図を参照。

^{*8} Lie 括弧の次数が $(n-1)$ の Poisson オペラッド Pois_{n-1} と $(\mathbb{Z}$ 上) 同型になることが知られている [Sin].

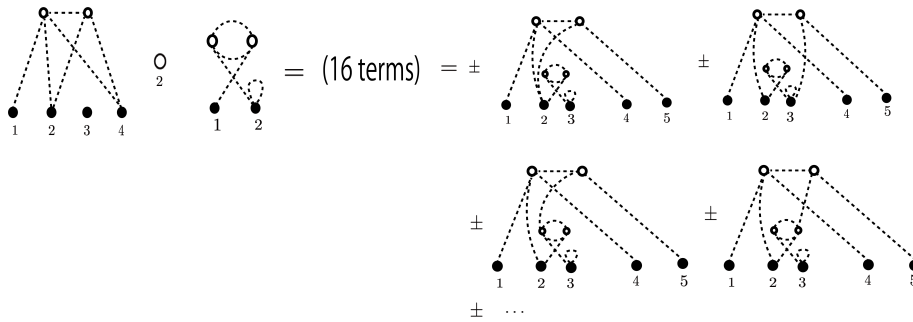
定義 4.5 (グラフの次数). 黒頂点は次数 0 をもち、白頂点は次数 $(-n)$ を持つ. (点線の) 辺は次数 $(n-1)$ を持つ. グラフの次数は頂点と辺の次数の和で定義する.

定義 4.6 (グラフの向き). グラフ Γ に対し $W(\Gamma)$ の番号付け、 $E(\Gamma)$ の番号付け、各辺の向きの情報を Γ のラベルという. このラベルを用いてグラフの向きが定まる.

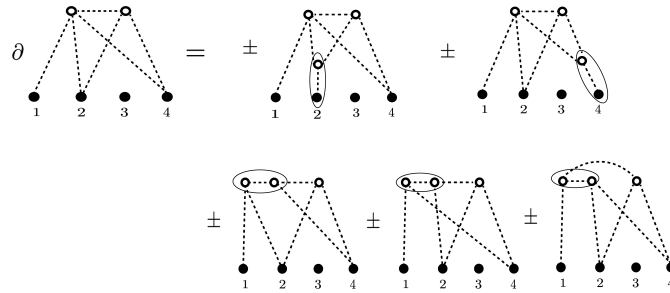
定義 4.7. $\text{Graph}_n(k)$ は、黒頂点を k 個を持つグラフが生成する \mathbb{Q} 上次数付きベクトル空間であって、同じ向きのグラフを同一視し、違う向きのグラフを逆符号とする関係式を入れたものである. *9

定義 4.8 (グラフオペラッド). $\text{Graph}_n(\bullet)$ には次のように dg Hopf オペラッドの構造が入る.

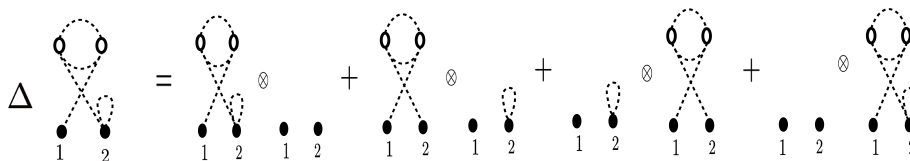
- 対称群 Σ_k は、黒頂点の番号付けの置換として $\text{Graph}_n(k)$ に右から作用する.
- i 番目の合成 $\text{Graph}_n(k) \otimes \text{Graph}_n(l) \xrightarrow{\circ_i} \text{Graph}_n(k+l-1)$ は 2 番目のグラフを、1 番目のグラフの i 番目の黒頂点に挿入することで定まる.



- 微分 $\partial : \text{Graph}_n(k) \rightarrow \text{Graph}_n(k)$ は頂点の拡大という操作で定める.



- 余積 $\Delta : \text{Graph}_n(k) \rightarrow \text{Graph}_n(k) \otimes \text{Graph}_n(k)$ は余重合*10という操作で定める.



定理 4.9. オペラッドの射 $\text{Pois}_{n-1}(\bullet) \rightarrow \text{Graph}_n(\bullet)$ が定まり、 \mathbb{Q} 上で擬同型である.

*9 黒頂点の番号づけが異なるグラフは区別する.

*10 このアブストでのみ用いる cosuperimposition の訳語.

5 グラフ複体: オペラッドによる記述

4.3 節と双対的に、可換 dga 代数の圏のグラフコオペラッド $\widetilde{\text{Graph}}_n(\bullet)$ を構成できる. 微分はコードと小ループ*¹¹以外の辺の縮約の和で定まる. この節では、グラフ複体を $\widetilde{\text{Graph}}_n(\bullet)$ で記述する.

5.1 グラフ複体 HGC と PGC

定義 5.1. hairy グラフは 定義 4.4 のグラフであって、各黒頂点が丁度一本の辺 (hair と呼ばれる) を持つものである. hairy グラフで生成される $\widetilde{\text{Graph}}_n(k)$ の部分空間を $M\widetilde{\text{Graph}}_n(k)$ と書く.

定義 5.2. hairy グラフ複体 $\widetilde{\text{HGC}}$ を

$$\widetilde{\text{HGC}} = \bigoplus_{k \geq 1} \left((\text{sign}_k)^{\otimes j} \otimes M\widetilde{\text{Graph}}_n(k) \right) / \Sigma_k.$$

で定義する. 微分は、hair とコード以外の辺の縮約の和で定義される. ここで sign_k は対称群 Σ_k の符号表現である. sign_k の元は次数 $(-k)$ を持つとする.

記号 5.3. $s_i : \widetilde{\text{Graph}}_n(k) \rightarrow \widetilde{\text{Graph}}_n(k-1)$ ($1 \leq i \leq k$) は i 番目の黒頂点を忘却する写像とする. $\widetilde{\text{Graph}}_n(k)$ の正規化を $N\widetilde{\text{Graph}}_n(k) = \bigcap_{i=1}^k \ker(s_i)$ で定義する.

定義 5.4. plain グラフ複体 $\widetilde{\text{PGC}}$ を

$$\widetilde{\text{PGC}} = \bigoplus_{k \geq 1} \left((\text{sign}_k)^{\otimes j} \otimes \widetilde{\text{Graph}}_j(k) \otimes N\widetilde{\text{Graph}}_n(k) \right) / \Sigma_k$$

で定義する. $\widetilde{\text{Graph}}_j(k)$ 由来の辺を実線で書き、 $\widetilde{\text{Graph}}_n(k)$ 由来の点線の辺と区別する. 微分はコードと小ループ以外の辺の縮約で定義する. 黒い頂点を両端点に持つ実線の辺は縮約する.

次の結果は、オペラッド理論を用いて示された幾分驚くべき結果である.

定理 5.5. [AT2] 自然な射影 $\widetilde{\text{PGC}} \rightarrow \widetilde{\text{HGC}}$ は擬同型である.

5.2 新しいグラフ複体 DGC

定義 5.6. dga 代数 A は、次数 $(n-1)$ の元 e_{n-1} (ただし n が偶数のときに限る) と次数 $(n-j)$ の元 e_{n-j} (ただし $n-j$ が偶数のときに限る) が生成する可換な dga 代数を含むとする*¹². 標準分解 $A \otimes_{\tau} BA \simeq \mathbb{Q}$ を Z と書く. decorated グラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}$ を

$$\widetilde{\text{DGC}} = \bigoplus_{k \geq 1} \left((\text{sign}_k)^{\otimes m} \otimes \widetilde{\text{Graph}}_j(k) \otimes \widetilde{\text{Graph}}_k(k) \otimes Z^{\otimes k} \right) / \Sigma_k$$

*¹¹ 同じ黒頂点を端点に持つ辺を小ループと呼ぶ. 両端点がどちらも黒頂点である (点線の) 辺をコードと呼ぶ.

¹² A として念頭にあるのは Stiefel 多様体の有理モデルである: $H^(A) \cong H^*(VO_{n,j}, \mathbb{Q})$. n が偶数のとき (resp. $n-j$ が偶数のとき), $H^*(VO_{n,j}, \mathbb{Q})$ は次数 $n-1$ の非自明元 e_{n-1} (resp. 次数 $n-j$ の非自明元 e_{n-j}) を持つ.

で定義する. 微分 δ は 2 つの可換な微分 δ_1, δ_2 の和に分解される. 第 2 微分 δ_2 は複体 $Z = A \otimes_{\tau} BA$ の部分の微分に一致する. 第 1 微分 δ_1 は小ループ以外の辺の縮約である. コードも縮約する.

定理 5.7 (Y.). 自然な射影 $\pi : \widetilde{\text{DGC}} \rightarrow \widetilde{\text{PGC}}$ は擬同型である.

Proof. グラフ複体 $\widetilde{\text{DGC}}$ は、2 重複体 $(\widetilde{\text{DGC}}^{\bullet,*}, \delta_1, \delta_2)$ の全複体とみなせる. ここで次数 \bullet はグラフの頂点数の (-1) 倍で定義される. $\widetilde{\text{PGC}}$ も第 2 微分が自明な 2 重複体とみなせる. 2 重複体 $\widetilde{\text{DGC}}^{\bullet,*}$ から誘導されるスペクトル系列を E とすると、 $Z = A \otimes_{\tau} BA$ の acyclicity (定理 3.8) から $E_1^{p,q} = \widetilde{\text{PGC}}^{p,q}$ が成立する. 右辺は $\widetilde{\text{PGC}}$ の E_1 項なので定理 5.7 の証明が終わる. \square

参考文献

- [AT1] G. Arone, V. Turchin. *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots*. *Geom. Topol.* 18 (2014), no. 3, 1261–1322.
- [AT2] G. Arone, V. Turchin. *Graph-complexes computing the rational homotopy of high dimensional analogues of spaces of long knots*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 65 (2015), no. 1, 1–62.
- [Bar] D. Bar-Natan. *On the Vassiliev knot invariants*. *Topology* 34 (1995), no. 2, 423–472.
- [Bot] R. Bott. *Configuration spaces and imbedding invariants*. *Turkish J. Math.* 20 (1996), no. 1, 1–17.
- [BT] R. Bott, C. Taubes. *On the self-linking of knots*. *Topology and physics*. *J. Math. Phys.* 35 (1994), no. 10, 5247–5287.
- [CCL] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni. *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension*. *Algebr. Geom. Topol.* 2 (2002), 949–1000.
- [CR] A. S. Cattaneo, C. A. Rossi. *Wilson surfaces and higher dimensional knot invariants*. *Comm. Math. Phys.* 256 (2005), no. 3, 513–537.
- [FTW] B. Fresse, V. Turchin, T. Willwacher. *The rational homotopy of mapping space of E_n operads*. arXiv.1703.06123.
- [GW] T. Goodwillie, M. Weiss. *Embeddings from the point of view of immersion theory. II*. *Geom. Topol.* 3 (1999), 103–118.
- [GKW] T. Goodwillie, J. Klein, M. Weiss. *Spaces of smooth embeddings, disjunction and surgery*. *Surveys on surgery theory*, Vol. 2, 221–284, *Ann. of Math. Stud.*, 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (2001).
- [LV] J. L. Loday, B. Vallette. *Algebraic operads*. *Grundlehren Math. Wiss. [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 346, Springer, Heidelberg (2012), xxiv+634.
- [Sak] K. Sakai. *Configuration space integrals for embedding spaces and the Haefliger invariant*. *J. Knot Theory Ramifications* 19 (2010), no. 12, 1597–1644.
- [Sin] D. P. Sinha. *The homology of the little discs operad*. *Séminaire et Congrès de Société Mathématique de France* 26 (2011), 255–281.
- [SW] K. Sakai, T. Watanabe. *1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces*. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 152 (2012), no. 3, 497–533.
- [Wat] T. Watanabe. *Configuration space integral for long n -knots and the Alexander polynomial*. *Algebr. Geom. Topol.* 7 (2007), 47–92.
- [Wei] M. Weiss. *Embeddings from the point of view of immersion theory I*. *Geom. Topol.* 3 (1999), 67–101.
- [Wit] E. Witten. *Quantum field theory and the Jones polynomial*. *Comm. Math. Phys.* 121(1989), no.3, 351–399.
- [Yos1] L. Yoshioka. *Cocycles of the space of long embeddings and BCR graphs with more than one loop*. arXiv.2212.01573.
- [Yos2] L. Yoshioka. *Two graph homologies and the space of long embeddings*. arXiv.2310.10896.