ニット状曲面の導入と 4 次元球体内の曲面の表示

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA) *

概要

ブレイド（組み紐）のいくつかの交点をスプライスと呼ばれる操作で解消することで得られる 3 次元球体内の曲線をニットという。本講演ではニット状曲面と呼ばれる 4 次元球体に埋め込まれた境界付き曲面を導入する。一般に、3 次元球体へ適切に埋め込まれた境界付き曲線はニットと同値（全同位）になるとは限らない。本講演では、4 次元球体へ適切に埋め込まれた境界付き曲面はニット状曲面と同値であることを紹介する。本研究は中村伊南沙氏（佐賀大学）との共同研究である。

1　導入

結び目 (**knot**) とは 3 次元球面 S^3 に埋め込まれた閉曲線である。結び目の非交和を**絡み目** (**link**) という。2 つの絡み目は全同位によって移り合うとき同値であるという[*1]。与えられた 2 つの絡み目 (結び目) が同値であるかどうかを判定する問題 (同値性問題) は結び目理論において基本的な問題であり盛んに研究が行われている。

次数 n の**ブレイド** (**braid**, **組み紐**) とは円筒 $D^2 \times I$ に埋め込まれた n 本の曲線であり、各曲線は円板 $D^2 \times \{t\}$ $(t \in I)$ と丁度一点で横断的に交わるものである (図 1-左)。ブレイドの境界を図 1-右のようにして閉じる操作を**閉包** (**closure**) といい、ブレイドから結び目を構成することができる。任意の絡み目はあるブレイドの閉包と同値であることが知られている [1]。

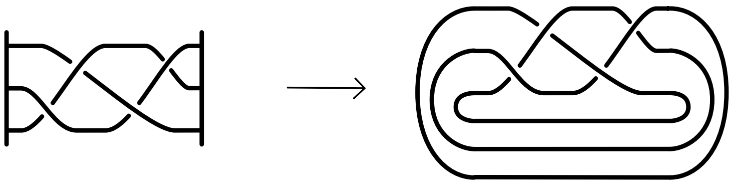

図 1　ブレイドの閉包

Artin[2] により、は次数 n のブレイドは図 2 にある基本的なパーツ σ_i, σ_i^{-1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の組み合わせによって得られることが知られている。また 2 つの次数 n のブレイドの端点を繋ぎ合

* E-mail:u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

*1 位相空間 X に対して、X から X 自身へのホモトピー $\{\Phi_t : X \to X\}_{t\in[0,1]}$ が**同位** (**isotopy**) であるとは、各 Φ_t が同相写像であることをいう。2 つの絡み目が**全同位**であるとは、全空間 (S^3) のイソトピーによって移り合うことをいう。

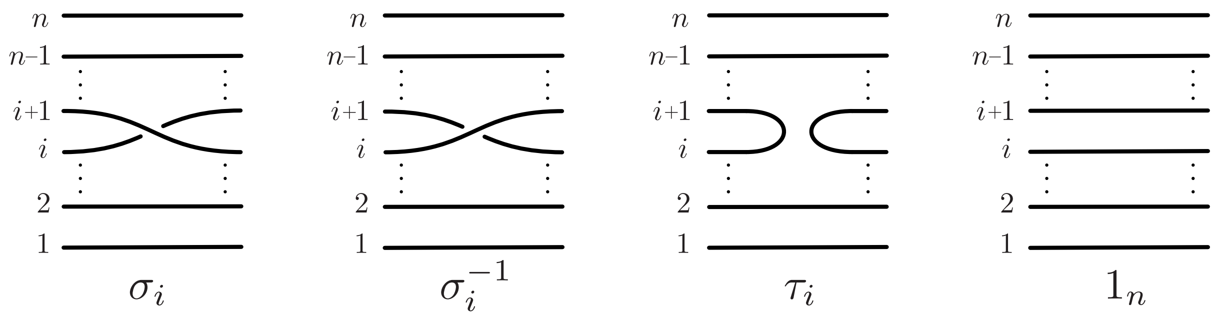

図 2　ブレイドの生成元とニットの生成元

わせることで新たなブレイドが得られるが、次数 n のブレイド (の同値類) 全体からなる集合はこの操作により群の構造を持つ。このとき $\sigma_i(i=1,2,\ldots,n-1)$ は生成元であり、自明なブレイド 1_n は単位元である。

ブレイド β のある交点 (σ_i または σ_i^{-1}) を図 2 にある τ_i または 1_n に置き換える操作を**スプライス** (**splice**) という。**ニット** (**knit**) とはブレイドのいくつかの交点をスプライスして得られる円筒 $D^2 \times I$ 内の曲線である。定義よりニットは σ_i, σ_i^{-1}, τ_i の組み合わせによって得られる。スプライスは多項式に値を持つ結び目の不変量を構成する際に利用される手法であり、村上 [4] はブレイド群を用いてそれらの不変量を理解する過程でニットは導入した。

曲面結び目 (**surface-knot**) とは S^4 に滑らかに埋め込まれた閉曲面である。複数個の曲面結び目の非交和を**曲面絡み目** (**surface-link**) という。2 つの曲面絡み目が全同位であるとき同値であるという。曲面結び目理論においても同様に同値性問題が考えられるが、4 次元トポロジー特有の困難さも伴い容易ではない。そこで問題への糸口としてブレイドによるアプローチが考えられる。Rudolph は曲面結び目理論におけるブレイドの高次元化として**ブレイド状曲面** (**braided surface**) を導入した。特に $D^2 \times B^2$ へ適切*2に埋め込まれた境界付き曲面 F がブレイド状曲面と全同位であることと F がリボン曲面*3であることは同値であることが知られている [5]。

本稿では曲面結び目理論におけるニットの高次元化として**ニット状曲面** (**knitted surface**) を導入する。ブレイド状曲面はリボン曲面を表示していたが、ニット状曲面については次が成り立つ。

定理 1.1. $D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた任意の境界付き曲面 F はあるニット状曲面と全同位である。

ブレイド状曲面の境界成分が自明であるとき、**2 次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) という。2 次元ブレイドは閉包を定義することができ、これにより 2 次元ブレイドから向き付け可能な曲面結び目を構成することができる。特に任意の向き付け可能な曲面絡み目はある 2 次元ブレイドの閉包と全同位であることが知られている ([6, 3])。境界成分が自明なニット状曲面を **2 次元ニット** (**2-dimensional knit**) と呼ぶ。2 次元ブレイドのときと同様にして閉包を定義することができ、これにより 2 次元ニットから曲面絡み目を構成することができる。このとき次が成り立つ。

*2 埋め込み写像 $f : X \to Y$ が**適切** (**proper**) であるとは、$f(X) \cap \partial Y = f(\partial X)$ をみたすことをいう。

*3 4 次元球体へ適切に埋め込まれた曲面が**リボン** (**ribbon**) であるとは、極大点を持たないようなモース関数が取れることをいう。

定理 1.2. 任意の曲面絡み目はある 2 次元ニットの閉包と全同位である。

2　ニット

$p : D^2 \times I \to I$ を第二成分に関する射影とし、D^2 の内点からなる n 点部分集合 Q_n を 1 つ固定する。本講演では、円筒 $D^2 \times I$ へ適切に埋め込まれた滑らかな 1 次元多様体を**タングル (tangle)** と呼ぶ。射影 $\pi_\beta := p|_\beta : \beta \to I$ の臨界点全体からなる集合を $\mathrm{Crit}(\beta)$ と記す。

定義 2.1. $D^2 \times I$ に埋め込まれたアーク l が次を満たすとき、l は β の**ペアリング (pairing)** であるという：

1. $\partial l = l \cap \beta = \partial l \cap \mathrm{Crit}(\beta)$ は π_β のモース臨界点である。
2. l の全ての点は射影 $\pi_l := p|_l : l \to I$ に関して正則点である。
3. 各 $a \in \partial l$ は次を満たす局所座標近傍 $(U; x, y, z)$ を持つ：
   - $(x, y, z) \in U$ に対して、$\pi_\beta(x, y, z) = z$ が成り立つ。
   - $\beta \cap U = \{(0, y, y^2) \mid y \in \mathbb{R}\}$ かつ $l \cap U = \{(0, 0, z) \mid z \leq 0\}$ である。

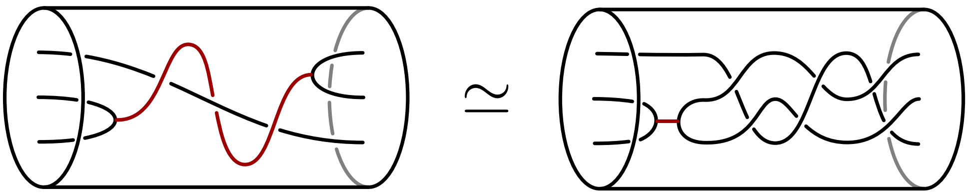

図 3　ペアリング (赤色) の例

定義 2.2. タングル β の互いに交わらないペアリングの集合を $\ell = \{l_1, \ldots, l_q\}$ とする。組 (β, ℓ) が**ニット (knit)** であるとは、次を満たすことをいう。

1. π_β はモース関数である。
2. $\partial\beta = Q_n \times \partial I$ である。
3. $|\ell| := l_1 \cup \cdots \cup l_q$ は $\mathrm{Crit}(\beta)$ を含む。

またこのとき ℓ を β の**ニット構造 (knit structure)** という。

特に $(\beta, \emptyset)$ がニットであるとき、即ち π_β が臨界点を持たないとき、β はブレイドである。

β のニット構造 $\ell = \{l_1, \ldots, l_q\}$ と自己同相写像 $\Phi : D^2 \times I \to D^2 \times I$ に対して、$\Phi(\ell) := \{\Phi(l_1), \ldots, \Phi(l_q)\}$ かつ $\Phi(\beta, \ell) := (\Phi(\beta), \Phi(\ell))$ と記す。

定義 2.3. 2 つのニット (β_0, ℓ_0) と (β_1, ℓ_1) が**同値 (equivalent)** であるとは、次を満たす $D^2 \times I$ のイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在することをいう：

1. $\Phi_0 = \mathrm{id}$ かつ $\Phi_1(\beta_0, \ell_0) = (\beta_1, \ell_1)$ である。

2. 任意の $t \in [0,1]$ について $\Phi_t(\beta_0, \ell_0)$ はニットである。

3 ニット状曲面

2 次元円板を D^2, B^2 で表し、$p : D^2 \times B^2 \to B^2$ を第二成分の射影、そして B^2 の基点 y_0 を ∂B^2 上で 1 つ固定する。

$D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた曲面 S に対して $\pi_S := p|_S : S \to B^2$ を p の S への制限写像、$a \in S$ を π_S の臨界点とする。a の近傍における π_S の局所座標表示として $\pi_S(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ が取れるとき、臨界点 a を（**単純**）**分岐点** (**simple branch point**) と呼ぶ。同値な言い換えとして、複素平面による局所座標表示として $\pi_S(z) = z^2 \in \mathbb{C}$ が取れるときをいう。特に、像 $\pi_S(a)$ は B^2 の内点である。π_S の臨界点 $a \in S$ が**折り目特異点** (**fold point**) であるとは、$\pi_S(x,y) = (x^2, y)$ となる局所座標表示が取れることをいう[*4]。π_S の折り目特異点全体からなる集合を $\mathrm{Fold}(S)$ で記す。

定義 3.1. $D^2 \times B^2$ に埋め込まれた曲面 L が次を満たすとき、L は S の**ペアリング** (**pairing**) であるという：

1. $L \cap S = \partial L \cap \mathrm{Fold}(S)$ は空でない部分集合である。
2. $\partial L \subset \mathrm{Fold}(S) \cup (D^2 \times \partial B^2)$ かつ $\partial L \cap (D^2 \times \partial B^2)$ はループ成分を含まない。
3. L の任意の点は π_L に関して正則点である。
4. 各 $a \in L \cap S$ は以下を満たす局所座標近傍 U を持つ[*5]：
   - $(x,y,z,w) \in U$ に対して、$\pi_S(x,y,z,w) = (z,w)$ である（局所座標表示）。
   - $S \cap U = \{(0,y,y^2,w) \mid y,w \in \mathbb{R}\}$ かつ $L \cap U = \{(0,0,z,w) \mid z \leq 0, w \in \mathbb{R}\}$ である。

定義 3.2. $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_q\}$ を互いに交わらない S のペアリングの集合とする。$(S, \mathcal{L})$ が次数 n の**ニット状曲面** (**knitted surface**, **BMW surface**) であるとは、次を満たすことをいう：

1. π_S の臨界点は分岐点と折り目特異点のみからなる。
2. $\partial S \subset D^2 \times \partial B^2$ かつ $S \cap (D^2 \times \{y_0\}) = Q_n \times \{y_0\}$ である。
3. $|\mathcal{L}| := L_1 \cup \cdots \cup L_q$ は $\mathrm{Fold}(S)$ を含む。

またこのとき、$\mathcal{L}$ を S の**ニット構造**（**knit structure**）と呼ぶ。

特に $(S, \emptyset)$ がニット状曲面であるとき、つまり S が折り目特異点を持たないとき、S を**ブレイド状曲面** (**braided surface**) という。

S のニット構造 $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_q\}$ と同相写像 $\Phi : D^2 \times B^2 \to D^2 \times B^2$ に対して、$\Phi(\mathcal{L}) := \{\Phi(L_1), \ldots, \Phi(L_q)\}$、$\Phi(S, \mathcal{L}) := (\Phi(S), \Phi(\mathcal{L}))$ と記す。

定義 3.3. 2 つのニット状曲面 $(S_0, \mathcal{L}_0)$ と $(S_1, \mathcal{L}_2)$ が**同値** (**equivalent**) であるとは、次を満たす $D^2 \times B^2$ のイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在することをいう：

[*4] $a \in \partial S$ であるとき、折り目特異点の局所座標表示は上半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ 上で考えるものとする。
[*5] $a \in \partial S$ であるとき、それぞれ $w \geq 0$ とする。

- $\Phi_0 = \mathrm{id}$ かつ $\Phi_1(S_0, \mathcal{L}_0) = (S_1, \mathcal{L}_1)$ を満たす。
- 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\Phi_t(S_0, \mathcal{L}_0)$ はニット状曲面である。

4 ニット状曲面の閉包

定義 4.1. ニット状曲面 $(S, \mathcal{L})$ の境界が自明であるとき、即ち $\partial S = Q_n \times \partial B^2$ であるとき、$(S, \mathcal{L})$ を 2 **次元ニット** (**2-dimensional knit**) という。特に $\mathcal{L} = \emptyset$ のとき、S を 2 **次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) という。

$(S, \mathcal{L})$ を 2 次元ニット、B_0^2 を B^2 のコピーとする。また $d := Q_n \times B_0^2$ を $D^2 \times B_0^2$ に埋め込まれた n 枚の円板族とする。$\partial(D^2 \times B^2)$ と $\partial(D^2 \times B_0^2)$ には自然な同一視があるため、この同一視によって $D^2 \times B^2$ と $D^2 \times B_0^2$ を貼り合わせることで S^4 を得る。このとき $S \cap d = \partial S = \partial d$ であるため、S^4 内の曲面絡み目 $\hat{S} = S \cup d$ を得る、これを 2 次元ニット S の**閉包** (**closure**) という。このとき、定理 1.2 が成り立つ。

参考文献

[1] James Waddell Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3):93–95, 1923.

[2] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.

[3] Seiichi Kamada. Alexander's and Markov's theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.

[4] Jun Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.*, 24(4):745–758, 1987.

[5] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

[6] O. Ja. Viro. Local knotting of sub-manifolds. *Mat. Sb. (N.S.)*, 90(132):173–183, 325, 1973.