A numerical criterion of ACM bundles on Rational Normal Scrolls

日本経済大学 経営学部 経営学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

概要

古来より射影直線上のベクトル束の射影化として構成される Rational Normal Scroll と呼ばれる多様体がある．この Rational Normal Scroll については様々な視点からの考察がなされている．本稿においては，Rational Normal Scroll 上の line bundle が ACM であることの数値的判定条件について述べる．

1 Introduction

本稿では，k は標数任意の代数的閉体とし，$S = k[z_0, \ldots, z_N]$ を通常の次数付け $\deg z_i = 1$ の多項式環とする．また S は射影空間 $\mathbb{P}_k^N$ の斉次座標環である．X を n 次元射影多様体とし，X の因子 D に付随する射影空間への埋め込み $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^N$ について考える．$\mathbb{P}^N$ の構造層 $\mathcal{O}$ とその埋め込みに対するイデアル層 $\mathcal{I}_X$ において，X が ACM（Arithmetically Cohen Macaulay）であるとは

$$H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(m)) = 0 \ \ (m \in \mathbb{Z}), \ \text{and} \ \ H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_X(m)) = 0 \ \ (1 < i < n, \ \ m \in \mathbb{Z})$$

となることが必要十分条件である．このコホモロジーの vanishing を考察することで，数値的な条件を得るのが，主結果の一部である．

以下，Rational Normal Scroll $\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)) \to \mathbb{P}^1$ $(0 < a_1 \leq \cdots \leq a_r)$ を考える．これを射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込み，その X 上の因子を $Y = aH + bF$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とする．$d = a_1 + \cdots + a_r$ とおくと，次の主張が得られる．

定理 1.1 ([1],cf.[2])**.** *Y が ACM であるための必要十分条件は，$a \geq 2$ かつ $-d + 1 \leq b \leq 1$ である．*

また一般の場合に戻って，$X \subset \mathbb{P}^N$ を射影多様体とする．X が m-regular であるとは

$$H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(m - i)) = 0 \ \ (i \geq 1)$$

が成り立つことをいう．また射影多様体 X が m-regular であることを，$\operatorname{reg} X := \operatorname{reg} \mathcal{I}_X$ であらわす．

先述の結果と同様に，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)) \to \mathbb{P}^1$ $(0 < a_1 \leq \cdots \leq a_r)$ を考える．これを射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込み，その X 上の因子を $Y = aH + bF$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とする．$d = a_1 + \cdots + a_r$ とおき，コホモロジーの vanishing を考察することで，次の結果を得る．

定理 1.2 ([1],cf.[2]). $\operatorname{reg} X = \begin{cases} a & (a \geq 2 \ \ and \ \ b = -d+1), \\ a+1 & (a \geq 2 \ \ and \ \ -d+2 \leq b \leq 1). \end{cases}$

特にこの regularity を考えることは，極小自由分解を構成する上での１つの重要な不変量である．実際に [3] の考察より，次のことがいえる．

定理 1.3 ([3]). *m-regular* な射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ の極小自由分解 $F_\bullet \to S_X \to 0$. を考える．$F_p = \bigoplus_i S(-a_{p,i})$ $(i \geq 0)$ とし，$a_p = \max_i\{a_{p,i}\}$ としたとき，$a_p \leq p+m$ が成り立つ．

また射影多様体 X の埋め込みに対する極小自由分解において，N_p 条件なるものが考察される ([4][5])．極小自由分解を $F_\bullet \to S_X \to 0$ で $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$ を考えたとき，X が N_p 条件を満たすとは，次の条件を満たすことである：

$$E_0 = S \text{ and } a_{i,j} = i+1 \ \ (j \in \mathbb{Z}, \ \ 1 \leq i \leq p).$$

この条件は埋め込み $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^N$ を考えたとき，$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ とすると

1. N_0 条件を満たすとは，$m \geq 0$ において
$$\operatorname{Sym}^m H(X,\mathcal{L}) \to H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$$
が全射となることと同値である．
2. N_1 条件を満たすとは，N_0 条件を満たし，かつ I_X が 2 次斉次式で生成されることと同値である．
3. N_2 条件を満たすとは，N_1 条件を満たし，かつ I_X の 2 次斉次式の生成元 Q_r において
$$\sum_i L_i Q_i = 0 \ \ (L_i \in S \ \ \text{linear})$$
なる関係式が成り立つことと同値である．

この N_p 条件を満たすか否かで極小自由分解の形が決定できる．例えば m-regular で N_p 条件を満たすような射影多様体の極小自由分解は

$$0 \to \bigoplus S(-p-1) \to \bigoplus S(-p) \to \cdots \to \bigoplus S(-m-1) \to \bigoplus S(-m) \to S \to S_X \to 0.$$

の形でかける．これは Linear resolution と呼ばれる形である．これらは後述の正規有理曲線 (Rational Normal Curve) やより一般的な Rational Normal Scroll の極小自由分解の形である ([6][7])．この条件などを Rational Normal Scroll 上の因子や部分多様体について考察していくのが本研究のテーマとなる．

2 Rational Normal Scroll

以下，Rational Normal Scroll の構成および極小自由分解を考える．記法や添え字などは，前節と異なることを注意しておく．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N=\sum_{i=1}^{n} a_i+n-1$ とおいて埋め込むものである．$X=\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える．$D=\sum_{i=1}^{n} a_i+n$ として $2\times D$ 行列

$$M_{D,1}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,a_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,a_n} \end{array}\right)$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S=k[x_{1,0},\dots,x_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\binom{N}{i+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である．これは Eagon-Northcott 複体の一例となる．

注意 2.1. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1>0)$ のとき，$X=\mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1))\cong\mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X\subset\mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

注意 2.2. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}=\mathcal{O}(a_1)\oplus\mathcal{O}(a_2)(0<a_1\leq a_2)$ のとき，$\pi: X=\mathbb{P}(\mathcal{E})\to\mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}'=\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X\cong\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これから *Hirzebruch* 曲面[*1]に同型であることがいえる．

注意 2.3. $[t_0,t_1]$ を底空間 $\mathbb{P}^1$ の斉次座標系とし，$[z_1,\dots,z_n]$ を X 上におけるファイバー $\mathbb{P}^{n-1}$ の斉次座標系とすると，埋め込み先の $\mathbb{P}^N$ 上での $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の斉次座標 $x_{i,j}$ は

$$x_{i,j}|_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}=t_0^{a_i-j}t_1^j z_i$$

と表すことができる．

ここで，$\operatorname{Pic} X$ について言及しておく．$i: X\to\mathbb{P}^N$ を埋め込みとし，$\pi: X\to\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^{n-1}$ 束とする．$H=[i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)]$ とし，$F=[\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(1)}]$ とする．このとき

$$\operatorname{Pic} X\cong\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}F$$

となる．ここで intersection pairing として

$$H^n=\deg\mathcal{E}, H^{n-1}.F=1, F^2=0$$

がいえる．[*2]Rational Normal Scroll $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と $\mathbb{P}^1$ のコホモロジー群 H^0 については次の関係がいえる：

---

*1 [8] で構成される正規化されたベクトル束から構成される Hirzebruch 曲面

*2 X 上の minimal section として，$H_0=H-a_nF$ が取れる．これは $H-rF$ が effective となるような最大の $r\in\mathbb{N}$ とみることができる．

命題 2.4. $\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ \ (0 \le a_1 \le \cdots \le a_n)$$

の射影化 $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ について，$a \ge 0, b \ge -1$ とすると

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \operatorname{Sym}^a \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$$

が成り立つ.

命題 2.5. $D, N, \mathcal{E}, X$ を上述の通りとする．$a \ge 0, b \ge -1$ のとき

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) = (D - n) \begin{pmatrix} a + n - 1 \\ n \end{pmatrix} + (b + 1) \begin{pmatrix} a + n - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}$$

となる.[*3]

補足

有理曲線の中で基本的である正規有理曲線は，[7]，[8]，[9]，[10] などで解説されている．以下，$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[t_0, t_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle t_0, t_1 \rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle t_0^n, t_0^{n-1} t_1, \ldots, t_0 t_1^{n-1}, t_1^n \rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n 次の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル I_C は $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．この正規有理曲線 C の定義イデアル I_C は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．この極小自由分解は Rational Normal Scroll の特別な場合である.

先述の N_p 条件について考えると，Rational Normal Scroll や 正規有理曲線は Minimal Degree と呼ばれる射影多様体のクラスとなる．これは $\deg X = \operatorname{codim} X + 1$ となるような多様体であり，それらは

1. 射影空間
2. 2 次超曲面
3. Veronese Surface
4. Rational Normal Scroll
5. 上記 2.∼ 4. までの射影多様体の Cone Type

[*3] この式より，X の次数と次元によって h^0 が決まることがわかる.

となり，それは $\operatorname{reg} X = 2$ となる．この Linear resolution とならないような例としては，$\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ となるような射影多様体（Almost Minimal Degree）のクラスが分類されている([11],[12])．

3 証明の概略と今後の考察について

以下，証明の概略である．まず X 上の因子 Y が effective であるための条件を考察すると

補題 3.1. $Y = aH + bF$ が *effective* であるための必要十分条件は $a = 0, b > a_r$ または $a = 1, b \geq 1$ または $a \geq 2, b \geq -aa_r$ である．

Proof. Bertini の定理による． Q.E.D

また ample 条件を述べると次のようになる．

補題 3.2. $Y = aH + bF$ が *ample* であるための必要十分条件は $a > 0, b > -(a_1 + \cdots + a_r)a$ となる．

Proof. 中井の Ample 判定法による． Q.E.D

これらを利用して，コホモロジーの vanishing を考察することで結果を得る．

また今後の考察の方針について少し述べる．今回，[1] で得られた結果の一部を紹介したが，[2] でも考察がされている．こちらは Cone Type との関連性が考察がされており, 大変参考となった．さらに，Arithmetically Buchsbaum Divisor に関する考察は [13] によって述べられている．これは Rational Normal Scroll より一般的な Minimal Degree な射影多様体上の因子について考察されている．その中でも ACM divisor と regularity の関係性を表した評価式は参考になっている．

定理 3.3 ([13])**.** Y を *ACM* 多様体とし, 標数 0 かまたは $c \geq 5$ と仮定する．$d > (c+1)^2$ のとき, 次の *3* 条件は互いに同値である．

1. $\operatorname{reg} X = \lceil (d-1)/c \rceil + 1$
2. $m(X) = \lceil d/c \rceil$
3. X はある *Minimal Degree variety* 上の因子である．

このような形式で整理できればと考えている．ACM vector bundle については [1] を参照していただければと思う．

謝辞

本稿をまとめるにあたり, 第 20 回数学総合若手研究集会の世話人の方々へは多大なご配慮をいただきました．この場を借り, 厚く御礼申し上げますとともに, 研究を遂行していきたいと思います．

参考文献

[1] S. Yashiro. A numerical criterion of acm bundles on rational normal scrolls. *Preprint.*

[2] Euisung Park. On syzygies of divisors on rational normal scrolls. *Mathematische Nachrichten*, 287(11-12):1383–1393, 2014.

[3] David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu. Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compositio Mathematica*, 141(6):1460–1478, 2005.

[4] R.K. Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry I: Classical Setting: Line Bundles and Linear Series*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 2004.

[5] R.K. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry II.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete : a series of modern surveys in mathematics. Folge 3. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[6] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[7] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[8] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[9] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library. Wiley, 1978.

[10] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[11] Le Tuan Hoa, Jürgen Stückrad, and Wolfgang Vogel. Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):203–231, 1991. Special Issue In Honor of H. Matsumura.

[12] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.

[13] Uwe Nagel. Arithmetically buchsbaum divisors on varieties of minimal degree. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(11):4381–4409, 1999.