Dijkgraaf-Witten 不変量の K 理論的研究

東京工業大学理学院数学系数学コース
柳田幸輝 (Koki YANAGIDA) *

概要

DW 不変量は有向閉三次元多様体の位相的不変量であり、その値を常ホモロジーにもつ。本研究では、DW 不変量の構成を模倣することで、K-ホモロジーに値を持つ位相的不変量を新たに定義した。これを KDW 不変量と呼ぶ。この講演では、Brieskorn homology sphere の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 KDW 不変量の計算結果について紹介する。これは基本群が非可換群な多様体に対する DW 不変量の初めての計算例でもある。

1　導入

Dijkgraaf-Witten 不変量（以降、DW 不変量）とは、TQFT を背景にして、Dijkgraaf と Witten によって定義された量である [DW90]。DW 不変量 $\mathrm{DW}_G(M)$ は有限群 G と三次元多様体 M を与えるたびに定まり、特に G を固定したときに M の位相的不変量として振舞う。DW 不変量の定義は、大まかな解釈として、基本類 $[M] \in H_3(M;\mathbb{Z})$ を用いて $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ を重みづけし足し合わせた量と言える。さて、Dijkgraaf と Witten は、DW 不変量を三角形分割を用いて表現し、TQFT-like な toy モデルを構成している。このことから、DW 不変量の計算例は TQFT を理解する一助となる。しかしながら、先行研究においては G や $\pi_1(M)$ が非アーベル群である計算例は多くない。

本研究では、この DW 不変量を模倣した不変量、KDW 不変量を提案する。KDW 不変量の定義では、K-ホモロジーにおける "基本類"$[M]_K \in K_1(M)$ を用いる [Rud98]。さて、本研究の主目的は KDW 不変量の計算例を与えることである。一般に、K-ホモロジーの加群としての構造に加えて誘導される準同型を詳細に記述することは困難である。よって、KDW 不変量の直接計算も困難である。そこで、[Kna78] の研究結果を用いることで、より扱いやすい複素表現環 $R(G)$ の元として KDW 不変量を置き換えた。これを α-KDW 不変量と本論文では呼んでいる。さて本研究で得られた計算結果は以下の三つである。いずれも一般ホモロジーに値を持つ DW 不変量において初めての計算例である。

1. レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量
2. レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 α-KDW 不変量
3. ブリースコーンホモロジー球面 $\Sigma(k_1,k_2,k_3)$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 α-KDW 不変量

最後の計算結果においては、有限群 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ と基本群 $\pi_1(\Sigma(k_1,k_2,k_3))$ のいずれもが非アー

* E-mail:yanagida.k.ab@m.titech.ac.jp

ベル群であることに注意してほしい。

2 準備

この節では、主定理を述べるための準備を行う。本節を通して d を奇数とし、G は有限群を、M は閉 d 次元多様体を意味する。

2.1 K-理論と KDW 不変量

まず初めに K-コホモロジー $K^*(M)$ と K-ホモロジー $K_*(M)$ について復習しよう [HR00, BHS07]。M の複素ベクトル束全体の集合は、ホイットニー和 $\oplus$ によって可換なモノイドを成す。このモノイドから得られるグロダンディーク群を $K^0(M)$ と表し、$K^{-n}(M) \coloneqq K^0(\Sigma^n M)$ で定める。ここで ΣM は約懸垂 $(M \times [0,1])/(M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\} \sqcup \{x_0\} \times [0,1])$ を意味する。この $K^*(M)$ は K-コホモロジーと呼ばれている。さて K-ホモロジーの定義は、複数存在する (例えば、[BHS07] を見よ)。いずれも複雑であるため、このレポートでは詳細な定義には立ち入らず性質のみ述べよう。K-ホモロジーにおいては、M が spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を持つ場合、同型 $K^*(M) \cong K_{d-*}(M)$ が $\mathfrak{s}$ によって誘導される。加えて、Bott 周期性 $K_*(M) \cong K_{*-2}(M)$ が成り立つ。さて、K-ホモロジーにおいては、常ホモロジーと同様の手段で基本類 $[M]_K \in K_1(M)$ を構成できる [Rud98]。すなわち、任意の点 $x \in M$ において $K_1(M) \to K_1(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ の像が生成元をなす $K_1(M)$ の類を基本類と呼ぶ。また、基本類が定義できるような多様体のことを K-向き付け可能である、と言う。常ホモロジーでは正負を除いて基本類が一意に定まったが、一方で K-ホモロジーの基本類は無限個存在する場合もあることに注意する。というのも、$K_1(M)$ の基本類のなす集合 $\mathrm{KOri}(M)$ と $H_1(M;\mathbb{Z})$ には一対一対応が存在するからだ。

KDW 不変量は基本類を用いて次で定める。

Definition 1. M を K-向き付け可能な d 次元閉多様体で $H_1(M)$ が有限であるものとする。KDW 不変量とは、以下で定まる形式和である。

$$\mathrm{KDW}_G(M) \coloneqq \sum_{[M]_K \in \mathrm{KOri}(M)} \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)} 1_{\mathbb{Z}} (Bf \circ \iota_{\pi_1(M)})_* [M]_K \in \mathbb{Z}[K_1(BG)].$$

ここで各記号は次を意味している。BG と $B\pi_1(M)$ はそれぞれ G と $\pi_1(M)$ の定める分類空間である。$\iota_{\pi_1(M)} : M \to B\pi_1(M)$ は分類写像を意味し、$Bf : B\pi_1(M) \to BG$ は $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ が誘導する連続写像である。

2.2 Knapp の ψ_G と α-KDW 不変量

次に [Kna78] から単射準同型 ψ_G を導入し、α-KDW 不変量を定義しよう。$\psi_G : K_1(BG) \otimes \mathbb{Z}[1/2] \to R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$ は、以下で説明する準同型 $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}$ が μ_s を経由する事実によって構成される。すなわち、$\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}} = \psi_G \circ \mu_s$。

Knapp が構成した写像

$$\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}} : \Omega_*(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$$

は、Atiyah-Singer の G-signature [AS68] の模倣である。ここで、$\Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 係数 G-有向ボルディズム群を意味し、$\mathbb{Z}_{(2)}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアル (2) での局所化を意味している。写像 μ_s の定義には、任意の奇数次元多様体 M に対して定まる $[M]_s \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を用いる。この $[M]_s$ は、M が K-向き付け可能である場合、ある基本類 $[M]_K \in K_1(M)$ が存在して、$[M]_s = [M]_K \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ が成り立つ。Knapp はこの $[M]_s$ をもちいて、準同型 $\mu_s : \Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to K_1(BG)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を、

$$\mu_s((M, f : M \to BG)) \coloneqq f_*[M]_s$$

で定めた。α-KDW 不変量は次のように定める。

Definition 2. M を K-向き付け可能な奇数次元多様体とし、基本類 $[M]_K$ は $[M]_K = [M]_s \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を満たすものを取る。α-KDW 不変量とは、次で定まる形式和である。

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = \sum_{\mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)} 1_{\mathbb{Z}}\ \psi_G \circ (Bf \circ \iota_{\pi_1(M)})[M]_K \in \mathbb{Z}[R(G)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

ψ_G の性質から、α-KDW 不変量から KDW 不変量の 2-捩れ部分以外をすべて復元できることに注意しよう。

この小節の最後に ψ_G の性質とそれから導かれる補題について言及する。$f : H \to G$ を単射な群準同型としよう。このとき、f に考察を与えることで H の表現全体から G の表現全体への写像が構成できる。更に、これは表現環上で加法的準同型 $R(H) \to R(G)$ を誘導する。これを $f_! : R(H) \to R(G)$ と書く。Knapp によって次が成り立つことが示されている。

$$f_! \circ \psi_H = \psi_G \circ Bf_*$$

この性質を応用することで次が得られる。

Lemma 1. [Y.] M を K-向き付け可能な奇数次元多様体とし、$G \cong \pi_1(M)$ とする。この時、

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = \sum_{f\in\mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)} 1_{\mathbb{Z}}(f_!\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(M)).$$

特別な場合として、H が G の部分群であって f が包含写像ならば、$f_!$ を Ind_H^G と書こう。

2.3 例：レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量

この節の最後に、主定理を述べるための記号の導入もかねて、レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量を求める。$k\in\mathbb{N}$ とし、ℓ を k と互いに素な整数とする。

表現 $\rho : \mathbb{Z}/k \to \mathbb{C}^\times$ を $\rho(m) = e^{2\pi m\sqrt{-1}/k}$ と定めよう。このとき、$R(\mathbb{Z}/k)$ は $\{\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^{k-1}\}$ で張られる $\mathbb{Z}$ 自由加群である。いま $R(\mathbb{Z}/k)$ を次の対応で $\mathbb{Z}^k$ に同一視する：

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i\rho^i \quad\longleftrightarrow\quad (a_0, \dots, a_{k-1})^{\mathrm{T}}.$$

$\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(L^1(k;\ell))$ に対応するベクトルを $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ と定め、置換行列 $P_k^{(m)}$ を

$$(P_k^{(h)} \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} 1, & \text{if } j \equiv hi \mod k, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおく。このとき、Lemma 1 によって、

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = 1_{\mathbb{Z}}\boldsymbol{o} + \sum_{h=1}^{k-1} 1_{\mathbb{Z}}(P_k^{(h)}\boldsymbol{\xi}(k;\ell))$$

となる。ここで $\boldsymbol{o} \in \mathbb{Z}^k$ はゼロベクトルである。

よって $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ の値を求めればよいこととなる。[Kna78] によって任意の k と ℓ における $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(L^1(k;\ell))$ の指標が計算されている。このことから、$\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ は計算が可能である。実際、[Yan23] において $k \in \{3,5,7,11,13\}$ における $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ を具体的に示している。

3 主定理

主結果を述べよう。p を奇素数とする。$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ は位数 p の有限体がなす射影特殊線型群とする。k, k_1, k_2, k_3 は $p^3 - p$ を割り切る互いに異なる奇素数とする。更に、ℓ は k と互いに素とし、ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は

$$k_1k_2\ell_3 + k_1\ell_2k_3 + \ell_1k_2k_3 \in \{\pm 1\}$$

を満たすようにとる。$|G| = (p^3-p)/2$ であるため、G は位数 k_i の巡回群を持つ。この巡回群を H_{k_i} と表そう。以降では、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G : R(H_{k_i}) \to R(G)$ を加法的準同型 $\mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^G : \mathbb{Z}[R(H_{k_i})] \to \mathbb{Z}[R(G)]$ と自然にみなす。

Theorem 1. [Y.] $\alpha\text{-KDW}_G(L^1(k;\ell))$ は、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}}$ における次の元の像と一致する。

$$(1-m_k)\boldsymbol{o} + m_k\ \alpha\text{-KDW}_G(L^1(k;\ell)) \in \mathbb{Z}[R(H_k) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

ここで

$$m_k = \begin{cases} p^2+p, & \textit{if } k|p-1, \\ p^2-p, & \textit{if } k|p+1, \\ p+1, & \textit{if } k=p. \end{cases}$$

Theorem 2. [Y.] $p \notin \{k_1,k_2,k_3\}$ とする。$\alpha\text{-KDW}_G(\Sigma(k_1,k_2,k_3))$ は、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

における次の元の像と一致する。

$$\boldsymbol{o} + 4|G| \sum_{m_1=1}^{(k_1-1)/2} \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_{k_1}^{(m_1)}\boldsymbol{\xi}(k_1;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_3;\ell_3)).$$

さて、$p \in \{k_1,k_2,k_3\}$ の場合、$\Sigma(k_1,k_2,k_3) = \Sigma(k_2,k_3,k_1) = \Sigma(k_3,k_1,k_2)$ によって、$k_1 = p$ の場合のみを考えればよい。

Theorem 3. [Y.] $k_1 = p$ とし、$\Delta \in \mathbb{Z}/p$ は $\mathbb{Z}/p$ において二乗数ではない数とする。α-$\mathrm{KDW}_G(\Sigma(k_1, k_2, k_3))$ は、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^{G} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

における次の元の像と一致する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} + 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(1)} \boldsymbol{\xi}(p; \ell_1), P_{k_2}^{(m_2)} \boldsymbol{\xi}(k_2; \ell_2), P_{k_3}^{(m_3)} \boldsymbol{\xi}(k_2; \ell_2)) \\ + 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(\Delta)} \boldsymbol{\xi}(p; \ell_1), P_{k_2}^{(m_2)} \boldsymbol{\xi}(k_2; \ell_2), P_{k_3}^{(m_3)} \boldsymbol{\xi}(k_3; \ell_3)). \end{aligned}$$

参考文献

[AS68] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[BHS07] P. Baum, N. Higson, and T. Schick, *On the equivalence of geometric and analytic K-homology*, Pure Appl. Math. Q.**3** (2007), no. 1, Special Issue: In honor of Robert D. MacPherson. Part 3, 1–24.

[DW90] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 393–429.

[HR00] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Oxford Science Publications.

[Kna78] K. Knapp, *On the K-homology of classifying spaces*, Math. Ann. **233** (1978), no. 2, 103–124.

[Rud98] Y. B. Rudyak, *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With a foreword by Haynes Miller.

[Yan23] K. Yanagida, *The Dijikgraaf-Witten invariant in topological K-theory*, preprint (2023).