特異点を持つ閉曲線の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻
山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概 要

本講演では n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内の 1 次元波面に対する Fenchel の定理の拡張について紹介する．我々は $\boldsymbol{R}^n$ 内の余向き付け不可能な 1 次元フロンタルの絶対全曲率が π 以上であり，等号が成立するのはフロンタルが平面曲線であり L-convex かつ回転数が $\pm\frac{1}{2}$ である時に限ることを証明した．さらに波面の絶対全曲率が π，特異点を全てカスプとしてその数を N とした時，N は 3 以上の奇数となり $N = 3$ であることと波面が単純閉曲線であることは同値となる．本講演の内容は田中千紗氏 (NTT データフロンティア) と本田淳史氏 (横浜国立大学) との共同研究 [11] に基づく．

1　導入

n を 2 以上の整数とする．周期 $\ell\,(>0)$ の正則閉曲線 $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$T(\gamma) = \int_0^\ell |\kappa|\,ds \qquad (ds = |\gamma'(t)|\,dt)$$

を**絶対全曲率**，あるいは単に**全曲率**という．ここで，κ は γ の曲率関数であり，$\gamma'(t) = d\gamma(t)/dt$ とする．Fenchel の定理 ([9, 3]) より，全曲率 $T(\gamma)$ は 2π 以上であり，$T(\gamma) = 2\pi$ が成り立つための必要十分条件は γ が平面曲線かつ卵形線である．これまで Fenchel の定理の様々な一般化が得られてきた: 結び目 [8, 12], 非正曲率リーマン多様体 [17, 4], 球面 [15, 16], 開曲線 [7], ミンコフスキー空間 [2], CAT(κ) 空間 [14].

一方，特異点を持つ閉曲線には全曲率を定義する事ができるものが存在する．したがって，このような曲線の全曲率に対しても Fenchel 型定理が成り立つのではないかと考えた．本講演ではそのような曲線としてフロンタル及び波面を取り挙げ，それらの全曲率に対する Fenchel 型定理を紹介する．

2　準備

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ で通常の内積を表す．ベクトルの大きさ (ノルム) は $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して

$$|\boldsymbol{a}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2}$$

で定義される．

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp

開区間 I 上で定義された C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，$\gamma'(c) = \boldsymbol{0}$ となるような点 $t = c$ を**特異点**といい，$\gamma'(c) \neq \boldsymbol{0}$ となるような点 $t = c$ を**正則点**という．ここで，プライムは t による微分を表す $({}' = d/dt)$．I の部分集合 $\mathrm{Reg}(\gamma)$ を γ の正則点集合とする．また，S^{n-1} を単位球面

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1\}$$

とする．

定義 2.1. 開区間 I に対し，正則点集合が稠密である C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ が**フロンタル**であるとは，C^∞ 級写像 $\boldsymbol{e} : I \to S^{n-1}$ が存在し $\gamma'(t)$ と $\boldsymbol{e}(t)$ が線形従属であることをいう．特にこの $\boldsymbol{e}$ を γ の**単位接ベクトル場**という．

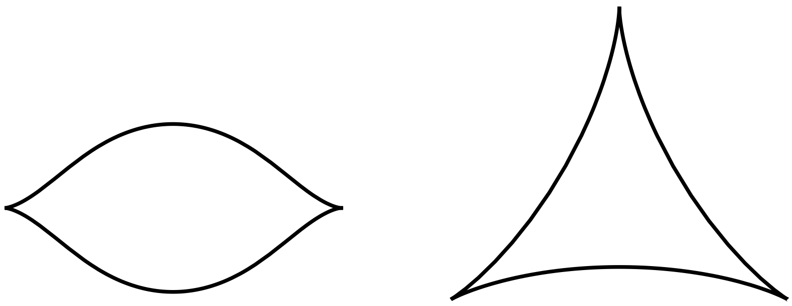
フロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ が $\gamma'(t) = \boldsymbol{0}$, つまり t が特異点である時，$\boldsymbol{e}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ が成り立つならば，γ を**波面**と呼ぶ.

定義 2.2. ある正の実数 ℓ が存在して，C^∞ 級写像 $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ が $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\gamma(t) = \gamma(t + \ell)$ を満たす時，γ は**閉フロンタル**であるという．この時，最小の ℓ を**周期**と呼ぶ．また，周期 ℓ の閉フロンタル γ に沿う単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{R} \to S^{n-1}$ が

(i) $\boldsymbol{e}(t + \ell) = \boldsymbol{e}(t)$ を満たす時，γ を**余向き付け可能な閉フロンタル**と呼ぶ.

(ii) $\boldsymbol{e}(t + \ell) = -\boldsymbol{e}(t)$ を満たすとき，γ を**余向き付け不可能な閉フロンタル**という.

任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対し，γ の $[a, a + \ell]$ への制限で閉フロンタルを表すこととする．



余向き付け可能な波面　　余向き付け不可能な波面

閉区間 I で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，曲率 κ は $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上で，弧長パラメータ s を用いて

$$\kappa = \left| \frac{d^2}{ds^2} \gamma \right|$$

と定める．この時 $\boldsymbol{e}$ を γ に沿う単位接ベクトル場とすると，κ は

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{e}'(t)|}{|\gamma'(t)|} \quad (t \in \mathrm{Reg}(\gamma))$$

と表される．

一般に，曲率関数 κ は特異点にて発散する．しかし，次の命題が成り立つので全曲率を定めることができる．

命題 2.3. 閉区間 I で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，s を γ の $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上の弧長パラメータとする．この時，$\kappa\, ds$ は特異点を越えて I 上で連続な 1 次微分形式に拡張される．

証明．$\kappa = |\boldsymbol{e}'|/|\gamma'|$，$ds = |\gamma'|dt$ より，

$$\kappa\ ds = \frac{|\boldsymbol{e}'|}{|\gamma'|}|\gamma'|dt = \left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\right| dt$$

と表される．$\boldsymbol{e}$ は C^∞ 級写像なので，右辺の式は連続な微分形式となる． □

定義 2.4. 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$T(\gamma) = \int_a^b \kappa\ ds$$

と定める．$T(\gamma)$ を γ の**全曲率**という．

全曲率に対し，直ちに以下の系が導かれる．

系 2.5. 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，その単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ の移動距離

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\right| dt$$

は，全曲率と一致する．

$\boldsymbol{R}^2$ 内の余向き付け不可能な閉フロンタル $\gamma(t)$ に対し，その単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}(t) : [0, \ell] \to S^1$ は

$$\boldsymbol{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る．γ は余向き付け不可能なので $\boldsymbol{e}(\ell) = -\boldsymbol{e}(0)$ が成り立つ．したがって，ある整数 $m \in \mathbb{Z}$ が存在して

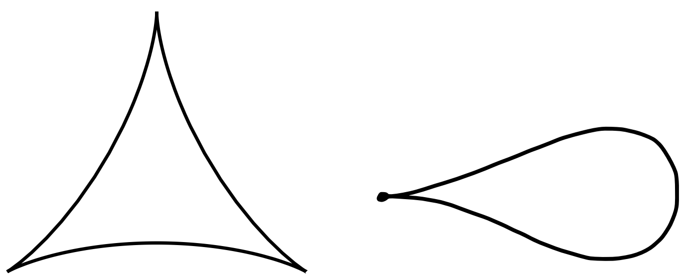
$$\theta(\ell) - \theta(0) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

となる．

定義 2.6. $m + \dfrac{1}{2}$ を余向き付け不可能な閉フロンタル γ の**回転数**と呼ぶ．

次に定義する L-convex とは，凸性のフロンタルへの拡張である．

定義 2.7. $\boldsymbol{R}^2$ 内のフロンタル γ が L-convex であるとは，$\mu = \det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}')$ が常に $\mu \geq 0$ または常に $\mu \leq 0$ を満たすことをいう．



L-convex である　　L-convex ではない

$(\mu(t), \langle\gamma'(t), \boldsymbol{e}(t)\rangle)$ の組み合わせは**ルジャンドル曲率**として Fukunaga-Takahashi [10] で導入された．曲率関数 κ は $\kappa = \mu/|\gamma'|$ と表されるため，正則点においては，L-convex であることと κ が符号を変えないことは同値である．

3　主結果 1

単位球面 S^{n-1} と $\boldsymbol{R}^n$ 内の $(n-1)$ 次元部分空間の共通部分を**大超球面**と呼ぶ.

補題 3.1 ([13]). 単位球面 S^{n-1} 内の C^1 級の閉曲線 Γ の長さを L とする．任意の大超球面 g と Γ が共有点を持つならば,

$$L > 2\pi \text{ または } (L = 2\pi \text{ かつ } \Gamma \text{ が二つの大円の半円弧で構成される})$$

が成り立つ.

命題 3.2 ([11]). $\gamma : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}^n$ を余向き付け不可能な閉フロンタルとする．γ に沿う単位接ベクトル場を $\boldsymbol{e} : [0, \ell] \to S^{n-1}$ とし，$\boldsymbol{e}$ が S^{n-1} 上に描く曲線を Γ とする．この時，S^{n-1} 上の任意の大超球面 g と Γ は交点を持つ.

証明. 大超球面 g に対し，ある $\xi \in S^{n-1}$ が存在し，

$$g = \{x \in S^{n-1} \mid \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

と表される．したがって，g と Γ が交点を持つことと，ある $t_0 \in [0, \ell]$ が存在して

$$\langle \boldsymbol{e}(t_0), \xi \rangle = 0$$

となることは同値である．ここで，$f : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}$ を

$$f(t) = \langle \boldsymbol{e}(t), \xi \rangle$$

と定める．f は連続な関数になる．γ は余向き付け不可能な閉フロンタルであるため,

$$\boldsymbol{e}(0) = -\boldsymbol{e}(\ell)$$

となる．よって

$$f(0) = -f(\ell)$$

が成り立つ．もし $f(0) = 0$ ならば $\boldsymbol{e}(0) \in g$ が成り立つので．g と Γ は交点を持つ．$f(0) \neq 0$ ならば $f(0)$ と $f(\ell)$ は異符号なので，中間値の定理よりある点 $t_0 \in [0, \ell]$ が存在して $f(t_0) = 0$ を満たす．したがって，$\boldsymbol{e}(t_0) \in g$ が成り立つので．g と Γ は交点を持つ．□

我々は $\boldsymbol{R}^n$ 内の閉フロンタルの全曲率に関して，次の定理 3.3 を示した.

定理 3.3 ([11]). $\gamma : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}^n$ を余向き付け不可能な閉フロンタルとする．この時,

$$T(\gamma) \geq \pi$$

が成り立つ．等号が成り立つのは

(1) 閉フロンタルが 2 次元部分空間に含まれる

(2) *L-convex* である

(3) 回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$

が成り立つ時に限る.

証明．γ 及び単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ の定義域を $[0,\ell]$ から $[0,2\ell]$ へと拡張したものをそれぞれ $\tilde{\gamma}$，$\tilde{\boldsymbol{e}}$ とすると，$\tilde{\boldsymbol{e}}$ の描く曲線 $\tilde{\Gamma}$ は S^{n-1} 上の閉曲線となる．命題 3.2 より，$\tilde{\gamma}$ の $\tilde{\boldsymbol{e}}$ の描く曲線 $\tilde{\Gamma}$ は S^{n-1} 上の任意の大超球面と交点を持つ．よって補題 3.1 より，

$$T(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi$$

が成り立ち，

$$T(\tilde{\gamma}) = 2T(\gamma)$$

が成り立つので，

$$T(\gamma) \geq \pi$$

が導かれる．等号成立条件は $\tilde{\Gamma}$ が大円である，つまり Γ が大円の半分部分である．よって γ は 2 次元部分空間内に含まれ，かつ回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$ となる．

最後に等号が成り立つとき γ が L-convex であることを示す．$\mu(t) = \kappa(t)|\gamma'(t)|$ より，全曲率は μ を使って以下のように表すことが出来る．

$$T(\gamma) = \int_0^\ell |\mu(t)|dt$$

一方，回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$ であるので $|\theta(\ell) - \theta(0)| = \pi$ である．したがって，次の式が成り立つ．

$$\left|\int_0^\ell \mu(t)dt\right| = \left|\int_0^\ell \theta'(t)dt\right| = |[\theta(t)]_0^\ell| = \pi$$

いま全曲率が π であるので，

$$\int_0^\ell |\mu(t)|dt = \left|\int_0^\ell \mu(t)dt\right|$$

となる．よって $t \in [0,\ell]$ に対して常に $\mu(t) \geq 0$ または $\mu(t) \leq 0$ となる．したがって γ は L-convex である．

□

4 主結果 2

定義 4.1. 平面曲線 $\gamma(t)(a < t < b)$ において $t = c$ が特異点であるとする．もしも，曲線の適当な (向きを保つ) 助変数の取り替え $t = t(s)(c = t(0))$ と $\gamma(c)$ の近傍から原点 $(0,0)$ の近傍への $\boldsymbol{R}^2$ の (局所) 微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ \gamma(t(s)) = (s^2, s^3)$$

と表すことができるとき，平面曲線 $\gamma(t)$ は $t = c$ に**カスプ**をもつ，あるいは，$t = c$ は $\gamma(t)$ の**カスプ**であるという．

次の補題 4.2，補題 4.6 及び補題 4.7 は定理 4.8 の証明で用いるものである．

補題 4.2 ([1, Proposition 3.21])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}, a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり

- (a,b) の点は全て正則点

を満たすとする．このとき，$T(\gamma) > \pi$ が成り立つ．

定義 4.3. 正則点集合 $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上で定義される写像 $\hat{\boldsymbol{e}} : \mathrm{Reg}(\gamma) \to S^1$

$$\hat{\boldsymbol{e}}(t) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \qquad (t \in \mathrm{Reg}(\gamma))$$

を γ の**向き付き単位接ベクトル場**と呼ぶ．

定義 4.4. 有界閉区間 $[a,b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は内部に有限個の特異点をもつとする．γ の向き付き単位接ベクトル場 $\hat{\boldsymbol{e}}$ に対し，もし $t=a$ が γ の特異点ならば，

$$\hat{\boldsymbol{e}}(a) := \lim_{t \to a+0} \hat{\boldsymbol{e}}(t)$$

と定め，もし $t=b$ が γ の特異点ならば，

$$\hat{\boldsymbol{e}}(b) := \lim_{t \to b-0} \hat{\boldsymbol{e}}(t)$$

と定める．

定義 4.5. 有界閉区間 $[a,b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は内部に有限個の特異点をもつとする．さらに，$\gamma(a) = \gamma(b)$ であるとする．このとき，

$$\theta = \arccos(-\langle \hat{\boldsymbol{e}}(a), \hat{\boldsymbol{e}}(b) \rangle)$$

により定まる $\theta \in [0,\pi]$ を γ **の端点におけるなす角**という．

補題 4.6 ([11])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり，
- $c \in (a,b)$ においてカスプをもち，
- $(a,c) \cup (c,b)$ の点は全て正則点

を満たすとする．$\theta \in [0,\pi]$ を γ の端点におけるなす角とする．このとき，$T(\gamma) > \theta$ が成り立つ．

補題 4.7 ([11])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり，
- $c_1, c_2 \in (a,b)$ $(c_1 < c_2)$ においてカスプをもち，
- $(a,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup (c_2,b)$ の点は全て正則点

を満たすとする．$\theta \in [0,\pi]$ を γ の端点におけるなす角とする．このとき，$T(\gamma) \geq \pi - \theta$ が成り立つ．

我々は最小全曲率を持つ閉波面の単純性について次の定理 4.8 を示した．

定理 4.8 ([11])**.** $\boldsymbol{R}^2$ の余向き付け不可能な閉波面 $\gamma(t)$ は最小全曲率 $T(\gamma) = \pi$ を持つとする．さらに γ の特異点は全てカスプとし，その個数を N_γ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) N_γ は 3 以上の奇数である．

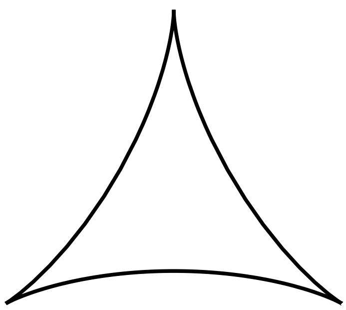
(2) $N_\gamma = 3$ であることと，$\gamma(t)$ が単純閉曲線であることは同値である．

(1) は補題 4.2 を用いて示すことができる．なぜなら，もし $N_\gamma = 1$ ならば補題 4.2 より $T(\gamma) > \pi$ となり，最小全曲率 $T(\gamma) = \pi$ を持つという仮定に反するからである．

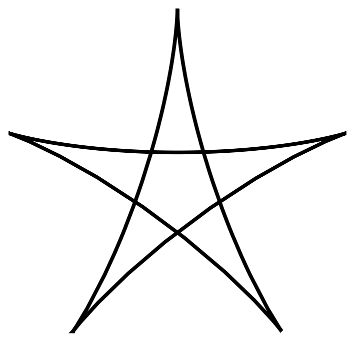
(2) は $(N_\gamma = 3) \Rightarrow (\gamma$ が単純$)$ であること，$(N_\gamma = 3) \Leftarrow (\gamma$ が単純$)$ であることをそれぞれ個別に示した．

$(\Rightarrow)$ の場合は，$N_\gamma = 3$ であるとした上で $\gamma(a) = \gamma(b)$ となるような異なる a, b が存在すると仮定する．この時に補題 4.2，補題 4.6 及び補題 4.7 を用いて $T(\gamma) > \pi$ となることを示す事ができ，矛盾を導くことができる．

$(\Leftarrow)$ の場合は，ある区間に特異点が一定数以上あると仮定する．この時 γ が単純閉曲線であると，特異点の位置に関して矛盾を導くことができる．これにより特異点の数を限定することができ，最終的に 3 個しか存在しないことを示すことができる．



3 個のカスプをもつ閉波面



5 個のカスプをもつ閉波面

5　今後の方針

本研究では，余向き付け不可能な閉波面に対して Fenchel 型定理を示した．とくに，全曲率の最小性，特異点の個数の評価と単純性との関係を明らかにした (定理 3.3, 4.8)．これまでの波面としての閉曲線の先行研究では余向き付け可能な場合のものが多かったが，本研究を通じて余向き付け不可能な閉波面の重要性が明らかになった．Fenchel の定理の一般化として Chern-Lashof の定理が知られている [5, 6]．したがって，フロンタルや波面に対する Chern-Lashof 型定理というものが考えられる．この場合でも余向き付け不可能ならば，全曲率が非自明な下限を持つのではないかと予想する．しかし，最初から一般次元のフロンタルや波面に対してそれを求めるのは困難であると思われるので，$\boldsymbol{R}^3$ 内の余向き付け不可能な 2 次元波面に対してから始めるのが現在の直近の目標である．また，もし全曲率が非自明な下限を持つならば，最小全曲率を持つことの必要十分条件に定義域となる多様体の位相的な性質が関連するのではないかと考えている．並行して最小全曲率を持つ閉曲面の具体的な例も探してみたい．

参考文献

[1] H. Alencar, W. Santos and G. Silva Neto, *Differential geometry of plane curves*, Student Mathematical Library 96. Providence, RI: American Mathematical Society. xv, 416 p. (2022).

[2] A.A. Borisenko and K. Tenenblat, *On the total curvature of curves in a Minkowski space*, Isr. J. Math. **191** (2012), 755–769.

[3] M. Borsuk, *Sur la courbure totale des courbes fermées*, Ann. Soc. Pol. Math. **20** (1948), 251–265.

[4] F. Brickell and C.C. Hsiung, *The total absolute curvature of closed curves in Riemannian manifolds*, J. Differ. Geom. **9** (1974), 177–193.

[5] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds I*, Amer. I. Math. **79**(1957), 306-318.

[6] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds II*, Michigan Math.J. **5**(1958), 5-12.

[7] K. Enomoto, J. Itoh and R. Sinclair, *The total absolute curvature of open curves in* E^3, Ill. J. Math. **52** (2008), 47–76.

[8] I. Fáry, *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud*, Bull. Soc. Math. Fr. **77** (1949), 128–138.

[9] W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Ann. **101** (1929), 238–252.

[10] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104**(2013), 297-307.

[11] A. Honda, C. Tanaka and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, in preparation.

[12] J. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 248–257.

[13] H. Rutishauser and H. Samelson, *Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée*, C. R. Acad. Sci., Paris **227** (1948), 755–757.

[14] A. Sama-Ae and A. Phon-on, *Total curvature and some characterizations of closed curves in* $\mathrm{CAT}(k)$ *spaces*, Geom. Dedicata **199** (2019), 281–290.

[15] E. Teufel, *On the total absolute curvature of closed curves in spheres*, Manuscr. Math. **57** (1986), 101–108.

[16] E. Teufel, *The isoperimetric inequality and the total absolute curvature of closed curves in spheres*, Manuscr. Math. **75** (1992), 43–48.

[17] Y. Tsukamoto, *On the total absolute curvature of closed curves in manifolds of negative curvature*, Math. Ann. **210** (1974), 313–319.