アフィン部分空間から定まるトーリック多様体のトーラス同変埋め込みについて

東京都立大学 大学院理学研究科 数理科学専攻
山口健太朗 (Kentaro YAMAGUCHI) *

概要

コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体は，n 次元トーラスの Hamilton 作用による運動量写像の像として定まる Delzant 多面体とよばれる凸多面体によって完全に分類されることがわかっている．また，シンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間は複素 n 次元トーラスと同一視できることがわかっている．ここでは，この複素 n 次元トーラスの複素部分トーラスをコンパクト化して得られる部分多様体の，運動量写像による像に関する研究を紹介する．

1 導入

滑らかな多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が非退化な閉形式になっているとき，組 (M, ω) をシンプレクティック多様体とよび，ω をシンプレクティック形式とよぶ．シンプレクティック多様体を調べるために使われる道具の 1 つとして，シンプレクティック多様体への Lie 群の Hamilton 作用による運動量写像がある．本節では，Hamilton 作用をする Lie 群をトーラスに限った状況での運動量写像とその基本的な性質について述べる．その後，シンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用による運動量写像について説明する．

1.1 トーラスの Hamilton 作用と運動量写像

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする．トーラス T の (M, ω) への右からの作用を

$$\begin{aligned} M \times T &\to M \\ (x, t) &\mapsto x \cdot t \end{aligned}$$

と書くことにする．このとき，T の元 t に対して写像 $R_t : M \to M$ を $R_t(x) = x \cdot t$ と定める．また，T の Lie 環を $\mathfrak{t}$ と書く．

定義 1.1. トーラス T がシンプレクティック多様体 (M, ω) へ右から作用しているとする．すべての $t \in T$ に対して $R_t^* \omega = \omega$ が成り立つとき，T の作用は ω を保つという．

* E-mail:yamaguchi-kentaro@ed.tmu.ac.jp

定義 1.2. トーラス T のシンプレクティック多様体 (M,ω) への右からの作用が ω を保つとする．以下の条件を満たす写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ が存在するとき，T の作用を Hamilton 作用という．

- 任意の $x \in M$，$t \in T$ に対して $\mu(x \cdot t) = \mu(x)$，
- 任意の $X \in \mathfrak{t}$ に対して $\iota(X^\sharp)\omega = -d\langle \mu, X\rangle$．ここで，$X^\sharp$ は基本ベクトル場のこと．

また，このときの写像 μ のことを T の Hamilton 作用による運動量写像とよぶ．

トーラスの Hamilton 作用による運動量写像の一般論から，運動量写像の像はトーラスの Hamilton 作用の固定点の像の凸包に一致することがわかる．

トーラス T がシンプレクティック多様体 (M,ω) へ Hamilton 作用しているとする．T' を T の部分トーラスとし，$\mathfrak{t}'$ を T' の Lie 環とする．包含写像 $i : T' \to T$ は群準同型写像であることに注意すると，次の事実がわかる．

命題 1.3. トーラス T のシンプレクティック多様体 (M,ω) への Hamilton 作用による運動量写像を $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ とする．このとき，トーラス T' の (M,ω) への右からの作用を

$$\begin{aligned} M \times T' &\to M \\ (x, t') &\mapsto x \cdot i(t') \end{aligned}$$

と定めると，T' の (M,ω) への作用は ω を保ち，写像 $i^* \circ \mu : M \to (\mathfrak{t}')^*$ は T' の (M,ω) への作用による運動量写像となる．すなわち，上で定めた T' の (M,ω) への作用は Hamilton 作用である．

トーラスの Hamilton 作用を含めた Lie 群の Hamilton 作用についての詳細はたとえば [Can01] や [赤 23] を参照のこと．

1.2　シンプレクティックトーリック多様体

n 次元トーラス T が効果的に作用している $2n$ 次元シンプレクティック多様体のことをトーリック多様体とよぶ．コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用に付随する運動量写像の像は Delzant 多面体とよばれる凸多面体になる．ここで，Delzant 多面体とは次で定義されるもののことである．

定義 1.4. 次の 3 つの条件を満たす $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{t}^*$ の凸多面体 Δ を Delzant 多面体という．

- 単純であること．つまり，Δ の各頂点から n 本の辺が出ていること，
- 有理的であること．つまり，頂点 σ から出ている n 本の辺の方向ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ が $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ を満たすこと，
- 滑らかであること．つまり，上の条件にある $v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底になっていること．

たとえば，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に Fubini–Study 計量を入れた場合の n 次元トーラスの Hamilton 作用に付随する運動量写像の像は標準 n 単体になる．

次の定理はコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体を調べる上での出発点である．

定理 1.5 ([Del88])**.** コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体は Delzant 多面体で完全に

分類される．

シンプレクティック商を使うことで，Delzant 多面体の情報からシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる．この構成は Delzant 構成とよばれる．

Guillemin [Gui94a] によりシンプレクティックトーリック多様体には対応する Delzant 多面体の情報から定まる Kähler 構造が存在することがわかっている．さらに，この Kähler 構造を用いると $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間は複素 n 次元トーラスと同一視することができる．ここでは，複素 n 次元トーラスから $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体を構成することをコンパクト化とよぶことにする．

シンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用と Delzant 構成についての詳細はたとえば [Gui94b] を参照のこと．

2 トーラス同変埋め込みの運動量写像

本節では，[Yam] で考察したコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体 X の中の複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ について説明する．

2.1 複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ の構成

n 次元トーラスの Lie 環 $\mathrm{Lie}(T^n) = \mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ の k 次元アフィン部分空間 $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{p_1, \ldots, p_k\} + a$ とする．ここで，$p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}^n$ は V の線形部分の原始的な基底，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．

線形部分の原始的な基底 $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}^n$ に対して，V の直交補空間の直交基底 $q_{k+1}, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}^n$ をとる．トーリック多様体 X のトーリック因子 D の補空間 $X \setminus D \cong (\mathbb{C}^*)^n$ の中の複素 k 次元部分トーラス $C(V) \cong (\mathbb{C}^*)^k$ を次で定める．

$$C(V) = \left\{ (e^{w_1}, \ldots, e^{w_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n \;\middle|\; {}^t[q_{k+1} \cdots q_n] \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} - a \right) = 0 \right\}.$$

この部分トーラス $C(V)$ の (Zariski) 閉包をとることで，トーリック多様体 X にコンパクト化したものを $\overline{C(V)}$ と定める．

部分トーラス $C(V)$ の (Zariski) 閉包 $\overline{C(V)}$ が X の複素 k 次元部分多様体になるかどうかはアフィン部分空間 V によって決まる．

2.2 複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ へのトーラス作用による運動量写像

ここからは，2.1 節で構成した複素部分トーラス $C(V)$ のコンパクト化 $\overline{C(V)}$ がトーリック多様体 X の複素 k 次元部分多様体になっていることを仮定する．

トーリック多様体 X に自然に備わっている n 次元トーラス T^n の Hamilton 作用による運動量写像を $\mu : X \to (\mathfrak{t}^n)^*$ とする．アフィン部分空間 V の情報から，k 次元トーラス T^k と n 次元トーラ

ス T^n との間に単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ を

$$i_V(t_1,\ldots,t_k) = \left(\prod_{i=1}^{k} t_i^{\langle p_i, e_1\rangle}, \ldots, \prod_{i=1}^{k} t_i^{\langle p_i, e_n\rangle}\right)$$

と定めることができる．

単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ を用いると，命題 1.3 より X への T^k の Hamilton 作用が定まり，その Hamilton 作用による運動量写像は $i_V^* \circ \mu : X \to (\mathfrak{t}^k)^*$ であることがわかる．

また，X への T^n 作用と単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ により $\overline{C(V)}$ には T^k の Hamilton 作用が定まり，その Hamilton 作用による運動量写像 $\overline{\mu} : \overline{C(V)} \to (\mathfrak{t}^k)^*$ は $\overline{\mu} = i_V^* \circ \mu \circ i$ である．ここで，$i : \overline{C(V)} \to X$ は部分多様体からの自然な埋め込みのことである．

以上の構成より以下の図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ \mu\ } & (\mathfrak{t}^n)^* \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle i_V^*} \\ \overline{C(V)} & \xrightarrow{\ \overline{\mu}\ } & (\mathfrak{t}^k)^*. \end{array}$$

このとき，X への T^k 作用の固定点と $\overline{C(V)}$ への T^k 作用の固定点を比べることで次の主結果を得た．

定理 2.1 ([Yam])**.** $\mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間 V から定まる $\overline{C(V)}$ がトーリック多様体 X の複素部分多様体になることを仮定する．このとき，

$$\overline{\mu}(\overline{C(V)}) = (i_V^* \circ \mu)(X)$$

が成り立つ．

3 $\mathbb{C}P^2$ の中のトーラス同変埋め込みの例

2 次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ に対応する Delzant 多面体（標準 2 単体，つまり直角二等辺三角形）の中での部分多様体 $\overline{C(V)}$ の運動量写像 $\mu : \mathbb{C}P^2 \to (\mathfrak{t}^2)^*$ による像の様子を図示する．

図 1 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1 の部分空間のときの様子であり，図 2 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1 の部分空間を $a = (0, \log 2)$ に並行移動させたもののときの様子である．

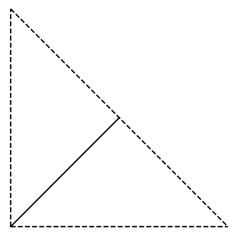

図 1　傾き 1 のとき

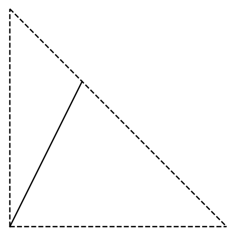

図 2　傾き 1，$a = (0, \log 2)$ のとき

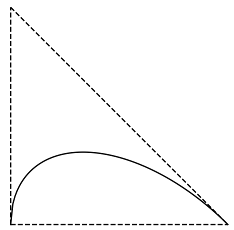

図 3　傾き 1/2 のとき

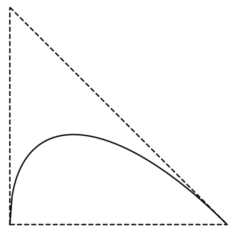

図 4　傾き 1/2，$a = (-\log 2, 0)$ のとき

図 3 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1/2 の部分空間のときの様子であり，図 4 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1/2 の部分空間を $a = (-\log 2, 0)$ に並行移動させたもののときの様子である．

ここで紹介していない例については，[Yam] を参照のこと．

参考文献

[Can01] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764. Berlin: Springer, 2001.

[Del88] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.

[Gui94a] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994.

[Gui94b] Victor Guillemin. *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, volume 122 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[Yam] Kentaro Yamaguchi. Torus-equivalently embedded toric manifolds associated to affine subspaces. preprint.

[赤 23] 赤穂まなぶ. シンプレクティック多様体の基礎, 2023.