ある楕円曲面に任意の種数 1 の fibered knot について knot 手術を施した多様体が 1-ハンドルを持たないことの証明

岡山大学大学院　環境生命自然科学研究科　数理物理科学専攻
藪口　怜央 (Reo YABUGUCHI) *

概要

1-ハンドルのないハンドル分解を持つ 4 次元閉多様体は単連結であることは広く知られている。一方で、R.Kirby 氏の未解決問題集に「任意の単連結 4 次元閉多様体は 1-ハンドルを持つか」という問題があり、様々な多様体についてこの問題が取り組まれている。本論文では、$E(n)_K$ が許容する Lefschetz fibration の構造から得られるカービー図式に対してカービー計算を行うという手法で「種数 1 の fibered knot K に対して $E(1)_K$ という多様体が 1-ハンドルを持たない」ことを示した。

1　導入

1.1　カービー計算

任意のコンパクト $C^\infty 4$ 次元多様体は、4 次元球体 D^4 に微分同相な k-ハンドルと呼ばれる多様体によって分解されることが知られている ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)。各 k によって接着の仕方が異なり、$k = 0, 1, 2, 3, 4$-ハンドルを 0 から順番に接着写像といわれる微分同相写像で貼り付けている。また、コンパクトで連結な多様体は 0-ハンドルの個数が 1 つであることが分かっており、0-ハンドルに、$1, 2$-ハンドルを順に接着したものを Y_2 としておく。与えられたコンパクト $C^\infty 4$ 次元多様体 Y が閉多様体であったとき、Y_2 によって Y の微分同相類が完全に決定されるなどの事実がある。そのような事実から、特別な多様体を扱わない限りハンドル分解における重要な情報は、$1, 2$-ハンドルがその多くを占めていることが分かっている。

ハンドル分解を表した図式をカービー図式といい、1-ハンドルを 3 次元球体対（または、点付き円)、2-ハンドルを枠付き絡み目（または、2 重螺旋絡み目）で表す。また、微分同相類を保ってその図式を変形する操作をカービー計算という。

本論文では、$\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた結び目や絡み目の $\mathbb{R}^2$ への射影上の 1 点 p における交差 $\sigma(p)$ の正負を図 1 のように定める。また、任意の $n \in \mathbb{Z}$ について n 回ツイストを図 4 のように箱の中に n と書き略記することがある。本論文では、以下の図でツイストの記法を定めておく。

定理 1.1. [GS](ハンドルスライド)

* E-mail:reo0713@s.okayama-u.ac.jp

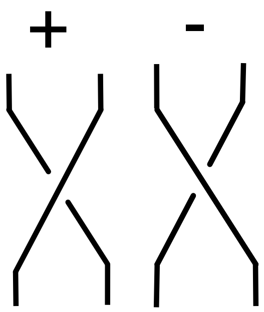

図 1: 交差の正負

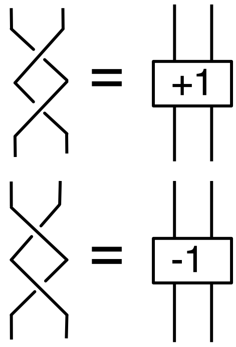

図 2: ツイストの記法 1

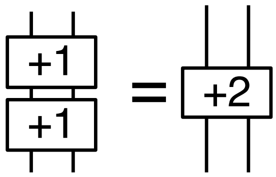

図 3: ツイストの記法 2

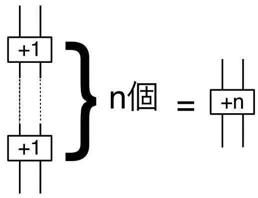

図 4: ツイストの記法 3

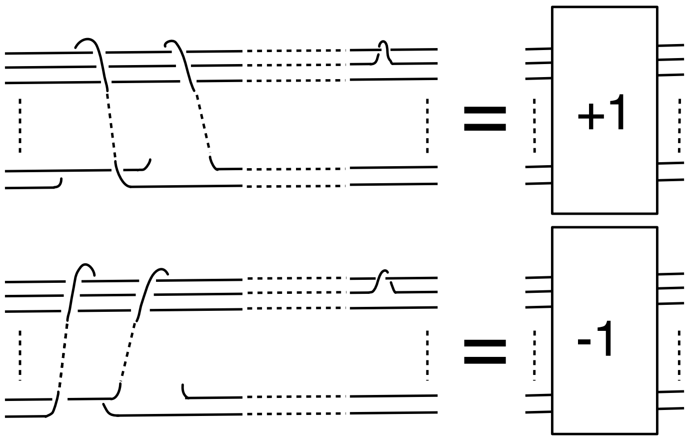

図 5: ツイストの記法 4

整数 m_i に対し、$K_i^{m_i}$ を枠 m_i の 2-ハンドルとする $(i=1,2)$。即ち、$\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた枠付き結び目である。図 6 のように $K_1^{m_1}$ を変形する操作を $K_1^{m_1}$ の $K_2^{m_2}$ へのハンドルスライドという。ハンドルスライドは、ハンドルスライド前後の図式が表す多様体の微分同相類を保つ。$K_1^{m_1}$ のハンドルスライドを行った後の枠を m_1' とし、スライドしたものを $K_1^{m_1'}$ とかく。枠 m_1' は linking number を $lk(K_1,K_2) := \sum\limits_{p\in K_1\cap K_2} \frac{\sigma(p)}{2}$ で定めるとき、$m_1' := m_1 + m_2 + 2lk(K_1,K_2)$ と計算する。

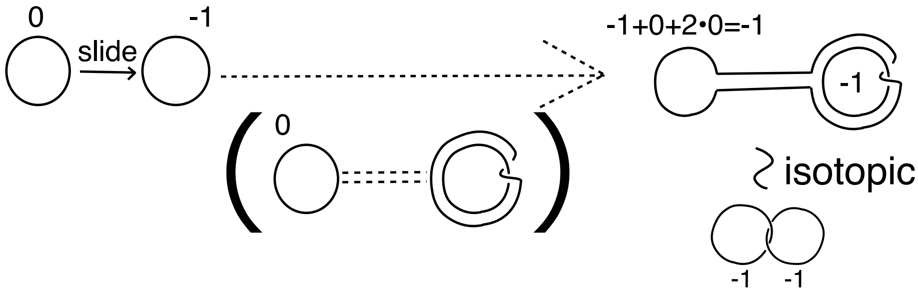

図 6: 2-ハンドル K_1^0 を K_2^{-1} へスライドする操作の例

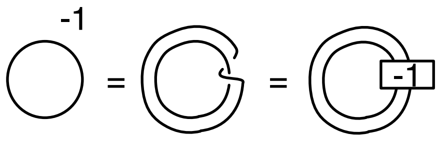

図 7: 枠付き結び目の異なる記法の例

注 1.2. [GS](2 重螺旋絡み目記法) カービー図式では 2-ハンドルを枠付き結び目で記述すると述べたが、図 7 のように枠を記さずに 2 つの結び目が枠の数に依存する回数絡んだ絡み目として記す方法もある。一般的には、図式の簡略化のため枠付き結び目で 2-ハンドルを表す。ハンドルスライドの図式の変形中に、絡んでいる方の結び目にスライドする方の結び目から橋を渡すような（band sum という）操作を行うためこの記法もしばしば現れる。

定理 1.3. [GS](ハンドルキャンセル)

4 次元多様体のカービー図式が、2-ハンドルと 1-ハンドルが図 8 ように 1 回だけ交わっている部分を持つとき、任意の枠に対してカービー図式から該当の 1-,2-ハンドルだけを消去できる。
この操作をハンドルキャンセルといい、ハンドルキャンセル前後の図式が表す多様体の微分同相類を保つ。

図 8: ハンドルキャンセル可能な状況の例

定理 1.4. [GS]

カービー図式において、図式同士が結び目及び絡み目の連続変形で移り合うとき isotopic であるといい、isotopic な 2 つのカービー図式はの同じ微分同相類を持つ。また、図 9 のような変形も連続変形として許し、図式は isotopic である。

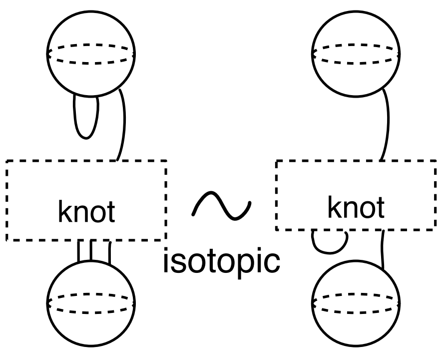

図 9: 1-ハンドルを通る 2-ハンドルの isotopic な図式の例

1.2 Lefschetz fibration

以下で Lefshetz fibration の定義とモノドロミー因数分解及びカービー図式の関係について紹介する。

定義 1.5. [GS](Lefshetz fibration)
M^4 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 4$ 次元多様体、B^2 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 2$ 次元多様体、$f\colon M^4 \to B^2$ を全射 C^∞ 写像とするとき、f が B^2 上の種数 g の Lefschetz fibration であるとは次の条件を満たすことである。

1. $\partial M^4 = f^{-1}(\partial B^2)$
2. $b_1, b_2, \ldots, b_n (\in Int(B^2))$ を f の臨界値 (ただし、n は有限) とし、f の臨界点 $p_i (\in f^{-1}(b_i))$ が条件 (a),(b) を満たして一意存在する ($i = 1, 2, \ldots, n$)。
   (a) $f|_{f^{-1}(B^2 - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\})}$ が種数 g の閉曲面 Σ_g に微分同相なものをファイバーにもつファイバー束である。
   (b) $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ を満たす p_i と b_i の周りの向きを保つ複素局所座標が存在する。
3. M^4 に埋め込まれた自己交差数 (-1) の球面をどの $f^{-1}(b_i)$ も含まない。

$b_0 \in Int(B^2) - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ に対して $f^{-1}(b_0)$ を正則ファイバー、$f^{-1}(b_i)$ を特異ファイバーという。
この特異ファイバーは、閉曲面 Σ_g に微分同相な正則ファイバー上の単純閉曲線が 1 点に潰すことで得られ、この潰れる単純閉曲線のことを消滅サイクルという。

1.3 写像類群

定義 1.6. 集合 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g) = \{\varphi\colon \Sigma_g \to \Sigma_g \mid \varphi$ は向きを保つ微分同相写像 $\}$ は、写像の合成を積として群となる。φ_0 と φ_1 が isotopic であるとは、連続写像 $\Phi\colon \Sigma_g \times [0,1] \to \Sigma_g$ が存在して $\varphi_t := \Phi(\cdot, t)\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ が $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ の元となる時である。また、記号で $\varphi_0 \sim \varphi_1$ と書く。この時、$\sim$ は同値関係である。

定義 1.7. 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g とは $\Gamma_g = \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\sim$ である。
$[f], [g] \in \Gamma_g$ に対して、$[f]\cdot[g] = [f \circ g]$ を積として Γ_g は群となる。

定義 1.8. 図 10 の写像の isotopy 類は種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g の元であり、τ_c と書き Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿ったデーンツイストという。

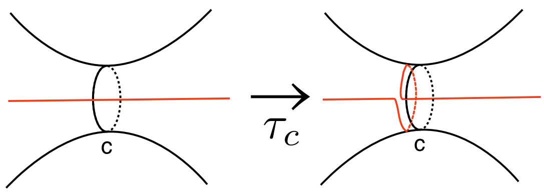

図 10: 単純閉曲線 c についてのデーンツイスト

定義 1.9. 全射 C^∞ 写像 $f\colon M^4 \to S^2$ を m 個の特異ファイバーを持つ S^2 上の種数 g の Lefschetz fibration とする。この Lefschetz fibration に対して定まる $id \in \Gamma_g$ の因数分解 $\tau_{c_1}\tau_{c_2}\ldots\tau_{c_m} = id$ をモノドロミー因数分解という。

事実 1.10. モノドロミー因数分解は Σ_2 上の単純閉曲線に沿ったデーンツイストの積で与えられる。モノドロミー因数分解に現れる単純閉曲線が Lefschetz fibration の特異ファイバーを特徴づけており、Lefschetz fibration の全空間のカービー図式を書くことができる。特に、デーンツイストの積の個数が特異ファイバーの本数に一致している。

2 証明のあらすじ

2.1 種数 1 の fibered knot について knot 手術を施した楕円曲面が 1-ハンドルを持たないことの証明

2.1.1 K_0 が三葉結び目の場合

$E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式は以下の Kirby 図式を含んでおり、ハンドルスライドを用いて 1-ハンドルを消去する。ここで、赤、黄緑、水色、青の 2-ハンドルをそれぞれ K_A, K_B, K_C, K_D と名付けておく。

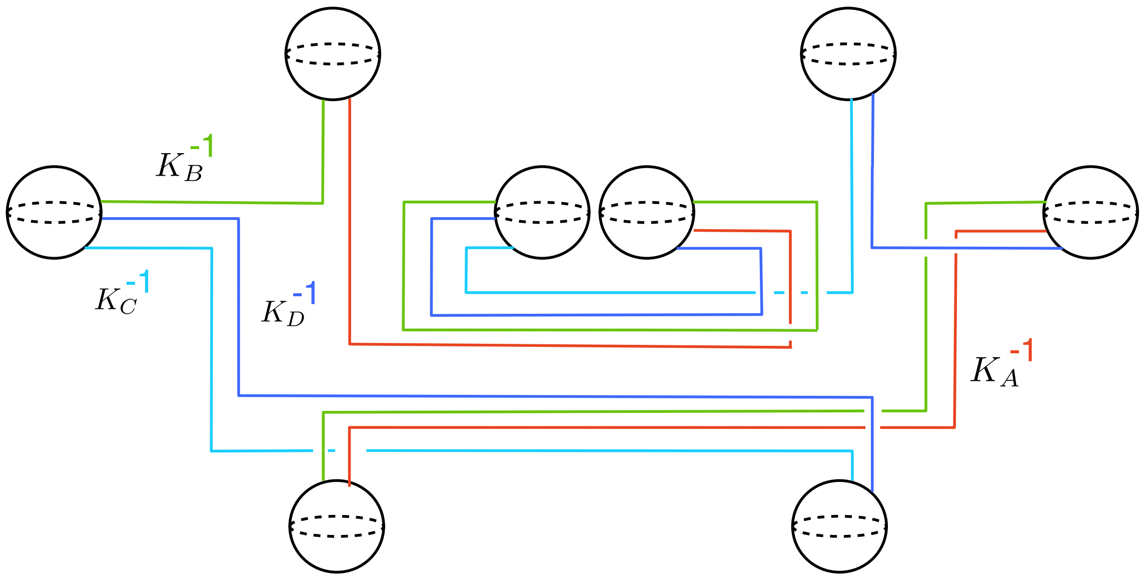

図 11: K_0 が三葉結び目の場合の $E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式が含む図式

2.1.2 K_1 が 8 の字結び目の場合

$E(1)_{K_1}$ の Kirby 図式は以下の Kirby 図式を含んでおり、ハンドルスライドを用いて 1-ハンドルを消去する。ここで、赤、黄緑、水色、青の 2-ハンドルをそれぞれ K'_A, K'_B, K'_C, K'_D と名付けておく。

ハンドルスライドとハンドルキャンセルの定理より、1-ハンドルのない $E(1)_{K_0}, E(1)_{K_1}$ のカービー図式が得られる。

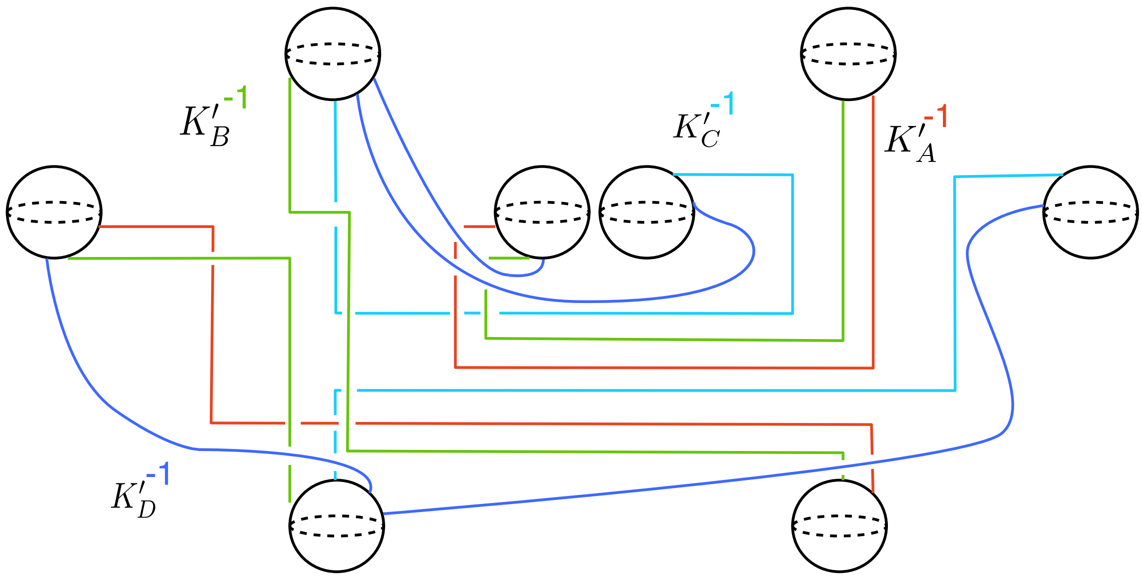

図 12: K_0 が三葉結び目の場合の $E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式が含む図式

3　主定理

以下、K_0 を三葉結び目、K_1 を 8 の字結び目とし、$E(1)$ を $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ に微分同相な楕円曲面とする。このとき、$E(1)$ を結び目 K に沿って knot 手術した多様体を $E(1)_K$ と書く。

定理 3.1. (2024,Y)
$E(1)_{K_0}, E(1)_{K_1}$ は Lefschetz fibration の構造を許容し、1-ハンドルを持たないハンドル分解を許容する。

注 3.2. 本研究の主結果の一部に関しては、S.Akublut 氏が $E(1)_{K_0}$ と $E(1)_{2,3}$ が同一視されるという方法で 1-ハンドルを持たないことを既に証明している [A12]。

参考文献

[A12] S.Akublut, The Dolgachev Surface, arXiv:0805.1524.

[BZ67] G.Burde, H.Zieschang, González-Acũna, Neuwirthsche knoten und Flächenabbildungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 31 (1967), 239-246.

[FS98] R.Fintushel, R.Stern, Knots, links, and 4-manifolds, Invent. Math. 134 (1998), 363-400

[FS04] R.Fintushel, R.Stern, Families of simply connected 4-manifolds with the same Seiberg-Witten invariants, Topology 43 (2004), no.6, 1449-1467.

[GS] R.E.Gompf, A.I.Stipsitz, 4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society (1999)

[G70] F.González-Acũna, Dehn's constraction on knots, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 15 (1970), 58-77.

[M96] Y.Matsumoto, Lefschetz Fibrations of Genus Two - A Topological Approach, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publishing, River Edge, NJ,(1996)

[Y08] K.-H.Yun, Twisted Fiber Sums of Fintushel-Stern's Knot Surgery 4-Manifolds, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.360, no.11 (2008), 5853-5868