Perturbation theory for nonlinear Schrödinger equation with exponential nonlinearity

津田塾大学大学院　理学研究科　数学専攻
渡邉 南 (Minami WATANABE) *

概要

本講演では，非線形項が指数関数型の非線形シュレディンガー方程式 (NLS) を扱う．(NLS) は方程式の非線形性より分散性が支配的な場合，散乱解と呼ばれる解が存在する．その解析をする際，一般的には小さな解を考え，それを孤立波成分と分散波成分に分解し時間が経過するほど孤立波成分は固定孤立波に収束し分散成分が線形解に強く収束することを示す必要がある．発表ではその証明のために用いる摂動理論について発表する．

1　導入

本講演では次の非線形シュレディンガー方程式について考察する．

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+f(\psi)=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \tag{NLS}$$

nls

ただし，$i=\sqrt{-1}$ で $\Delta=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンであり，$f(\psi)=(e^{4\pi|\psi|^2}-1)\psi$ である．さらに (NLS) の質量 $\mathcal{M}(\psi)$ とエネルギー $\mathcal{E}(\psi)$ を次で導入する．

$$\mathcal{M}(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2,\quad \mathcal{E}(\psi)=\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\pi|\psi|^2}-1-4\pi|\psi|^2)dx.$$

任意の $\psi_0\in H^1(\mathbb{R}^2)$ に対して，ある時間 $T_{\max},T_{\min}>0$ と，$\psi|_{t=0}=\psi_0$ を満たす (NLS) の解 $u\in C((-T_{\min},T_{\max}),H^1(\mathbb{R}^2))$ が存在して，質量とエネルギーに対して保存則が成り立つ．つまり

$$\mathcal{M}(\psi(t))=\mathcal{M}(\psi_0),\quad \mathcal{E}(\psi(t))=\mathcal{E}(\psi_0)\quad \text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}).$$

例えば，Cazenave and Weissler [2] を参照．さらに，(NLS) の解 $\psi(t,x)$ は $|x|^2\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^2)$ であるとき，次のビリアル恒等式を満たす．

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2|\psi(t,x)|^2dx=8\mathcal{K}(\psi(t))\quad\text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}).$$

ただし

$$\mathcal{K}(\psi)=\|\nabla\psi\|_{L^2}^2-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(4\pi|\psi|^2e^{4\pi|\psi|^2}-e^{4\pi|\psi|^2}+1)dx.$$

ここで，解の挙動について説明する．解の分類は，(NLS) の波の分散性と非線形性の競合によって以下のように決定される．

* E-mail:m18mwata@gm.tsuda.ac.jp

(i). 分散性 $>$ 非線形性：波の振幅が時間減衰する

$\Longrightarrow$ 散乱解：ある $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - e^{it\Delta}\psi\|_{H^1} = 0$$

を満たす.

(ii). 分散性 $<$ 非線形性： 解に特異性が生じる

$\Longrightarrow$ 爆発解：解の最大存在時間が有界

(iii). 分散性 $=$ 非線形性：波の振幅が一定の空間形状を保持する

$\Longrightarrow$ 定在波解：$\psi(t) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ の形をした解

以下で, 特に (NLS) の爆発解をどのように構成するかを簡単に説明する．(NLS) の解 $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2, |x|^2dx)$ が

$$\mathcal{K}(\psi(t)) < -C_1, \quad t \geq 0$$

を満たすとする．このとき，ビリアル恒等式より，

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2|\psi(t,x)|^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2|\psi_0(x)|^2dx + 2t\Im\int_{\mathbb{R}^2} x\cdot\nabla\psi_0(x)\psi_0 x dx - \frac{C_1}{2}t^2$$

上の式から $t > 0$ が十分大きいとき右辺の多項式は負となるが，一方で右辺は正である．従って，解が爆発することがわかる.

(NLS) に対して定在波解 $\psi(t,x) = \mathrm{e}^{i\omega t}u(x)(\omega > 0)$ を考えると、u は次の非線形楕円型方程式を満たす.

$$-\Delta u + \omega u - (e^{4\pi|u|^2} - 1)u = 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\} \tag{SP}$$ sp

与えられた $\omega > 0$ に対して，(SP) の作用汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を次で定義する.

$$\mathcal{S}_\omega(u) := \omega\mathcal{M}(u) + \mathcal{E}(u).$$

$\mathcal{S}'_\omega(Q_\omega) = 0$ であることと，$Q_\omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$ が (SP) の弱解であることは同値である．また，基底状態とは，(SP) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にするものである.

ここで，質量臨界とエネルギー臨界について説明する．以下の単純冪の非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$$

この方程式の解を u とし，$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x)(\lambda > 0)$ とおくと，u_λ も解となる．質量臨界 $p = 1 + \frac{4}{d}$ とは，$\mathcal{M}(u_\lambda) = \mathcal{M}(u)$ を満たし，エネルギー臨界 $p = 1 + \frac{4}{d-2}$ とは，$\mathcal{E}(u_\lambda) = \mathcal{E}(u)$ を満たす指数である．本研究で扱う (NLS)の非線形項は空間変数 $d = 2$ における質量臨界とエネルギー臨界にあたる.

本研究の最終目的は，空間変数 2 次元における質量臨界項とエネルギー臨界項にあたる指数関数項を持つシュレディンガー方程式 (NLS) の解の大域挙動を解析することである．指数関数項を扱った挙動の研究は，たとえば Dinh–Keraani–Majdoub[3] でも，解の挙動について調べており，質量臨界が含まれていない場合については Arora–Dodson–Murphy[1] の手法を用いて解の散乱に関する結果が得られている.

解の大域挙動を調べるためには，解の形状の変化の様子を調べる必要がある．そのため解の分散性の振る舞いを表すビリアル恒等式によって基底状態を特徴付ける必要がある．つまり，基底状態の存在を次の最小化問題を考えることにより示すことが必要である．

$$m_\omega := \inf\{\mathcal{S}_\omega(u)\colon u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\},\ \mathcal{K}(u) = 0\}$$

本研究では，指数関数項を持つ楕円型方程式の基底状態について、上の最小化問題の考察を行い，ビリアル恒等式による特徴付けをした．さらに，得られた基底状態について，基底状態より大きいエネルギーに関するポテンシャル井戸を定義し，それが時間に関して不変集合になることを示した．そして，その集合から出発する解が散乱することを示すために，解の摂動理論について証明した．

2　主定理

最初に，基底状態の存在について以下の定理が得られている：

Theorem 2.1. 任意の $\omega > 0$ に対して，m_ω の最小元が存在する．さらに，m_ω の最小元は (SP) の基底状態である．

さらに、得られた基底状態に対してポテンシャル井戸を次のように定義する．

$$\mathcal{A}_{\omega,+} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2)\colon \mathcal{S}_\omega(u) < m_\omega,\ \mathcal{K}(u) > 0\}$$

$\mathcal{A}_{\omega,+}$ は (NLS) の時間に関する不変集合であることが分かった．

ここで主定理を述べるために，以下のようにノルムを定義する：

$$\|u\|_{S(I)} := \sup_{\text{(q,r):admissible}} \|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^q L_x^r(I\times\mathbb{R}^2)}$$
$$\|u\|_{N(I)} := \sup_{\text{(q',r'):dual admissible}} \|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(I\times\mathbb{R}^2)}$$

以下の結果が得られた．

Theorem 2.2 (Short time perturbation)**.** $I \in \mathbb{R}$ をコンパクトな区間とし，$\tilde{v}$ を次を満たす (NLS) の近似解とする：ある関数 e が存在して，

$$i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \Delta\tilde{v} + (e^{4\pi|\tilde{v}|^2} - 1)\tilde{v} = e \tag{2.1}$$

さらに，以下の条件を満たす：十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ があって

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\le \varepsilon_0, \\ \|\mathrm{e}^{i(t-t_0)\Delta}(v(t_0) - \tilde{v}(t_0))\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\le \varepsilon, \\ \|e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

ただし，$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$．また，$0 < \delta_0 < 1$ に対して

$$\|v\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)}, \quad \|\tilde{v}\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)} \le 1 - \delta_0$$

とする．このとき，$v|_{t=t_0} = v(t_0)$ を初期値とする (NLS)の解 v は以下を満たす：

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\le 3\varepsilon, \\ \|v\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\le 4\varepsilon_0, \\ \|(i\partial_t + \Delta)(v - \tilde{v}) + e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

また，上の定理を用いると，次の結果が得られた：

Theorem 2.3 (Long time perturbation)**.** $I \in \mathbb{R}$ を区間とし，$\tilde{v}$ を次を満たす (NLS)の近似解とする：ある関数 e が存在して，

$$i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \Delta \tilde{v} + (e^{4\pi|\tilde{v}|^2} - 1)\tilde{v} = e \tag{2.2}$$

さらに，以下の条件を満たす：ある定数 $L > 0$ と，*Theorem 2.2* の $\varepsilon_0 > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\leq L \\ \|\mathrm{e}^{i(t-t_0)\Delta}(v(t_0) - \tilde{v}(t_0))\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\leq \varepsilon, \\ \|e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ただし，$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$．また，$0 < \delta_0 < 1$ に対して

$$\|v\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)}, \quad \|\tilde{v}\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)} \leq 1 - \delta_0$$

とする．このとき，$v|_{t=t_0} = v(t_0)$ を初期値とする (NLS)の解 v は以下を満たす：

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\leq C(\varepsilon_0)\varepsilon, \\ \|v\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\leq C(\varepsilon_0), \end{aligned}$$

参考文献

ADM [1] A. K. Arora, B. Dodson and J. Murphy, *Scattering blow the ground state for the 2D radial nonlinear Schrödinger equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), 1653–1663.

CW [2] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in Hs.* Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

DKM [3] V. D. Dinh, S. Keraani and M. Majdoub, *Long time dynamics for the focusing nonlinear Schrödinger equation with exponential nonlinearities.* Dynamics of PDF, Vol. **17**, No. **4** (2020), 329–360