A generalization of the Center Theorem of the Thurston-Wolpert-Goldman Lie algebra

和久田 葵 (Aoi WAKUDA)

東京大学大学院数理科学研究科 修士 2 年

1. 導入

本稿では, K は $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ を含む可換環とし, S は定曲率 -1 の完備リーマン計量が入る向き付けられた連結な実 2 次元多様体で, パンツと同相でないものとする.

1986 年に Goldman は, 向き付け可能曲面上の有向閉曲線の自由ホモトピー類で生成されるベクトル空間が, あるリー括弧積により, リー代数の構造をもつことを発見した [2]. これを Goldman リー代数といい, $K\hat{\pi}$ と表す. また, 無向閉曲線の自由ホモトピー類で生成されるベクトル空間も, 類似のリー括弧積により, リー代数の構造をもつことを発見した. こちらは段階的に発見され, Thurston の地震変形定理, Wolpert の Hamiltonian ベクトル場による計算, Goldman の代数的処理を経て発見された. この 3 名の頭文字をとって,TWG (Thurston-Wolpert-Goldman) リー代数といい, $K\bar{\pi}$ と表す. Goldman リー代数の部分リー代数 A_0 :=(有向閉曲線の自由ホモトピー類 α を用いて, $\alpha+\alpha^{-1}$ の形で生成される空間) は $K\bar{\pi}$ と同型である. Chas-Kabiraj は $K\bar{\pi}$ の中心が, 定値ループの類, 境界成分を周回する曲線の類だけで生成されることを示した [1]. 先に述べた同型により, Chas-Kabiraj の定理は, A_0 の中心の生成元を特定したとも言える. 特に, A_0 の中心は零化イデアル：$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_0)$ と言い換えることができる.

講演者は, A_1 :=(有向閉曲線の自由ホモトピー類 α を用いて, $\alpha-\alpha^{-1}$ の形で生成される空間) を考えることで, Chas-Kabiraj の定理の拡張として $\mathrm{Ann}_{A_i}(A_j)$ $((i,j) = (0,1),(1,0),(1,1))$ を求めた.

2.Goldman リー代数と TWG リー代数

まず, Goldman リー代数の定義を復習をする.

定義. $\hat{\pi}$ を S 上の有向閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合とし, $K\hat{\pi}$ を $\hat{\pi}$ で生成される K 上のベクトル空間とする. $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ に対して, $[\alpha,\beta]_G$ を以下のように定義する

$$[\alpha,\beta]_G \coloneqq \sum_{P\in\alpha\cap\beta} \varepsilon_P(\alpha,\beta)|\alpha_P\beta_P|.$$

ただし, α と β の代表元を一般の位置にとる. これにより, $\alpha\cap\beta$ は有限個の横断的な交点の集合となる.
また, $\varepsilon_P(\alpha,\beta)\in\{\pm1\}$ は P における α と β の局所交点数であり, $|\alpha_P\beta_P|$ は, 積 $\alpha_P\beta_P\in\pi_1(S,P)$ の基点 P を忘れることで得られる自由ホモトピー類である.
これを双線形に $K\hat{\pi}$ 上へ拡張した演算 $[\cdot,\cdot]_G$ を **Goldman 括弧積** という。

定理.(Goldman [2]) $K\hat{\pi}$ は Goldman 括弧積により, リー代数の構造を持つ. これを **Goldman リー代数** という.

次に, $K\hat{\pi}$ の部分空間 A_0 と A_1 を導入する.

定義. ループの向きを反転させる写像 $\hat{\pi}\to\hat{\pi}\,;\,\alpha\mapsto\alpha^{-1}$ を線形に $K\hat{\pi}$ 上に拡張した同型写像 $\iota\colon K\hat{\pi}\to K\hat{\pi}$

を用いて, $K\hat{\pi}$ の部分空間 A_0, A_1 を, 以下で定義する.

$$A_0 \coloneqq (\alpha{+}\iota\alpha\ (\alpha \in \hat{\pi})\ \text{の形の元で生成される空間})$$
$$A_1 \coloneqq (\alpha{-}\iota\alpha\ (\alpha \in \hat{\pi})\ \text{の形の元で生成される空間})$$

ここで, ι はリー代数準同型 (*i.e.* $\iota[\alpha,\beta]_G = [\iota\alpha,\iota\beta]_G$) のため, A_0 は ι の固有値 1 の固有空間であり, A_1 は ι の固有値 -1 の固有空間である. 特に, A_0 は $K\hat{\pi}$ の部分リー代数となる. 一方で, A_1 は $K\hat{\pi}$ の部分リー代数ではないが, A_0 加群となる.

次に, TWG リー代数の定義を復習をする. そのために, S 上の一般の位置にある 2 つの無向閉曲線 x, y とそれらの横断的な交点 P に対して, $(x *_P y)_0, (x *_P y)_\infty$ を導入する. また, 後述するが, TWG リー代数は A_0 とリー代数同型である.

定義. S 上の一般の位置にある 2 つの無向閉曲線 x, y とそれらの横断的な交点 P に対して, 無向閉曲線 $\boldsymbol{(x *_P y)_0}$ を以下のように定義する.

1. (x,y) の P における向きと S の向きが一致するように x, y に向きを与える
2. P において通常のループ積をとる
3. その曲線の向きを捨てる

この操作によって得られる曲線を $(x *_P y)_0$ と定義する. また, 1. を

1'. (x,y) の P における向きと S の向きが異なるように x, y に向きを与える.

に変えて得られる曲線を $\boldsymbol{(x *_P y)_\infty}$ と定義する.

定義. $\widetilde{\pi}$ を S 上の無向閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合とし, $K\widetilde{\pi}$ を $\widetilde{\pi}$ で生成される K 上のベクトル空間とする. $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{\pi}$ について, $[\widetilde{x}, \widetilde{y}]_T$ を以下のように定義する.

$$[\widetilde{x}, \widetilde{y}]_T \coloneqq \sum_{p \in x \cap y} \widetilde{(x *_P y)}_0 - \widetilde{(x *_P y)}_\infty$$

これを双線形に $K\widetilde{\pi}$ 上へ拡張した演算 $[\cdot,\cdot]_T$ を拡張したものを **TWG 括弧積** という.

定理.(Goldman [2]) $K\widetilde{\pi}$ は TWG 括弧積により, リー代数の構造を持つ. これを **TWG リー代数** という.

命題. $\Phi : K\widetilde{\pi} \to A_0\ ;\ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x_i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i{+}\iota x_i$ はリー代数の同型写像である.

Chas-Kabiraj [1] は双曲幾何を用いることで, 次を示した.

定理.(Chas-Kabiraj [1]) $K\widetilde{\pi}$ の中心は定値ループの類, 境界成分を周回する曲線の類だけで生成される.

また, 上の命題から, A_0 の中心の生成元を特定したと言い換えられる.

3.TWG リー代数の中心と双曲幾何

次に, 上の定理 (Chas-Kabiraj [1]) の証明の概略を述べる．証明においては, 双曲幾何のテクニックを利用しており, 講演者の主定理の証明にもこれを用いている．
まず, S の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ における角度を定義する．

定義. S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を固定し, 閉曲線 x, y を相異なる X-測地線, P を x, y の横断的な交点とする．このとき, P における x, y の角度 ϕ_P とは, y から, x まで曲面の向きにしたがって測った角度のこと．

証明のカギとなるの以下の 3 つの命題である．

命題 1.(Chas-Kabiraj [1]) S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を固定し, 閉曲線 x, y, z を相異なる X-測地線とし x は単純であるものとする．このとき, P を x, y の, Q を x, z の横断的な交点としたとき、以下の 2 つが成り立つ．

(1) $(\widetilde{x^m *_P y})_0 = (\widetilde{x^m *_Q z})_\infty$ を満たす自然数 m は高々 1 個である．
(2)「$(\widetilde{x^m *_P y})_0 = (\widetilde{x^m *_Q z})_0$ を満たす自然数 m は高々 1 個である．」または「$\phi_P < \phi_R$ となる x, y の横断的な交点 R が存在する．」

命題 1. の証明の概略は, もし $(\widetilde{x^m *_P y})_0$ が $(\widetilde{x^m *_Q z})_\infty$ や $(\widetilde{x^m *_Q z})_0$ と等しいとすると, それらの自由ホモトピー類は対応する測地線を共有する．ここに双曲余弦定理とデーンツイストを用いることで示される．
命題 1. から次の命題 2. が成り立つ．

命題 2.(Chas-Kabiraj [1]) $\widetilde{x}, \widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k \in \widetilde{\pi}$ はどの 2 つも相異なるものとし, $\widetilde{x}$ が単純閉曲線の代表元をもつものとする．

$$\widetilde{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{y}_j$$

とおいたとき (ただし各 c_j は 0 でないとする), 以下の 2 つのうち少なくとも一方が成り立つ．

(1) 各 j に対して, $i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}_j) = 0$ (ただし, $i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}_j)$ は$\widetilde{x}, \widetilde{y}_j$ の幾何的交点数)
(2) $[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T \neq 0$ となる自然数 m が存在する

命題 2. の証明の概略は, (1), (2) のどちらも成り立たないと仮定すると, S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を 1 つ固定し, $\widetilde{x}, \widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k$ の代表元として測地線をとると, TWG 括弧積の定義から,

$$[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T = m \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} (\widetilde{x^m *_P y_j})_0 - (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty$$

となる．したがって, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} (\widetilde{x^m *_P y_j})_0 - (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty = 0$$

が成り立つ．ここで, $\widetilde{x}$と$\widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k$ たちとの交点のうち, 角度が最大な点が $\widetilde{y}_l$ によって達成されるとし, その交点を R とすると, (2) が成り立たないという条件から, 任意の自然数 m に対して, $[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T = 0$ となるため,

$\widetilde{(x^m *_R y_l)}_0$ と相殺される項を観察することで, 鳩ノ巣原理から, 以下のどちらか一方が成り立つ.

$$(a)\text{: } \widetilde{(x^m *_R y_l)}_0 = \widetilde{(x^m *_P y_j)}_0.\ (for\ m = m_1, m_2)$$

$$(b)\text{: } \widetilde{(x^m *_R y_l)}_0 = \widetilde{(x^m *_P y_j)}_\infty.\ (for\ m = m_1, m_2)$$

しかし, 命題 1.(1) から (b) は不適であり, 命題 1.(2) から (a) についても, R における角度の最大性から不適であり, 矛盾が言えた.
最後に, 命題 2. と以下の命題 3. とを合わせて証明が完了する.

命題 3.(Chas-Kabiraj [1]) パンツと同相でない有向曲面において, その上の閉曲線 y について

$$i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$$

が任意の単純閉曲線 x に対して成り立つとき, y は定値ループ, 1 点穴を周回する曲線, 境界成分を周回する曲線のどれかにホモトピックである.

これは, 種数が 1 以上, または境界成分と 1 点穴の合計が 4 以上の有向曲面はその上のいくつかの適切な単純閉曲線を引く (差集合を取る) ことで, 各連結成分が, ディスク, アニュラスのいずれかに同相にすることができるためである.

4. 主結果

本講演では次の結果について紹介する.Chas-Kabiraj [1] が求めた A_0 の中心は零化イデアル $\mathrm{Ann}_{A_0}(A_0)$ と言い換えられる. 講演者は, この拡張として $\mathrm{Ann}_{A_i}(A_j)$ $((i,j) = (0,1), (1,0), (1,1))$ を求めた.

定理.(W) $K\hat{\pi} = A_0 \oplus A_1$ に対して、
$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1) = (\alpha + \iota\alpha$ ($\alpha \in \hat{\pi}$ は定値ループ, 境界成分を周回するループ) の形の元で生成される空間)
$\mathrm{Ann}_{A_1}(A_i) = (\alpha - \iota\alpha$ ($\alpha \in \hat{\pi}$ は境界成分を周回するループ) の形の元で生成される空間) $(i = 0, 1)$
である。

証明について, まず, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_1)$ をについて述べる. その後,$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ についても類似の方法で示せることを概略のみ紹介する. そのため最初に, 下付きチルダと拡張された TWG 括弧積の導入をする.

まず, K は $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ を含む可換環なので,

$$A_0 \cong K\hat{\pi}/A_1, A_1 \cong K\hat{\pi}/A_0$$

であり, $K\hat{\pi}$から $K\hat{\pi}/A_1$への自然な射影は,上付きチルダを $K\hat{\pi}$ 上線形に拡張した写像に一致する. このことから, $K\hat{\pi}$から $K\hat{\pi}/A_0$ への自然な射影を, **下付きチルダ** で書くことにする.
また, $A_i \times A_j$ 上に制限された Goidman 括弧積は, $K\hat{\pi}/A_i \times K\hat{\pi}/A_j$ 上へと括弧積を誘導する. これを **拡張された TWG 括弧積** と呼ぶ. これは TWG 括弧積が $A_0 \times A_0$ 上に制限された Goidman 括弧積から誘導された写像とみなせるためである.

この下付きチルダと拡張された TWG 括弧積を用いて, 3 章の命題 2. の類似の命題として命題 2'. が得られる.

命題 2'. $x, y_1, , , y_k \in \hat{\pi}$ はどの 2 つも相異なるものとし, x が単純閉曲線の代表元をもつものとする.

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j \underset{\sim}{y_j}$$

とおいたとき (ただし各 c_j は 0 でないとする), 以下の 2 つのうち少なくとも一方が成り立つ.

(1) 各 j に対して, $i\,(x, y_j) = 0$
(2) $[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T \neq 0$ となる自然数 m が存在する

命題 2'. の証明の概略は, (1), (2) のどちらも成り立たないと仮定すると, S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を 1 つ固定し, $x, y_1, , , y_k$ の代表元として測地線をとると, 拡張された TWG 括弧積の定義から,

$$[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T = m \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} \varepsilon_P(x^m, y_j)\{(\widetilde{x^m *_P y_j})_0 + (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty\}$$

となる. したがって, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} \varepsilon_P(x^m, y_j)\{(\widetilde{x^m *_P y_j})_0 + (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty\} = 0$$

が成り立つ. ここで, x と $y_1, , , y_k$ たちとの交点のうち, 角度が最大な点が y_l によって達成されるとし, その交点を R とすると, (2) が成り立たないという条件から, 任意の自然数 m に対して, $[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T = 0$ となるため, $(\widetilde{x^m *_R y_l})_0$ と相殺される項を観察することで, 鳩ノ巣原理から, 以下のどちらか一方が成り立つ.

$$(a)\colon\ (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_0.\ (for\ m = m_1, m_2)$$

$$(b)\colon\ (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty.\ (for\ m = m_1, m_2)$$

しかし, 先述の命題 1.(1) から (b) は不適であり, 命題 1.(2) から (a) についても, R における角度の最大性から不適であり, 矛盾が言えた.
最後に, 命題 2'. と先述の命題 3. とを合わせて $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_1)$ が求まる.

$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ については以下の 2 つの補題を用いる.

補題 1. $\alpha \in \hat{\pi}$ に対して, α が定値ループでないならば, $\alpha \neq \iota\alpha$ である.

これは, $\alpha = \iota\alpha$ 対応する測地線が逆向きとなり, 測地線の一意性に反することことから従う.
また, この補題 1. から以下の補題 2. が従う.

補題 2. $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ に対して,

$$\underset{\sim}{\alpha} = \pm\underset{\sim}{\beta} \in K\hat{\pi}/A_0 \Leftrightarrow \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \in K\hat{\pi}/A_1 x$$

この補題 2. から, $\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ が求まり, 主定理の証明が完了する.

参考文献

[1] Moira Chas and Arpan Kabiraj, The Lie bracket of undirected closed curves on a surface, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 375, No. 4, pp. 2365–2386, (2021).

[2] William M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. Math. 85, (1986).