量子多体系におけるスペクトルギャップのある基底状態の近似と area law

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
鵜飼歩美 (Ayumi UKAI) *

概要

本研究では多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を含むような一般的な量子多体系で，スペクトルギャップのある基底状態の近似定理である Hastings factorization lemma を証明し，また area law 成立のための十分条件を与えた．ここでは，本研究の背景およびその予備知識の説明を行った後，本研究の主結果を紹介する．

1 背景

本研究は，作用素環論を用いた量子多体系の研究であり，特にスペクトルギャップのある基底状態の近似 (Hastings factorization lemma) と area law を扱う．この分野では Lieb-Robinson bound の近代的発展をきっかけに，量子スピン系におけるスペクトルギャップのある基底状態の研究で大きな進展があった．Hastings factorization lemma と area law はこの進展の基盤となる．一方で多次元格子量子多体系では，スペクトルギャップのある基底状態と行列積状態との対応の研究および area law の研究が現在進行中である．

Lieb-Robinson bound は 80 年代に Lieb, Robinson [1] によって導入された．それは有限有効距離の相互作用のある物理系で信号伝達速度の上限を表す．2004 年に Hastings [2] が Lieb-Robinson bound を応用して，Lieb-Schultz-Mattis の定理を高次元に拡張した．それをきっかけに Lieb-Robinson bound の見直しが行われ，2006 年に Hastings, Koma [3] と Nachtergaele, Ogata, Sims [4] によって，Lieb-Robinson bound の改良とさらなる応用が行われる．このリバイバルを基に，様々な研究者によって様々な物理系で，Lieb-Robinson bound の応用が行われている．

その応用研究として，スペクトルギャップのある基底状態の研究に大きな進展があった．最初に，2007 年に Hastings [5] によって，(有限体積の) 一次元格子量子スピン系で area law 成立が示された．その鍵となるのが Hastings factorization lemma であり，これはスペクトルギャップのある基底状態の近似定理である．後の 2013 年に松井 [6] は，無限体積の一次元格子量子スピン系において，area law から split property を示した．また 2020 年に緒方 [7] は split property を基に，一次元格子量子スピン系で SPT (symmetry protected topological) 相指標の数学的厳密な定義を与えた．こ

* E-mail:ayumi.ukai.e6@nagoya-u.ac.jp

れによってスペクトルギャップのある基底状態の分類が行われた．以上のように一次元格子量子スピン系の研究では，次のような進展があった:

(♭) Lieb-Robinson bound → Hastings factorization lemma →
area law → split property (→ スペクトルギャップのある基底状態の分類).

量子スピン系だけでなく一次元格子フェルミオン系でも，Lieb-Robinson bound [8] および split property [9] [10] が証明されている．ただし split property は Jordan-Wigner 変換を用いて量子スピン系の場合から導かれている．松井 [10] によって，(♭) のような流れは量子スピン系に限らず，一次元格子フェルミオン系でも成立すると示唆されている．

スペクトルギャップのある基底状態の研究における一つの課題として，行列積状態との関連がある．一次元格子量子スピン系では，スペクトルギャップのある基底状態は行列積状態とうまく対応している．行列積状態はその表示が具体的であるため便利である一方で，スペクトルギャップのある基底状態は具体例を見つけることも，またある状態がスペクトルギャップのある基底状態か否か判別することも難しい．行列積状態がギャップのある基底状態である条件は Fannes，Nachtergaele, Werner [11] が発見された．また逆に，一次元格子量子スピン系ではスペクトルギャップのある基底状態が area law を満たす [5] と知られており，また area law を満たす基底状態は行列積状態で近似可能であることも知られている [12]．一方で多次元格子量子スピン系では，一次元の場合より複雑になっている．行列積状態の多次元拡張として，Pérez-García, Verstraete, Cirac and Wolf [13] によって導入された PEPS（projected entangled pair states) というものがあるが，PEPS とスペクトルギャップのある基底状態との関連性はまだ見つかっていない．

さらに多次元格子量子多体系において，スペクトルギャップのある基底状態が area law を満たすことの数学的厳密な証明は与えられていない．多次元格子 area law の研究での唯一の研究が Anshu, Arad，Gosset による二次元 area law の研究 [14] である．しかし，この研究は frustration-free な物理系に限られており，また三次元以上での成果は今のところない．一方で，PEPS で近似できないが area law を満たすような物理系も発見されており [15]，多次元格子量子多体系での area law の研究は現在進行中である．

2　主結果

2.1　新規性

本研究の主結果は二つある．一つは Hastings factorization lemma の一般化である．この定理は，一次元格子量子スピン系での成立が知られていた．Hastings [5] が有限体積での証明を与え，後に松井 [6] が Hastings の証明が無限体積でも成立することを示唆した．本研究では多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を含むような，一般的な量子多体系で Hastings factorization lemma が成立することを明らかにした．

もう一つは，一般的な量子多体系において area law 成立のための十分条件を与えた．Hasting [5] によって一次元格子量子スピン系での area law 成立が示されている．本研究ではこの手法の一般化として，一般的な量子多体系における area law 成立のための十分条件を明らかにした．またその系

として，一次元格子フェルミオン系で area law が成立することの数学的に厳密な証明を与えた．

2.2 枠組み

C^*-環論に基づく枠組みでは，量子多体系は次で説明するような三つ組 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ で与えられる．まず (Γ, d) は距離付き離散グラフである．すなわち Γ は可算濃度集合であり，d を Γ 上の距離である．この (Γ, d) は量子多体系を構成する粒子の配列を表す．$\mathcal{A}$ は単位元を持つ C^*-環である．$\mathcal{A}$ の自己共役元は物理量を表す．ここで $\mathcal{P}_0(\Gamma)$ は Γ の有限部分集合全体を表すことにして，各 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して $\mathcal{A}_X$ は $\mathcal{A}$ の C^*-部分代数である．そして，$X \subseteq Y$ ならば $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}_Y$ が成り立つ．$\mathcal{A}_X$ の自己共役元は $X \subset \Gamma$ 上に局在する物理量を表す．そして有限体積の集合上に局在する物理量全体 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)} \mathcal{A}_X$ は，$\mathcal{A}$ の中で稠密であるとする．最後に $\Phi : \mathcal{P}_0(\Gamma) \to \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ であり，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で $\Phi(X) = \Phi(X)^* \in \mathcal{A}_X$ を満たす．この Φ を量子多体系の**相互作用**という．これはハミルトニアンの拡張となっている．実際に十分な仮定のもとでは，相互作用 Φ から時間発展 $\alpha^t = \alpha^t_\Phi$ が定まる．この時間発展は $\mathcal{A}$ 上のある種の連続性のある一径自己同型群として得られる．

例 2.1（多次元格子量子スピン 1/2 系） 離散グラフを ν-次元格子 $\mathbb{Z}^\nu$ によって，またその距離を ℓ^1 距離によって定める．量子スピン 1/2 粒子では，一粒子からなる物理系での物理量は 2×2 行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の元として表される．よって任意の $x \in \mathbb{Z}^\nu$ で $\mathcal{A}_{\{x\}} := M_2(\mathbb{C})$ と定まる．そして任意の $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)$ で $\mathcal{A}_X := M_2(\mathbb{C})^{\bigotimes X}$ と定める．このとき，任意の $X, Y \in \mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)$ で $X \subseteq Y$ を満たすとき，

$$A \in \mathcal{A}_X \mapsto A \otimes I \in \mathcal{A}_X \otimes M_2(\mathbb{C})^{\bigotimes Y\setminus X} = \mathcal{A}_Y$$

として埋め込みが定まる．$\mathcal{A}$ を，この埋め込みの下で $\bigcup_{X\in\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)} \mathcal{A}_X$ から生成する C^*-環とする．これを形式的に $M_2(\mathbb{C})^{\bigotimes \mathbb{Z}^\nu}$ と表す．

ここで $\nu = 1$ であり，かつ相互作用が次のように与えられるようなモデルを，量子ハイゼンベルグモデルという:

$$\Phi(X) = \begin{cases} -h\sigma^z_n & X = \{n\} \text{ のとき}, \\ -\dfrac{1}{2}(J_x\sigma^x_n\sigma^x_{n+1} + J_y\sigma^y_n\sigma^y_{n+1} + J_z\sigma^z_n\sigma^z_{n+1}) & X = \{n, n+1\} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

ここで，$\sigma^x_n, \sigma^y_n, \sigma^z_n$ はそれぞれ $\sigma^x_n, \sigma^y_n, \sigma^z_n \in \mathcal{A}_{\{n\}} = M_2(\mathbb{C})$ のパウリ x, y, z 行列であり，また J_x, J_y, J_z は定数である．

次にスペクトルギャップのある基底状態を説明する．基底状態は物理量を表す $\mathcal{A}$ と時間発展 α^t から定まる．$\mathcal{A}$ の (物理) **状態**は十分よい性質を持った $\mathcal{A}$ 上の汎関数として与えられる．次の命題によって，状態からカノニカルな表現 (GNS 表現) を得ることができる．

命題 2.1（[16, Theorem 2.5.3]） ω を $\mathcal{A}$ の状態とする．このとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{H}_\omega$ 上への $\mathcal{A}$ の表現 π_ω とその巡回単位ベクトル $\Omega \in \mathcal{H}_\omega$ が存在して，

$$\omega(A) = \langle \Omega, \pi_\omega(A)\Omega \rangle, \quad A \in \mathcal{A}$$

が成り立つ．この三つ組 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega)$ を ω の **GNS 表現**という．また ω の GNS 表現はユニタリ同値を除いて一意に存在する．

ω が時間発展に対して不変であるとき，$\mathcal{H}_\omega$ 上の (非有界) 自己共役作用素 H_ω が存在して

$$\pi_\omega(\alpha^t(A)) = e^{itH_\omega}\pi_\omega(A)e^{-itH_\omega}, \quad H_\omega\Omega = 0$$

が成立する．特に H_ω が正であるとき，ω は**基底状態**であるという．このとき Ω は H_ω の最低固有値の固有ベクトルとなっている．さらに基底状態 ω で Ω が H_ω の非退化固有ベクトルであり，かつ $\sigma(H_\omega)$ を H_ω のスペクトラムとしてある $\gamma > 0$ で $\sigma(H_\omega) \subseteq \{0\} \cup [\gamma, \infty)$ が満たされる場合には，ω を**スペクトルギャップのある基底状態**という．このとき γ を ω のスペクトルギャップという．

2.3 Hastings factorization lemma

Hastings factorization lemma は，スペクトルギャップのある基底状態の近似を与える定理である．基底状態の密度作用素 $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ が，注目する領域 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，その境界に局在する物理量 $O_B(X, \ell)$ と X の内部と外部それぞれへの射影作用素 $O_R(X, \ell), O_L(X, \ell)$ の積によって近似される．また近似の精度は，X の体積ではなくある種の表面積のみに依存する．

ここで相互作用 Φ が**有界**であるとは，

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_\Phi := \sup_{x\in\Gamma} \sum_{x \in X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)} \frac{\|\Phi(X)\|}{|X|} < \infty,$$

を満たすことである．また相互作用 Φ が**有限有効距離を持つ**とは，ある定数 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\Phi > 0$ が存在して，$\mathrm{diam}(X) := \sup\{d(x_1, x_2)\,;\, x_1, x_2 \in X\} > \mathfrak{r}$ ならば $\Phi(X) = 0$ が成立することである．このとき $\mathfrak{r}$ を Φ の有効距離という．

定理 2.2　量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ が以下を満たすと仮定する:

(i) (Γ, d) が F 関数を持つ．
(ii) 任意の $\mathcal{A}_X$ は行列環と同型である．
(iii) 任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，$\Phi(X) \in \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}'_{X^c}$ が成り立つ．
(iv) 相互作用 Φ は有界であり，かつ有限有効距離 $\mathfrak{r}$ を持つ．

また任意の $r \geq 0$ と $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，以下のように定める:

$$\partial X(r) := \{x \in X\,;\, d(x, X^c) \leq r\} \sqcup \{y \in X^c\,;\, d(y, X) \leq r\}.$$

このとき，任意のスペクトルギャップのある基底状態 ω に対して，(X, ℓ) に依存しないような正数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して，次の命題を成り立たせる: 任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ と任意の $\ell > 2\mathfrak{r}$ に対して，二つの射影作用素 $O_R(X, \ell) \in \mathcal{A}_X$, $O_L(X, \ell) \in \mathcal{A}'_X = (\mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A})'' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ とノルム 1 以下の物理量 $O_B(X, \ell) \in \mathcal{A}_{\partial X(3\ell+\mathfrak{r})}$ が存在して，

$$\|O_B(X, \ell)O_L(X, \ell)O_R(X, \ell) - |\Omega\rangle\langle\Omega|\| \leq C_1|\partial X(2\ell + \mathfrak{r})|^4 \exp(-C_2\ell)$$

が成り立つ．

さらに，(Γ, d) が次の仮定 (v) を満たすとする:

(v) ある定数 $\nu \in \mathbb{N}$ と $\kappa > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で $|\partial X(n + \mathfrak{r})| \leq \kappa |\partial X(\mathfrak{r})| n^\nu$ が成立する．

このとき，(X, ℓ) に依存しないような正数 $C_1', C_2' > 0$ が存在して，$|\partial X(\mathfrak{r})|$ に対して十分大きな任意の正数 $\ell > 0$ で

$$\|O_B(X,\ell) O_L(X,\ell) O_R(X,\ell) - |\Omega\rangle\langle\Omega|\| \leq C_1' |\partial X(\mathfrak{r})| \exp(-C_2' \ell) \tag{1}$$

が成り立つ．

ここで仮定 (i),(v) は距離つき離散グラフ (Γ, d) に対する条件である．多次元格子 $\mathbb{Z}^\nu$ で ℓ^1 距離を定めたものは，仮定 (i),(v) を満たす．また仮定 (ii) は $\mathcal{A}_X$ に対する要件である．量子スピン系と量子フェルミオン系は，仮定 (ii) を満たす．仮定 (iii),(iv) は相互作用に対する条件である．仮定 (i),(iv) の下で時間発展は常に存在する [4]．仮定 (iii) は量子スピン系では常に成立する．一方でフェルミオン系では，相互作用が偶の場合に成立する．以上のように，定理 2.2 の仮定は，有界かつ有限有効距離を持つ相互作用があるような多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を一般化した条件である．

定理 2.2 の証明の鍵となるのは，Lieb-Robinson bound である．証明の概略を述べる．まず $f_\alpha(t)$ をガウス核とする，すなわち

$$f_\alpha(t) := \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

であり，さらに $\alpha > 0$ は十分小さいものとする．ここで $t = 0$ のとき $e^{itH_\omega} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ である．よって ω は γ のスペクトルギャップがあるとすると，

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itH_\omega} f_\alpha(t)\, dt - |\Omega\rangle\langle\Omega| \right\| \leq e^{-\gamma^2/4\alpha}$$

と近似を得る．ここで ∂X を X の境界として

$$e^{itH_\omega} \cong e^{it(M_B + M_R + M_L)}, \quad M_B \in \mathcal{A}_{\partial X}, \quad M_R \in \mathcal{A}_X, \quad M_L \in \mathcal{A}_X'$$

と近似できる．この近似は次のようにして得る．まず H_ω は局所ハミルトニアン

$$H_\Lambda = H_{\Phi,\Lambda} := \sum_{X \subseteq \Lambda} \Phi(X) \in \mathcal{A}_\Lambda$$

の $\Lambda \to \infty$ における適切な意味での収束先となるため，H_R, H_B, H_L をそれぞれ X の内部，境界部，外部での相互作用を足し合わせたものとして，

$$H_\omega \cong H_R + H_B + H_L, \quad H_R \in \mathcal{A}_X, \quad H_B \in \mathcal{A}_{\partial X}, \quad (H_L \in \mathcal{A}_X')$$

と近似できる．このとき

$$(H_R)_\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^t(H_R) f_\alpha(t)\, dt$$

はほぼ X 上に局在している．まず $t=0$ のとき $\alpha^t(H_R)$ は X 上に局在する．また Lieb-Robinson bound によって t が十分に小さいときも，$\alpha^t(H_R)$ はほぼ X 上に局在する．よって，$(H_R)_\alpha$ は $\mathcal{A}_X$ の元で近似できる．同様にして M_B, M_L を得ることができる．しかし H_L は $\mathcal{A}$ の元でないので $\mathcal{A}$ の元によって近似する必要がある．

以上から

$$\begin{aligned}|\Omega\rangle\langle\Omega| &\cong \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(M_B+M_R+M_L)} f_\alpha(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it(M_B+M_R+M_L)} e^{-itM_R} e^{-itM_L}\right) e^{itM_R}\ e^{itM_L} f_\alpha(t)\,dt\end{aligned}$$

という近似を得られる．ここで $e^{itM_R} \in \mathcal{A}_X$ は射影作用素 $O_R \in \mathcal{A}_X$ によって，また $e^{itM_L} \in \mathcal{A}'_X$ は射影作用素 $O_L \in \mathcal{A}'_X$ で近似ができる．さらに $e^{it(M_B+M_R+M_L)} e^{-itM_R} e^{-itM_L}$ は $t=0$ のとき，∂X に局在するため Lieb-Robinson bound から境界部に局在する物理量 O_B で近似することができる．

2.4 Area law の十分条件

ここでは量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ は仮定 (ii) および次の仮定 (vi) を満たすと仮定する:

(vi) $\mathcal{A}_{\{x\}}$ が $d_x \times d_x$ 行列環と同型であるとする．このとき $\hat{d} := \sup_{x\in\Gamma} d_x < \infty$ が成り立つ.

仮定 (vi) は，$\mathcal{A}_X$ に対する条件であり，フェルミオン系では常に満たされる．また量子スピン系で各スピンの次元が配置に対して一様に有界な場合に満たされる．

このとき $\mathcal{A}$ 上の状態 ω と着目する領域 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，**エンタングルメントエントロピー**が定まる:

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) := -\mathrm{Tr}(\rho_X \log \rho_X).$$

ただし，ρ_X は $\omega|_{\mathcal{A}_X}$ の密度行列である．仮定 (ii),(vi) の他に何も制約がない場合でも，次の評価が成立する:

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) \le |X| \log(\hat{d}).$$

すなわちエンタングルメントエントロピーの自明な評価は，体積に依存する．しかし量子多体系上の特別な状態 ω では，エンタングルメントエントロピーの上限が高々 X の表面積にしか依存しないことがある．この現象を **area law** という．

定理 2.2 の主張が成り立つような状態 ω では，エンタングルメントエントロピーの上限が得られる．

定理 2.3　仮定 (ii),(v),(vi) を満たすような量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ で，さらに ω 定理 2.2 の主張を成り立たせるものとするとき，(Γ, d) と $\hat{d}$ のみに依存した定数 $C_3 > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) \le C_3 |\partial X(\mathfrak{r})| \left(1 + \frac{1}{2C'_2} \log \frac{4{C'_1}^2}{p_X}\right)^\nu$$

が成り立つ．ただし，$C'_1, C'_2 > 0$ は式 (1) での定数であり，ν は仮定 (v) での定数である．

以上から，area law 成立の十分条件として，次の条件を得た:

- $\log(1/p_X)$ が $|\partial X(\mathfrak{r})|$ で上から評価される．

この十分条件を用いて，以下の設定で area law の成立が確認できた．

系 2.4　一次元格子フェルミオン系上の任意のスペクトルギャップのある基底状態で，area law が成立する．

系 2.5　二次元格子量子スピン系のモデルのひとつである Kitaev のトーリックコードモデルにおいて，スペクトルギャップのある基底状態が発見されている [17]．このスペクトルギャップのある基底状態で，area law が成立する．

参考文献

[1] E. H. Lieb and D. W. Robinson, The finite group velocity of quantum spin systems. *Comm. Math. Phys.*, **28**(1972), 251–257. MR 312860.

[2] M. B. Hastings, Lieb-Schultz-Mattis in higher dimensions. *Physical review B*, **69.10**(2004), 104431.

[3] M. B. Hastings and T. Koma. Spectral gap and exponential decay of correlations. *Communications in mathematical physics*, **265**(2006), 781–804.

[4] B. Nachtergaele, Y. Ogata and R. Sims, Propagation of correlations in quantum lattice systems. *Journal of statistical physics*, **124**(2006), 1-13.

[5] M. B. Hastings, An area law for one-dimensional quantum systems. *J. Stat. Mech. Theory, Exp. 2007*, **P08024**(2007), 14 pp.

[6] T. Matsui, Boundedness of entanglement entropy and split property of quantum spin chains. *Rev. Math. Phys.*, **25**(2013), no.9, 1350017.

[7] Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$-index of symmetry protected topological phases with time reversal symmetry for quantum spin chains. *Communications in Mathematical Physics*, **374.2**(2020), 705-734.

[8] B. Nachtergaele, R. Sims and A. Young, Lieb-Robinson bounds, the spectral flow, and stability of the spectral gap for lattice fermion systems. *Mathematical Problems in Quantum Physics*, **717**(2018), 93-115.

[9] C. Bourne and H. Schulz-Baldes, On $\mathbb{Z}^2$-indices for ground states of fermionic chains. *Reviews in mathematical physics*, **32.09**(2020), 2050028.

[10] T. Matsui, Split property and fermionic string order. arXiv:2003.13778 (2020).

[11] M. Fannes, B. Nachtergaele and R. F. Werner. Finitely correlated states on quantum spin chains. *Communications in mathematical physics*, **144**(1992), 443-490.

[12] N. Schuch, M. M. Wolf, F. Verstraete and J. I. Cirac, Entropy scaling and simulability by matrix product states. *Physical review letters*, **100.3**(2008), 030504.

[13] D. Pérez-García, F. Verstraete, J. I. Cirac and M. M. Wolf, PEPS as unique ground states

of local Hamiltonians. arXiv:0707.2260 (2007).

[14] A. Anshu, I. Arad and D. Gosset. An area law for 2d frustration-free spin systems. *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*(2022).

[15] Y. Ge and J. Eisert. Area laws and efficient descriptions of quantum many-body states. *New Journal of Physics*, **18.8**(2016), 083026.

[16] P. Naaijkens, *Quantum Spin Systems on Infinite Lattices: A Concise Introduction.* Lecture Notes in Physics, Springer, 2017.

[17] P. Naaijkens, Localized endomorphisms in Kitaev's toric code on the plane. *Reviews in Mathematical Physics*, **23.04**(2011), 347-373.