モノドロミー保存変形の正則性による量子化

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO) *

概要

古典 Painlevé 方程式について, Takano やその共同研究者たちにより正則性による特徴付けが知られている．すなわち，正準変換で移り合ういくつかの chart において, その各々で多項式 Hamiltonian により表される Hamiltonian 系として Painlevé 方程式 を一意に特徴付けることができる．Garnier 系は Painlevé 方程式の多変数的拡張であり, 古典 2 変数 Garnier 系において同様の特徴付けが Sasano によりなされている．本稿ではその量子類似について報告する．また最後に, 現在検討中の問題である量子系における τ 関数の構成についての現状報告を行う．

1 Introduction

Painlevé 方程式 P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI})$ はある 2 階の線形常微分方程式

$$L_J : \frac{d^2y}{dx^2} = R_{\mathrm{J}}(x,\lambda,t)y$$

のモノドロミー保存変形やストークス係数を不変にする変形理論から導かれることが知られている [29]．このことは，P_{VI} については Fuchs により，他の P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{V})$ については Garnier によって最初に示された．これらの Painlevé 方程式は L_J の特異点の個数「4」の分割に対応させて考えることができる．

$$\begin{tikzcd} & & (2,2) \arrow[dr] & \\ (1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,2) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,3) \arrow[r] & (4) \end{tikzcd}$$

一方，N 変数 Garnier 系とは $N+3$ 個の確定特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階 Fuchs 型線型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる N 個の時間変数を持つ Hamilton 系である [1]．$N=1$ の場合は，Painlevé VI 型方程式と一致する．

また，H.Kimura により 2 変数の退化 Garnier 系が構築された．この 2 変数 Garnier 系には Painlevé 方程式の場合と同様に，「5」の分割に対応する次の退化系列がある [2, 3, 4]．

* E-mail:y-ueno@kogakkan-u.ac.jp

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1,2,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,3) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,1,2) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,1,3) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,4) \arrow[r] & (5)
\end{tikzcd}
$$

古典 Painlevé 方程式の特徴付けには Takano やその共同研究者たちの仕事が知られている [6, 7, 18, 21]．これらの変換の下で， 古典 Painlevé 方程式は正則なハミルトニアン系に変換される [13]．さらには，古典 Painlevé 方程式がこれらの有理変換の下で，正則性によりただ一つに特徴付けられることを示した．これを**高野理論**と呼ぶ．

筆者は量子 Painlevé 方程式に対してもこれを適用し，高野理論の量子類似を構築した [26]．昨年の発表 [28] において，量子 Painlevé 系において得られた結果を Garnier 系にも拡張し，$N=2$ の場合の Garnier 系 (G (1,1,1,1,1),G(1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4)) の各場合について特徴付ける量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンを与え，2 変数量子 Garnier 系の構築を行った．

その後，残りの Garnier 系 (G(2, 3),G(5)) の各場合についても量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンが見つかっており，本稿ではそちらの報告を行う．なお，$N=2$ の場合の退化の場合も含めたすべての結果については論文 [27] を参照していただきたい．

2　2 変数量子 Garnier 系

以下では，$N=2$ の場合の Garnier 系について，その量子版を考える．

2 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために，次のような Hamilton 系を考える．

$$
\begin{aligned}
dq_1 &= [H_1,p_1]dt + [H_2,p_1]ds, \qquad dp_1 = -[H_1,q_1]dt - [H_2,q_1]ds \\
dq_2 &= [H_1,p_2]dt + [H_2,p_2]ds, \qquad dp_2 = -[H_1,q_2]dt - [H_2,q_2]ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，q_1,q_2,p_1,p_2 は $[q_i,p_j]=\delta_{i,j}h \quad (h\in\mathbb{C})$ を満たす正準変数であり，t,s は 2 つの時間発展の独立変数とする．

また，H_1,H_2 は§ 3. で定める量子正準変換により正則となるように決めた q_1,q_2,p_1,p_2 の非可換多項式 Hamiltonian とする．

3　量子正準変換と決定された Hamiltonian

§ 1. で述べたように古典 Painlevé 系における特徴付けは Takano と彼の共同研究者たちの仕事によるものである．Painlevé 系の多変数化である Garnier 系については，2 変数と 3 変数の場合の正準変換については Sasano や Suzuki の仕事により分かっている [15, 16, 19, 20]．

本稿では 2 変数量子 Garnier 系について，正則性に基づいたアプローチを試みる．そのために，Sasano や Suzuki の導入した有理正準変換を自然に量子化したものを考え，これらの変換に対して正則に変換されるような Hamiltonian を探す．もちろん，正準変換の量子化にも曖昧さの問題は生

じるが，変数の単純な順序交換を考えるだけであればその効果はパラメータの読み替えに吸収することができるため，順序をどのように指定しても実質的に等価であり，一般性を失わない．そのため，ここでは変数 q_i が変数 p_j よりも，また変数 x_i が変数 y_j よりも左にくるように非可換変数の順序を指定する．

出発点とする量子正準変換とその逆変換は次のものである．なお，各変換式であるが G (1,1,1,1,1,1),G(1,1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4) については Sasano によるもの，また残りの G(2, 3),G(5) については Suzuki のものを参考にした．これらの変換式は，古典の場合の Sasano や Suzuki による変換式と同一のように見えるが，ここでは変数 q_i, p_j と x_j, y_j は交換関係 $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h, [x_i, y_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を保つ量子正準変数，α_i はパラメータとする．

1. The case of G(2,3)

$$\begin{aligned}
r_1:\quad & q_1=\frac{1}{x_1},\quad p_1=-x_1^2y_1-x_1x_2y_2-\alpha_1x_1,\quad q_2=\frac{x_2}{x_1},\quad p_2=x_1y_2,\\
& x_1=\frac{1}{q_1},\quad y_1=-q_1^2p_1-q_1q_2p_2-\alpha_1q_1,\quad x_2=\frac{q_2}{q_1},\quad y_2=q_1p_2,\\
r_2:\quad & q_1=\frac{x_1}{x_2},\quad p_1=x_2y_1,\quad q_2=\frac{1}{x_2},\quad p_2=-x_2^2y_2-x_1x_2y_1-\alpha_1x_2,\\
& x_1=\frac{q_1}{q_2},\quad y_1=q_2p_1,\quad x_2=\frac{1}{q_2},\quad y_2=-q_2^2p_2-q_1q_2p_1-\alpha_1q_2,\\
r_3:\quad & q_1=x_1,\quad p_1=-\eta t_1\frac{1}{x_2}+y_1,\quad q_2=x_2,\quad p_2=\eta t_1(\frac{1}{x_2})^2-\eta t_1t_2(\frac{1}{x_2})^2+\alpha_2\frac{1}{x_2}+y_2,\\
& x_1=q_1,\quad y_1=\eta t_1\frac{1}{q_2}+p_1,\quad x_2=q_2,\quad y_2=-\eta t_1q_1(\frac{1}{q_2})^2+\eta t_1t_2(\frac{1}{q_2})^2-\alpha_2\frac{1}{q_2}+p_2,\\
r_4:\quad & q_1=\frac{1}{x_1},\quad p_1=-x_1^2y_1-x_1x_2y_2-(\alpha_1+\alpha_2)x_1-\eta t_1\frac{x_1}{x_2},\\
& q_2=\frac{x_2}{x_1},\quad p_2=-\eta t_1(\frac{x_1}{x_2})^2+\eta t_1x_1(\frac{1}{x_2})^2+x_1y_2+\alpha_2\frac{x_1}{x_2},\\
& x_1=\frac{1}{q_1},\quad y_1=-q_1^2p_1-q_1q_2p_2-\eta t_1t_2\frac{q_1}{q_2}-\alpha_1q_1,\\
& x_2=q_2,\quad y_2=\eta t_1t_2q_1(\frac{1}{q_2})^2-\eta t_1(\frac{q_1}{q_2})^2+q_1p_2-\alpha_2\frac{q_1}{q_2},\\
r_5:\quad & q_1=\frac{1}{x_1},\quad p_1=-x_1^2y_1-x_1x_2y_2-(1+\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)x_1+\frac{1}{2x_1},\\
& q_2=\frac{x_2}{x_1},\quad p_2=x_1y_2-\frac{1}{2},\\
& x_1=\frac{1}{q_1},\quad y_1=\frac{1}{2}q_1^3-q_1^2p_1-q_1q_2p_2-\frac{1}{2}q_1q_2-(1+\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)q_1,\\
& x_2=\frac{q_1}{q_2},\quad y_2=q_1p_2-\frac{1}{2},\\
r_6:\quad & q_1=\frac{x_1}{x_2},\quad p_1=\frac{x_1}{2x_2}+x_2y_1,\\
& q_2=\frac{1}{x_2},\quad p_2=-x_1x_2^2y_2-x_1x_2y_1-(1+\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)x_2-\frac{1}{2},\\
& x_1=\frac{q_1}{q_2},\quad y_1=-\frac{1}{2}q_1q_2+q_2p_1,\\
& x_2=\frac{1}{q_2},\quad y_2=\frac{1}{2}q_1^2q_2-q_1q_2p_1-q_2^2p_2-\frac{1}{2}q_2^2-(1+\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)q_2.
\end{aligned}\tag{2}$$

2. The case of G(5)

$$
\begin{aligned}
r_1:\quad & q_1=\frac{1}{x_1},\quad p_1=-x_1^2y_1-x_1x_2y_2-\alpha_1x_1,\quad q_2=\frac{x_2}{x_1},\quad p_2=x_1y_2,\\
& x_1=\frac{1}{q_1},\quad y_1=-q_1^2p_1-q_1q_2p_2-\alpha_1q_1,\quad x_2=\frac{q_2}{q_1},\quad y_2=q_1p_2,\\
r_2:\quad & q_1=\frac{x_1}{x_2},\quad p_1=x_2y_1,\quad q_2=\frac{1}{x_2},\quad p_2=-x_1x_2y_1-x_2^2y_2-\alpha_1x_2,\\
& x_1=\frac{q_1}{q_2},\quad y_1=q_2p_1,\quad x_2=\frac{1}{q_2},\quad y_2=-q_1q_2p_1-q_2^2p_2-\alpha_1q_2,\\
r_3:\quad & q_1=\frac{1}{x_1},\quad p_1=-2(\frac{x_2}{x_1})^2-x_1^2y_1-x_1x_2y_2-(\alpha_1-2\alpha_2)x_1+2\frac{1}{x_1}-2t_2,\\
& q_2=\frac{x_2}{x_1},\quad p_2=2(\frac{x_2}{x_1})^3-4(\frac{1}{x_1})^2x_2+x_1y_2-2t_1,\\
& x_1=\frac{1}{q_1},\quad y_1=2q_1q_2^4-6q_1^2q_2^2+2q_1^3-q_1^2p_1-2q_1q_2p_2-2t_2q_1^2-2tq_1q_2-(\alpha_1-2\alpha_3)q_1,\\
& x_2=\frac{q_2}{q_1},\quad y_2=-2q_1q_2^3+4q_1^2q_2+q_1p_2+2t_1q_1,\\
r_4:\quad & q_1=\frac{x_1}{x_2},\quad p_1=2\frac{x_1}{x_2}-2(\frac{1}{x_2})^2+x_2y_1-2t_2,\\
& q_2=\frac{1}{x_2},\quad p_2=-4x_1(\frac{1}{x_2})^2-x_1x_2y_1+2(\frac{1}{x_2})^3-x_2^2y_2-(\alpha_1-2\alpha_2)x_2-2t_1,\\
& x_1=\frac{q_1}{q_2},\quad y_1=2q_2^3-2q_1q_2+q_2p_1+2t_2q_2,\\
& x_2=\frac{1}{q_2},\quad y_2=2q_2^5-6q_1q_2^3+2q_1^2q_2-q_1q_2p_1-q_2^2p_2-2t_2q_1q_2-2t_1q_2^2-(\alpha_1-2\alpha_2)q_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

このとき，次が成り立つ．

Theorem 3.1　正準変換 (2), (3) の下で，正則性を持つ多項式 Hamiltonian は一意に決まり，それは次の Hamiltonian である．

1. The case of G(2,3)

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$
\begin{aligned}
H_1=\frac{1}{(1+3h+2\alpha_1+2\alpha_3)t_1}\{&q_2^2p_2^2+\frac{1}{2}q_1q_2p_1+\frac{1}{2}q_2^2p_2-\eta t_1 2q_1p_2\\
&+(1+h+2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)q_2p_2+\frac{1}{2}\alpha_1q_2-\eta t_1(p_1-t_2p_2)\}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$
\begin{aligned}
H_2=\frac{1}{(1+3h+2\alpha_1+2\alpha_3)}\{&-\frac{1}{2}q_1^2p_1-\frac{1}{2}q_1q_2p_2+2q_2p_1p_2+q_1p_1^2+\frac{1}{2}t_2q_1p_1+\frac{1}{2}q_2p_1-t_2p_1^2\\
&-\frac{1}{2}\alpha_1q_1+(1+h+2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)p_1+\eta t_1p_2\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. The case of G(5)

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{1}{(3h+2\alpha_1-2\alpha_2)}\{2q_1q_2p_1+q_2p_1^2+2q_2^2p_2-2q_1p_2+2t_2q_2p_1+2p_1p_2 \\ & +2\alpha_1q_2+2t_1p_1+2t_2p_2\}. \end{aligned} \tag{6}$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{1}{(3h+2\alpha_1-2\alpha_2)}\{q_2^2p_1^2+2q_1^2p_1+2q_1q_2p_2-q_1p_1^2+2q_2p_1p_2+2t_1q_2p_1+2t_2q_2p_2 \\ & -t_2p_1^2+p_2^2+2\alpha_1q_1-2t_2^2p_1+2t_1p_2\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Proof. Hamiltonian を一意に決定するための方法は数式処理ソフト Mathematica による具体的な計算によるものである．

その際，非可換変数 q_1,q_2,p_1,p_2 と x_1,x_2,y_1,y_2 に関して，$q=q_i,p=p_j$ の逆数について

$$pq^{-1}-q^{-1}p=hq^{-2}, p^{-1}q-qp^{-1}=hp^{-2}$$

のような公式を用いて計算を行っている．

このようにして得られた各 Hamiltonian (4)〜(7) を持つ Hamilton 系を **2 変数量子 Garnier** 系と呼ぶ．また各場合において，次が成り立つ．

Theorem 3.2　得られた Hamiltonian H_1,H_2 の t-flow と s-flow は可換（Frobenius 完全積分可能）である．

古典的に可換（ポアソン可換）な式から量子的に可換な式を得ることは一般には非自明である．今回は「正則性」という条件を課すことによってうまくいった．この結果は，正則性が「よい量子化」であることの一つの根拠となっている．

4　τ 関数の量子化

Okamoto は，ハミルトニアンを対数関数微分として与える量として次のように τ 関数を定義した．

$$H=\frac{d}{dt}\log\tau=\frac{\tau\prime}{\tau}$$

この τ 関数が Painlevé 方程式にとって非常に重要な関数であり，双線形方程式を満たすことや正則性を持つことなど良い性質が知られている．

同様に，量子系においても，良い性質を持つ τ 関数が導入できると期待される．量子系における良い性質を持つ τ 関数の導入を目指し，次のようなものを考える．

Definition 4.1 (Kuroki) τ 関数の量子類似を次のように定義する．

$$\begin{cases} s_i(a_i) = -a_i, \quad s_i(a_{\pm 1}) = a_{i\pm 1} + a_i \\ s_i(f_{\pm 1}) = f_{i\pm 1} \pm \dfrac{a_i}{f_i} \\ s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i \neq j), \quad s_j(\tau_j) = f_j \dfrac{\tau_{j-1}\tau_{j+1}}{\tau_j} \quad (i = j) \\ \pi(a_j) = a_{j+1}, \quad \pi(f_i) = f_{i+1}, \quad \pi(\tau_j) = \tau_{j+1} \\ \tau_i a_j = (a_j - \delta_{ij} h)\tau_i \end{cases}$$

Remark 4.2 (Kuroki) ただし，次のことに注意しておく．

- q, p（もしくは f_i）と α_i, τ_j は可換
- α_i は互いに可換
- τ_j は互いに可換
- q, p は非可換（$[q, p] = h$）
- α_i と τ_j は非可換（$\tau_i a_j = (a_j - \delta_{ij} h)\tau_i$）

このとき，例として τ 関数への Weyl 群作用を次のように計算する．

$$\begin{aligned} s_2 s_1 s_0(\tau_0) &= s_2 s_1 (f_0 \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_0}) \\ &= s_2((f_0 - \frac{\alpha_1}{f_1}) f_1 \frac{\tau_0 \tau_2}{\tau_1} \frac{\tau_2}{\tau_0}) \\ &= s_2((f_0 f_1 - \alpha_1) \frac{\tau_2^2}{\tau_1}) \\ &= \{(f_0 f_2 + \alpha_2)(f_1 f_2 - \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) f_2^2\} \frac{\tau_0^2 \tau_1}{\tau_2^2} \end{aligned}$$

以上のように計算を行うことにより一般に，

$$w(\tau_i) = (f \text{ の多項式}) \tau_0^a \tau_1^b \tau_2^c$$

のように書ける．
ここで，

$$\begin{cases} f_0 = q - p + t \\ f_1 = -q \\ f_2 = p \end{cases}$$

として，変数 q, p で表すと次のことが予想される．

Conjecture 4.3 (Yamada) τ 関数への次のような Weyl 群の作用が定義される．

$$w(\tau_i) = \phi_{m,n}(q, p) \prod_{k=0}^{2} \tau_k^{\nu_k}$$

ただし，$\phi_{m,n}(q, p)$ は，(q, p) の非可換多項式である．

このとき，$\phi_{m,n}(q,p)$ は次の量子高野 chart でも，また多項式になる．

$$\begin{aligned}
&q = ay_1 - x_1y_1^2 \quad , && p = \tfrac{1}{y_1}, && \tau_1 = y\tau_1 \\
&q = \tfrac{1}{x_2} \quad , && p = -bx_2 - x_2^2y, && \tau_2 = x\tau_2 \\
&q = \tfrac{1}{x_0} \quad , && p = -\tfrac{1}{x_0} + t - cx_0 - x_0^2y_0, && \tau_0 = x\tau_0
\end{aligned}$$

さらに，この正則性により $\phi_{m,n}(q,p)$ は規格化を除いて一意に決まる．

上記の事柄について，各 Painlevé II 方程式から Painlevé VI 方程式についての計算を行なっている（上は Painlevé IV 方程式の例である）．目標は以下である．

- 一般の場合についての証明
- 古典の場合で成り立っている Jacobi-Trudi 型明示公式の量子類似の構築

5 Conclusions

本稿では，正則性による 2 変数量子 Garnier 系の構築とその特徴付けについての報告を行った．得られた結果の拡張の方向としては次のようなものが考えられる．

- KZ 方程式との比較
  共形場理論の観点からは，KZ 方程式が量子 Garnier 系であると考えられている [8, 9]．それと今回の結果との比較することは興味深い．
- Sasano により構築された Sasano 系の量子化
  Sasano 系は Takano 理論を拡張し，正則性を持つ Hamiltonian 系として作られた方程式である [14, 17]．特に，D_{n} 型の対称性を持つ方程式のシリーズは，Painlevé V, VI 型方程式の拡張となっている．
- 2 変数量子 Garnier 系を多変数の場合についての一般化
  古典の場合，n 変数 Garnier 系についての初期値空間の理論については Kimura によって構成されている．これをもとにして，一般の n 変数量子 Garnier 系の構築と正準変換の理論の量子版の構築を目指す．

参考文献

[1] R. Garnier, Sur des équations différentielles du troisiéme ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.

[2] H. Kimura, The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura Appl., **155**(1989), 25-57.

[3] H. Kimura, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system*, RIMS Kokyuroku, (2000), 18-27.

[4] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 129-146.

[5] G. Kuroki, Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions, arXiv:1206.3419.

[6] T. Matano, A. Matumiya, K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[7] A. Matumiya, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[8] H. Nagoya, Quantum Painlevé systems of type $A_l^{(1)}$, Int. J. Math., **15**(10) (2004), 1007-1031.

[9] H. Nagoya, *Quantum Painlevé systems*, abstract for the meeting of the Mathematical Society of Japan (Saitama Univ., 2007), in Japanese.

[10] H. Nagoya, On quantum Painlevé systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu., **B30** (2012), 209-221.

[11] H. Nagoya, Integral formulas for quantum Isomonodromic systems, KYOTO UNIV, PUBLICATIONS RESEARCH INST MATHEMATICAL SCIENCES., **49** (4) (2013), 651-678.

[12] D. P. Novikov and B. I. Suleimanov, "Quantization" of an isomonodromic Hamiltonian Garnier system with two degrees of freedom, Theoretical and Mathematical Physics., **187**(2016), 479-496.

[13] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[14] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Kokyuroku., **1473** (2006), 143-163.

[15] Y. Sasano, Studies on the Garnier system in two variables, arXiv:0704.2869.

[16] Y. Sasano, Studies on the Garnier system in two variables II, arXiv:0706.0799.

[17] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[18] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[19] M. Suzuki, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system in two variables*, RIMS Kokyuroku, (2001), 41-52.

[20] M. Suzuki, Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan., **58** (2006), 1079-1117.

[21] K. Takano, Defining manifolds for Painlevé equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), 261-269, Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.

[22] T. Tsuda, Birational symmetries, Hirota bilinear forms and special solutions of the Garnier

systems in 2-variables, J. Math .Sci. Univ. Tokyo., **10** (2003), 355-371.

[23] T. Tsuda, Rational solutions of the Garnier system in terms of schur polynomials, IMRN., **43** (2003), 2341-2358.

[24] T. Tsuda, Universal characters and integrable systems, PhD thesis. The University of Tokyo, (2003).

[25] T. Tsuda, Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system, Advances in Mathematics., **206** (2006), 657-683.

[26] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[27] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Polynomial Hamiltonians for quantum Garnier systems in two variables, arXiv:2306.00993.

[28] 上野祐一, 2 変数量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアン, Hokkaido University technical report series in Mathematics, 184, i, 1-ix, 808, 第 19 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点, 55-62.

[29] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.