

# A proof of the Teichmüller TQFT volume conjecture for the $7_3$ knot

東京大学 大学院数理科学研究科 数理科学専攻  
上村 宗一郎 (Soichiro UEMURA) \*

## 概要

Andersen, Kashaev によって構築された一般化された位相的場の理論において、3次元多様体の量子不変量が与えられる。閉3次元多様体内の双曲結び目の補空間に対して、この不変量に関する体積予想に類似の予想が提唱されている。著者は先行研究では調べられていない結び目  $7_3$  に対して、体積予想に類似の定理を証明した。

## 1 導入

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory, TQFT) とは, Atiyah, Segal, Witten の公理を満たす理論のことで、境界つき多様体のなす圏から環上の加群のなす圏への関手のことである。TQFT の例として、Jones-Witten 理論が知られている [1]。これは底空間をコンパクトな3次元多様体とする主  $SU(2)$  束に対して、Chern-Simons 汎関数を用いて表される経路積分、もしくは分配関数が底空間の位相不変量を与えるという理論である。このような経路積分によって表されるような位相不変量を量子不変量と呼ぶ。

さらに、Jones-Witten 理論で得られる量子不変量と関連して、体積予想が知られている [2, 3]。これは  $S^3$  内の双曲結び目の色付き Jones 多項式の漸近展開に、結び目補空間の双曲体積が現れるという予想であり、いくつかの双曲結び目に対して、その成立が証明されているが、完全には解決されていない。この予想はトポロジーと双曲幾何の密接な関係性を示している。

一方、 $SU(2)$  等とは異なり、構造群がコンパクトでないような Chern-Simons 理論については、解析が難しく、十分な理解が得られていない。Andersen, Kashaev は量子 Teichmüller 理論を用いることで、構造群が  $SL(2, \mathbb{C})$  で与えられる Chern-Simons 理論に対応することが期待される拡張された TQFT を構成した [4]。四面体の貼り合わせの組み合わせ構造と、四面体の正の面角の構造が与えられた向き付けられた境界つき擬3次元多様体 (oriented triangulated shaped pseudo 3-manifolds) を射とし、対象を2次元の三角形分割された曲面とするような圏から、対象を有限集合、射を緩増加超関数とするような圏への関手の族を定める。ただし、圏全体ではなく、射の合成が定義できる categoroid 上に制限した関手である。特に頂点に全順序を入れた四面体に対しては、Faddeev の量子二重対数関数  $\Phi_b$  や Dirac のデルタ超関数を用いて緩増加超関数が定められる。Andersen, Kashaev の TQFT

---

\* E-mail:soichiro.uemura@ipmu.jp

から得られる分配関数  $Z_h$  に対しても、その論文内で体積予想に類似の一連の予想が提唱されている。

この予想に関して、 $(S^3, 4_1)$ ,  $(S^3, 5_2)$  に対しては、四面体分割の任意性を除いて証明されている。さらに  $S^3$  内の twist knot に対しては、後述する Andersen-Kashaev の TQFT の定義で用いられるパラメータについて  $b > 0$  の条件下で、四面体分割の任意性を除き、定式化し直した形で証明されている [5].

## 2 Andersen-Kashaev の Teichmüller TQFT について

本節は、Andersen, Kashaev の Teichmüller TQFT [4] の結果をまとめたものである。

### 2.1 oriented triangulated pseudo 3-manifolds

$\mathbb{R}^3$  内の有限個の標準 3 単体のコピーの非交和を考える。それぞれの単体は全順序の頂点を持つとする。頂点の順序は、辺の向きを誘導する。この非交和のいくつかの余次元 1 の面の組みを頂点の順序を保ち、向きを逆にするアフィン同相写像によって貼り合わせ、同一視する。この同一視による商空間  $X$  は向き付けられた辺を持つ CW 複体であり、oriented triangulated pseudo 3-manifold と呼ぶ。 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  に対して、 $\Delta_i(X)$  によって、 $X$  の  $i$  次元の胞体を表す。任意の  $i > j$  に対して、

$$\Delta_i^j(X) = \{(a, b) \mid a \in \Delta_i(X), b \in \Delta_j(a)\}$$

と定める。また自然な写像を

$$\phi_{i,j} : \Delta_i^j(X) \rightarrow \Delta_i(X), \quad \phi^{i,j} : \Delta_i^j(X) \rightarrow \Delta_j(X)$$

と定める。また、標準的な境界写像

$$\partial_i : \Delta_j(X) \rightarrow \Delta_{j-1}(X), \quad 0 \leq i \leq j$$

を、順序付けられた頂点  $v_0, v_1, \dots, v_j$  を持つ  $\mathbb{R}^3$  内の  $j$  次元の単体  $S = [v_0, v_1, \dots, v_j]$  に対して、

$$\partial_i S = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j], \quad i \in \{0, \dots, j\}$$

となるように定める。

### 2.2 Shaped 3-manifolds

$X$  を oriented triangulated pseudo 3-manifold とする。

**定義 1**  $X$  上の shape structure とは、各四面体の各辺に対する面角と呼ばれる正の実数への割り当て

$$\alpha_X : \Delta_3^1(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

であって、各四面体の各頂点から出る 3 つの辺における面角の和が  $\pi$  となるようなものことである。

shape structure を持つ oriented triangulated pseudo 3-manifold は、shaped pseudo 3-manifold と呼ばれる。 $X$  上の shape structure の集合を  $S(X)$  とする。

定義 1 より, 任意の四面体に対して, 反対側の辺同士の面角は等しくなる. 従って, 各四面体には, 反対側の辺の 3 組に対して, 和が  $\pi$  となる 3 つの面角が付随する.

定義 2  $X$  上の各 shape structure に対して, weight 関数

$$w_X : \Delta_1(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

を  $X$  の各辺  $e$  に対して, その周りの面角の和を対応させることで定義する. すなわち, 任意の  $e \in \Delta_1(X)$  に対して,

$$w_X(e) = \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \alpha_X(a)$$

と定める.

定義 3 shaped pseudo 3-manifold  $X$  の辺  $e$  は,  $X$  の内部にあり, かつ  $w_X(e) = 2\pi$  であるとき, balanced と呼ぶ. balanced でない辺は, unbalanced と呼ぶ. ある shaped pseudo 3-manifold  $X$  の全ての辺が balanced であるとき,  $X$  は, fully balanced であると言う.

## 2.3 四面体の反対側の辺の組の集合に対する $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 作用について

$X$  を oriented triangulated pseudo 3-manifold とする.  $X$  上の向きが, 各四面体の各頂点から伸びる 3 つの辺に巡回的な順序を与える. さらに, この巡回順序は, 四面体の反対側の辺の組からなる集合に対しても, 巡回順序を誘導する. 全ての四面体の反対側の辺の組からなる集合を  $\Delta_3^{1/p}(X)$  とする.  $\Delta_3^{1/p}(X)$  は  $\Delta_3^1(X)$  に対して, 全ての四面体の反対側の辺の組によって生成された同値関係による商集合であり, 対応する商写像を

$$p : \Delta_3^1(X) \rightarrow \Delta_3^{1/p}(X)$$

とする. 歪対称な関数

$$\epsilon_{a,b} \in \{0, \pm 1\}, \quad \epsilon_{a,b} = -\epsilon_{b,a}, \quad a, b \in \Delta_3^{1/p}(X)$$

を  $a, b$  が存在する四面体が異なるとき  $\epsilon_{a,b} = 0$  とし,  $a, b$  が存在する四面体が一致し, 巡回順序の下で  $a$  が  $b$  より先行するときに  $\epsilon_{a,b} = 1$  とする.

## 2.4 leveled shaped 3-manifolds

定義 4 leveled shaped 3-manifold とは, shaped pseudo 3-manifold  $X$  と level と呼ばれる実数  $l_X \in \mathbb{R}$  からなる組  $(X, l_X)$  のことである.  $LS(X)$  で,  $X$  上の全ての leveled shaped structure の集合を表すことにする.

定義 5 2 つの leveled shaped pseudo 3-manifold  $(X, l_X)$  と  $(Y, l_Y)$  は  $X$  と  $Y$  の胞体構造のある同型写像

$$h : X \rightarrow Y$$

と, ある関数

$$g : \Delta_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

で以下の条件を満たすものが存在するとき, ゲージ同値であるという.

$$\begin{aligned} \Delta_1(\partial_1(X)) &\subset g^{-1}(0) \\ \alpha_Y(h(a)) &= \alpha_X(a) + \pi \sum_{b \in \Delta_3^1(X)} \epsilon_{p(a), p(b)} g(\phi^{3,1}(b)), \quad \forall a \in \Delta_3^1(X) \\ l_Y &= l_X + \sum_{e \in \Delta_1(X)} g(e) \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha_X(a)}{\pi} \right) \end{aligned}$$

辺上の weight は,  $X$  と  $Y$  がゲージ同値であるとき

$$w_X = w_Y \circ h$$

が成り立つことが示されるため, ゲージ不変であるという.

**定義 6** pseudo 3-manifold  $X$  上の 2 つの leveled shape structure  $(\alpha_X, l_X)$  と  $(\alpha'_X, l'_X)$  は, 定義 5 において,  $h : X \rightarrow X$  を恒等写像として, ゲージ同値であるとき, based ゲージ同値という.

leveled shaped pseudo 3-manifolds 上の (based) ゲージ同値関係は, level を忘れた写像のもとで, shaped pseudo 3-manifolds 上の (based) ゲージ同値関係を誘導する.  $X$  上の based leveled shape structure のゲージ同値類の集合を  $LS_r(X)$ ,  $X$  上の based shape structure のゲージ同値類の集合を  $S_r(X)$  とする.

## 2.5 3-2 Pachner move

$X$  を shaped pseudo 3-manifold とする.  $e$  を 3 つの異なる四面体  $t_1, t_2, t_3$  によって共有される  $X$  の balanced な辺とする.  $S$  を四面体  $t_1, t_2, t_3$  からなる  $X$  の shaped pseudo 3-submanifold とする.  $S$  には, 2 つの四面体  $t_4, t_5$  からなる別の三角形分割  $S_e$  が存在し,  $\partial S$  と  $\partial S_e$  の三角形分割が一致するようにすることができる. これは辺  $e$  を取り除くことで得られ  $\Delta_1(S_e) = \Delta_1(S) \setminus e$  となる (図 1). さらに  $S_e$  上には  $S$  上の shape structure が誘導する weight と同じ weight を誘導する唯一の shape structure が存在する.  $t_i$  の面角を  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  とすると ( $i = 1, 2, 3$  に対し,  $\alpha_i$  を  $e$  における面角とする), 以下の関係式が成立する.

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \beta_2 + \gamma_1, & \alpha_5 &= \beta_1 + \gamma_2 \\ \beta_4 &= \beta_1 + \gamma_3, & \beta_5 &= \beta_3 + \gamma_1 \\ \gamma_4 &= \beta_3 + \gamma_2, & \gamma_5 &= \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned}$$

**定義 7** ある shaped pseudo 3-manifold  $Y$  は,  $S$  を  $S_e$  に置き換えることで  $X$  から得られるとき,  $X$  から,  $e$  に沿って shaped 3-2 Pachner move によって得られると言う.

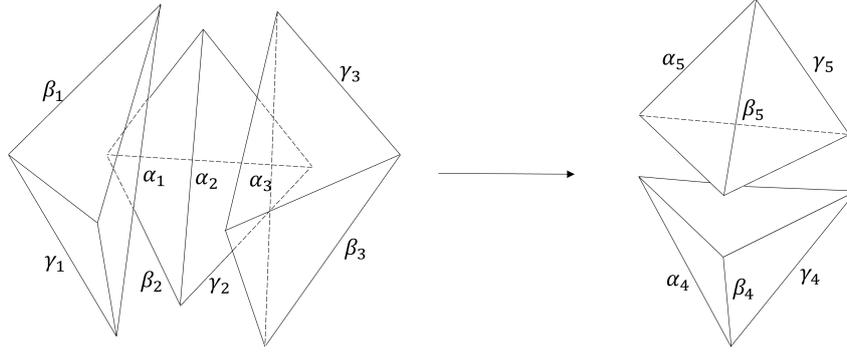


図1 3-2 Pachner move

leveled shaped pseudo 3-manifold  $(Y, l_Y)$  は, leveled shaped pseudo 3-manifold  $(X, l_X)$  から以下の条件を満たすように得られるとき, leveled shaped 3-2 Pachner move によって得られるという. その条件は,  $Y = X_e$  となる  $e \in \Delta_1(X)$  があり,

$$l_Y = l_X + \frac{1}{12} \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \sum_{b \in \Delta_3^1(X)} \epsilon_{p(a), p(b)} \alpha_X(b)$$

となることである.

この作用は, level に依存する不変量が, leveled shaped 3-2 Pachner move に対して不変であるように定められている.

**定義 8** ある (leveled) shaped pseudo 3-manifold  $X$  は, 以下の条件を満たすとき, (leveled) shaped pseudo 3-manifold  $Y$  の Pachner refinement と呼ぶ. その条件とは, (leveled) shaped pseudo 3-manifold の有限列

$$X = X_1, X_2, \dots, X_n = Y$$

で, 任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対し,  $X_{i+1}$  が  $X_i$  から (leveled) shaped 3-2 Pachner move によって得られるようなものが存在することである. 2つの (leveled) shaped pseudo 3-manifold  $X, Y$  は,  $X$  と  $Y$  の Pachner refinement  $X', Y'$  で  $X', Y'$  がゲージ同値であるようなものが存在するとき, 同値であると言う.

**定義 9** oriented triangulated pseudo 3-manifold は,

$$S_r(X) \neq \emptyset$$

かつ

$$H_2(X - \Delta_0(X), \mathbb{Z}) = 0$$

を満たすとき, admissible であるという.

**定義 10** 2つの admissible (leveled) shaped pseudo 3-manifold  $X$  と  $Y$  は  $X$  と  $Y$  の Pachner refinement である (leveled) shaped pseudo 3-manifold  $X', Y'$  のゲージ同値  $h' : X' \rightarrow Y'$  で, 以下の条件を満たすようなものが存在するとき, admissibly equivalent という.

$$\Delta_1(X') = \Delta_1(X) \cup D_X, \quad \Delta_1(Y') = \Delta_1(Y) \cup D_Y$$

かつ

$$h'(S_r(X') \cap \tilde{\Omega}_{X',r}(D_X)^{-1}(2\pi)) \cap \tilde{\Omega}_{Y',r}(D_Y)^{-1}(2\pi) \neq \emptyset.$$

## 2.6 categoroid

**定義 11** categoroid  $\mathcal{C}$  は対象の族  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  と  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  の任意の 2 つの対象  $A, B$  の組に対する射の集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  で次の 2 つの性質を満たすものから構成される.

1. 任意の 3 つの対象  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  に対して合成可能な射と呼ばれる部分集合

$$K_{A,B,C}^{\mathcal{C}} \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$$

と射の合成が結合的になるような合成写像

$$\circ : K_{A,B,C}^{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

が存在する.

2. 任意の対象  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  に対して, 任意の射  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  と合成可能な恒等射  $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$  が存在し,

$$\text{id}_A \circ f = f \quad \text{かつ} \quad g \circ \text{id}_A = g$$

を満たす.

## 2.7 admissible leveled shaped pseudo 3-manifold の categoroid について

leveled shaped pseudo 3-manifold の同値類は, コボルディズムのなす圏  $\mathcal{B}$  の射をなし, 対象が三角形分割された曲面で, 射の合成は辺の向きを保ち, 面の向きを逆にする CW-同相写像によって境界の対応する部分を貼り合わせることで, 面角の明らかな合成と level の和を伴うものである. 境界の分割の仕方によって, 同一の leveled shaped pseudo 3-manifold であっても,  $\mathcal{B}$  の異なる射と解釈され得るが, 以下に述べるような標準的な境界の分割の仕方がある.

順序付けられた頂点  $v_0, v_1, v_2, v_3$  を持つ  $\mathbb{R}^3$  内の四面体  $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$  に対して, その符号を

$$\text{sign}(T) = \text{sign}(\det(v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0))$$

とし, 面の符号を

$$\text{sign}(\partial_i T) = (-1)^i \text{sign}(T), \quad i \in 0, \dots, 3$$

と定める.

pseudo 3-manifold  $X$  に対して,  $X$  を構成する四面体の面の符号は,  $X$  の境界の面上に次の符号関数を誘導する.

$$\text{sign}_X : \Delta_2(\partial X) \rightarrow \{\pm 1\}$$

この符号関数は,  $X$  の境界を等しい個数の三角形からなる 2 つの成分に分解する. 以下では, leveled shaped pseudo 3-manifold  $X$  (の同値類) は, 対象  $\partial_- X, \partial_+ X$  間の  $\mathcal{B}$  射だとみなす. つまり,

$$X \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\partial_- X, \partial_+ X).$$

Andersen, Kashaev の TQFT は, 圏  $\mathcal{B}$  全体全体では定義されず, admissible な射の admissible な同値類のなす sub-categroid 上で定義される.

**定義 12** admissible な leveled shaped pseudo 3-manifold たちのなす categroid  $\mathcal{B}_a$  は, leveled shaped pseudo 3-manifold のなす圏の sub-categroid であって, 射が admissible な leveled shaped pseudo 3-manifold の admissible な同値類からなるものである. この sub-categroid における合成写像は圏  $\mathcal{B}$  から誘導され, 合成可能な射は

$$K_{A,B,C}^{\mathcal{B}_a} = \{(X_1, X_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}_a}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{B}_a}(B, C) \mid H_2(X_1 \circ X_2 - \Delta_0(X_1 \circ X_2), \mathbb{Z}) = 0\}$$

である.

## 2.8 TQFT 関手

Andersen, Kashaev の TQFT は, admissible leveled shaped pseudo 3-manifold からなるコボルディズムのなす categroid  $\mathcal{B}_a$  から, 後述する緩増加超関数のなす categroid  $\mathcal{D}$  への関手の族  $\{F_h\}_{h \in \mathbb{R}}$  を構成したものである.

(複素) 緩増加超関数のなす空間  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  は, (複素) Schwartz 空間  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  上の連続線型汎関数のなす空間であった.

**定義 13** categroid  $\mathcal{D}$  は, 対象として有限集合をもち, 2つの有限集合  $n, m$  に対して,  $n$  から  $m$  への射の集合は,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, m) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n \sqcup m})$$

である.

$\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$  で,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  から,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  への連続な線型写像のなす空間を表す.

任意の  $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  に対して,

$$\phi(f)(g) = \tilde{\phi}(f \otimes g)$$

で定義される同型写像

$$\tilde{\cdot} : \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n \sqcup m}) \quad (1)$$

が存在する.

任意の  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$  に対して, 次のように定義される唯一の随伴  $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$  が存在する.

任意の  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ ,  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対して,

$$A^*(f)(g) = \overline{A(\bar{g})(\bar{f})}$$

**定義 14** 関手  $F : \mathcal{B}_a \rightarrow \mathcal{D}$  は,

$$F(X^*) = F(X)^*$$

となるとき  $*$ -関手と呼ばれる. ここで  $X^*$  は  $X$  に  $X$  と反対の向きを入れたもの,  $F(X)^*$  は  $F(X)$  の双対写像である.

Andersen-Kashaev の TQFT における関手を構成するのに重要な役割を果たすのが, Faddeev の量子二重対数関数 [6] である.

**定義 15** Faddeev の量子二重対数関数は,  $|\Im z| < \frac{1}{2}|\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1}|$  で定義される 2 つの複素変数  $z, \mathbf{b}$  を引数とする関数

$$\Phi_{\mathbf{b}}(z) := \exp\left(\int_C \frac{e^{-2izw} dw}{4 \sinh w \mathbf{b} \sinh\left(\frac{w}{\mathbf{b}}\right)w}\right)$$

である. ここで,  $C$  は, 実軸に沿って進み, 原点の近傍で上半平面へ逸れ, 関数方程式

$$\Phi_{\mathbf{b}}(z - i\mathbf{b}^{\pm 1}/2) = (1 + e^{2\pi\mathbf{b}^{\pm 1}z})\Phi_{\mathbf{b}}(z + i\mathbf{b}^{\pm 1}/2)$$

によって,  $z \in \mathbb{C}$  上の有理関数へ拡張する.

$\Phi_{\mathbf{b}}(z)$  は,

$$\hbar := (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})^{-2}$$

によって定義される  $\hbar$  を通じてのみ,  $\mathbf{b}$  に依存する.

**定理 16** (Andersen, Kashaev) 任意の  $\hbar \in \mathbb{R}_+$  に対して, 以下の条件を満たす唯一の  $*$ -関手が存在する.

任意の  $A \in \text{Ob}\mathcal{B}_a$  に対して,  $F_{\hbar}(A) = \Delta_2(A)$  であり, 任意の admissibly leveled shaped pseudo 3-manifold  $(X, l_X)$  に対して,  $\mathcal{D}$  における対応する射は,

$$F_{\hbar}(X, l_X) = Z_{\hbar}(X)e^{i\pi\frac{l_X}{4\hbar}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\Delta_2(\partial X)})$$

となる. ここで,  $Z_{\hbar}(X)$  は,  $\text{sign}(T) = 1$  となる四面体  $T$  に対して,

$$Z_{\hbar}(T)(x) = \delta(x_0 + x_2 - x_1) \frac{\exp\left(2\pi i(x_3 - x_2)\left(x_0 + \frac{\alpha_3}{2i\sqrt{\hbar}}\right) + \pi i\frac{\varphi_T}{4\hbar}\right)}{\Phi_{\mathbf{b}}\left(x_3 - x_2 + \frac{1 - \alpha_1}{2i\sqrt{\hbar}}\right)}$$

となるように定められる. ここで,  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数であり,

$$\varphi_T := \alpha_1\alpha_3 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{3} - \frac{2\hbar + 1}{6}, \quad \alpha_i := \frac{1}{\pi}\alpha_T(\partial_0\partial_i T), \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

$$x_i := x(\partial_i(T)), \quad x : \Delta_2(\partial T) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$Z_{\hbar}(X)$  や  $Z_{\hbar}(T)$  を分配関数と呼ぶ. admissible pseudo 3-manifold  $X$  に対して, Andersen-Kashaev の TQFT 関手は, 次の well-defined な関数を与える.

$$F_{\hbar} : LS_r(X) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\partial X}).$$

$\partial X = \emptyset$  のとき,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\partial X}) = \mathbb{C}$  であり, この場合は  $LS_r(X)$  上の複素数値関数を得る. 特に, 任意の fully balanced admissible leveled shaped 3-manifold 上の関手  $F_{\hbar}$  の値は, 複素数であり, これは, 2 つの fully balanced admissible leveled shaped 3-manifold が admissibly equivalent ならば,  $F_{\hbar}$  は, これらに同一の複素数を割り当てるという意味の下で, 位相不変量である. 以下の節では,  $\mathbf{b}$  を

$$\hbar := (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})^{-2} \in \mathbb{R}_+$$

となるようにとる.

## 2.9 one vertex H-triangulation

$(M, K)$  を向き付けられた閉 3 次元多様体  $M$  と  $M$  に含まれる結び目  $K$  の組とする.  $(M, K)$  の one vertex H-triangulation とは, 頂点の数が 1 で, 結び目  $K$  を表す 1 つの 辺を伴う四面体分割のことである.

## 2.10 記法

oriented triangulated pseudo 3-manifold  $X$  を, それを構成する頂点が  $0, 1, 2, 3$  で順序付けられた  $T_1, \dots, T_N$  の  $N$  個の四面体と辺の向きを保つ面間の貼り合わせによる同値関係  $\sim$  を用いて  $X = (T_1, \dots, T_N, \sim)$  と表すことにする.  $X$  上の shape structure  $S(X)$  に対応する集合  $\mathcal{S}_X$  を

$$\mathcal{S}_X := \left\{ \alpha_X = (2\pi a_1, 2\pi b_1, 2\pi c_1, \dots, 2\pi a_N, 2\pi b_N, 2\pi c_N) \in (0, \pi)^{3N} \mid \forall k \in \{1, \dots, N\}, a_k + b_k + c_k = \frac{1}{2} \right\}$$

と表し,  $\mathcal{S}_X$  も shape structure と呼ぶ.

ここで  $2\pi a_k$  (各々  $2\pi b_k, 2\pi c_k$ ) は, 四面体  $T_k$  の辺  $\vec{01}$  (各々  $\vec{02}, \vec{03}$ ) とその反対側の辺上の面角の値を表す.

$a_k, b_k, c_k$  が  $[0, \frac{1}{2}]$  に値を持つような  $\mathcal{S}_X$  の閉包を  $\overline{\mathcal{S}_X}$  と表し, weight 関数についても, 拡張して考える.

$X$  上の fully balanced な shape structure を angle structure と呼び  $\mathcal{A}_X := \{\alpha_X \in \mathcal{S}_X \mid \forall e \in \Delta_1(X), w_X(e) = 2\pi\}$  で定め,  $X$  上の拡張された angle structure を  $\overline{\mathcal{A}_X} := \{\alpha_X \in \overline{\mathcal{S}_X} \mid \forall e \in \Delta_1(X), w_X(e) = 2\pi\}$  で定める.

shaped pseudo 3-manifold を根底となる oriented triangulated pseudo 3-manifold  $X$  と shape structure  $\alpha_X \in \mathcal{S}_X$  の組  $(X, \alpha_X)$  として表すこともある.  $(X, \alpha_X)$  上の weight 関数を  $w_{X, \alpha_X}$  と表す.

## 3 主定理

著者は,  $S^3$  内の結び目  $7_3$  に対して, 条件  $b > 0$  の下で, 以下の定式化し直した定理を証明した [7].

**定理 17 (主定理)**  $S^3$  に含まれる双曲結び目  $7_3$  に対して,  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{C}$  上の以下の性質を満たす関数  $J_{S^3, 7_3}(\hbar, x)$  が存在する.

(1)  $S^3$  内の結び目  $7_3$  の補空間のある理想四面体分割  $X$  と  $X$  上の任意の angle structure  $\alpha_X \in \mathcal{A}_X$  に対して, ゲージ不変な面角に関する実線形結合  $\lambda(\alpha_X), \mu(\alpha_X)$  と, (ゲージ不変とは限らない) 面角に関する実 2 次多項式  $\phi(\alpha_X)$  で, 次式が成立するようなものが存在する.

$$Z_{\hbar}(X, \alpha_X) = e^{i \frac{\phi(\alpha_X)}{\hbar}} \int_{\mathbb{R}_+ - \frac{i\mu(\alpha_X)}{\sqrt{\hbar}}} J_{S^3, 7_3}(\hbar, x) e^{-\frac{x\lambda(\alpha_X)}{\sqrt{\hbar}}} dx$$

(2)  $(S^3, 7_3)$  のある one vertex H-triangulation  $Y$  に対して, 結び目  $7_3$  を表す辺  $\vec{K}$  を含む四面体を  $Z$  とする. 全ての  $b > 0$ ,  $w_{Y, \tau}$  が辺  $\vec{K}$  上で 0 で, その他の辺上で  $2\pi$  となるような全ての

$\tau \in \overline{\mathcal{S}}_Z \times \mathcal{S}_{Y \setminus Z}$  に対して、面角に関する実2次多項式  $\varphi(\tau)$  で、次式が成立するようなものが存在する.

$$\lim_{\alpha_Y \rightarrow \tau, \alpha_Y \in \mathcal{S}_Y} \Phi_b \left( \frac{\pi - w_{Y, \alpha_Y}(\vec{K})}{2\pi i \sqrt{\hbar}} \right) Z_{\hbar}(Y, \alpha_Y) = e^{i \frac{\varphi(\tau)}{\hbar} - i \frac{\pi}{12}} J_{S^3, 7_3}(\hbar, 0)$$

(3)  $S^3$  内の結び目  $7_3$  の補空間の双曲体積は、以下の極限によって得られる.

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0^+} 2\pi \hbar \log |J_{S^3, 7_3}(\hbar, 0)| = -\text{Vol}(S^3 \setminus 7_3)$$

## 4 主定理の証明の概略

証明の方針は、[5] と同様の方針で行い以下に述べる. まず、 $S^3$  内に埋め込まれた結び目  $7_3$  に対して、結び目を1つの四面体の1辺とする  $S^3$  の one vertex H-triangulation を求め、次にその結び目を1点に潰すことで補空間  $S^3 \setminus 7_3$  の理想四面体分割を求める. このようにして得られた四面体分割に対して、分配関数の計算を行う. この計算結果により、定理 17(1), (2) の成立が示される. さらに、上述で求めた補空間の理想四面体分割に、完備双曲計量に対応するような面角の構造を与えることができる幾何性を証明する. 一方、関数  $J_{S^3, 7_3}$  は、積分経路が angle structure の元でパラメータ付けられた積分で表されるが、特に、angle structure の元として、この完備双曲計量に対応する面角を選び、 $J_{S^3, 7_3}$  を古典二重対数関数を用いた積分と比較して評価することで、定理 17(3) が証明される. さらに、[7] の付録では、鞍点法を用いた近似計算によっても、定理 17(3) の成立を確かめた.

## 参考文献

- [1] Witten, E.: Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.* **121**(3), 351–399 (1989)
- [2] Kashaev, R. M.: The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. *Lett. Math. Phys.* **39**(3), 269–275 (1997)
- [3] Murakami, H., Murakami, J.: The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. *Acta Math.* **186**(1), 85–104 (2001)
- [4] Andersen, J.E., Kashaev, R.: A TQFT from quantum Teichmüller theory. *Comm. Math. Phys.* **330**(3), 887–934 (2014)
- [5] Ben, A.F., Guéritaud, F., Pigué-Nakazawa, E.: Geometric triangulations and the Teichmüller TQFT volume conjecture for twist knots. arXiv: 1903.09480 (2019)
- [6] Faddeev, L. D.: Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group. *Lett. Math. Phys.* **34**(3), 249–254 (1995)
- [7] Uemura, S. : A proof of the Teichmüller TQFT volume conjecture for  $7_3$  knot. arXiv: 2307.12848 (2023)