

グラフのラベル付き辺に付随した互換の積

北海道大学 大学院理学院 数学専攻

内海 凌 (Ryo UCHIUMI) *

概要

グラフのラベル付き辺に付随した互換の積は頂点集合の置換を与える。Dénes (1959) は、任意のラベル付けによる置換が巡回置換であることと、グラフが木であることが同値であることを示した。本講演では、Dénes の主張における符号付きグラフによるアナロジーと、巡回置換を与えるラベル付けをもつグラフのグラフ埋め込みによる特徴づけを与える。内容の一部は、辻栄氏^{*1}との共同研究による。

1 辺順序と互換の積

1.1 グラフの定義と用語

n を正の整数とし、 $[n] := \{1, \dots, n\}$ とおく。本論文における (有限単純) グラフ ((finite simple) graph) \mathcal{G} とは、頂点の集合 $V_{\mathcal{G}}$ と辺の集合 $E_{\mathcal{G}}$ の組で、

- $V_{\mathcal{G}} = [n]$;
- $E_{\mathcal{G}}$ は $V_{\mathcal{G}}$ の位数 2 の部分集合からなる集合

となるものをいい、 $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ と書く。以下、 $m := \#E_{\mathcal{G}}$ とする。辺 $e = \{u, v\}$ に対して、頂点 u, v を e の端点 (endpoint) という。頂点 v を端点にもつ辺の集合を $I_{\mathcal{G}}(v)$ で表す。2 つの頂点の間に複数の辺 (多重辺 (multiple edge)), 2 つの端点が一致している辺 (ループ (loop)) を許容した多重グラフ (multigraph) を考えることもある。以下特に断らない限り、グラフ \mathcal{G} は多重グラフではないとする。

\mathcal{G}, \mathcal{H} をグラフとする。 \mathcal{H} が \mathcal{G} の部分グラフ (subgraph) であるとは、 $V_{\mathcal{H}} \subseteq V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{H}} \subseteq E_{\mathcal{G}}$ を満たすときにいう。特に $V_{\mathcal{H}} = V_{\mathcal{G}}$ であるとき、 \mathcal{G} の部分グラフ \mathcal{H} は全域 (spanning) であるという。グラフ \mathcal{G} から部分グラフ \mathcal{H} の辺をすべて除いたグラフを $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ と書く。つまり、 $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}} \setminus E_{\mathcal{H}})$ である。

グラフ \mathcal{G} の walk とは、辺の列 $W = (e_1, \dots, e_q)$ のことで、頂点の列 (v_0, \dots, v_q) で $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ となるものをいう。 v_0, v_q を walk W の端点 (endpoint) という。walk W が trail であるとは、 W の辺がすべて異なるときにいう。walk W が path であるとは、 W の頂点がすべて異なるときにいう。walk W が closed であるとは、端点が一一致しているときにいい、グラフ \mathcal{G} の cycle とは、

* E-mail: ryo.uchiumi@math.sci.hokudai.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

*1 北海道教育大学旭川校准教授

closed walk のうち、頂点 $v_0 = v_q, v_1, \dots, v_{q-1}$ が相異なるときにいう。

グラフ G の 2 つの頂点 u, v が連結 (**connected**) であるとは、 u, v を端点とする G の path が存在するときにいう。グラフが連結 (**connected**) であるとは、任意の 2 頂点が連結であるときにいう。グラフ G の連結成分 (**connected component**) とは、 G の極大連結部分グラフのことをいう。

木 (**tree**) とは、cycle をもたない連結グラフのことをいう。グラフ G が木であるためには、次の条件のうち少なくとも 2 つを満たすことが必要十分である:

- (1) G が連結;
- (2) G が cycle をもたない;
- (3) G がちょうど $n - 1$ 本の辺をもつ。つまり、 $\#E_G = \#V_G - 1$ 。

グラフが森 (**forest**) であるとは、すべての連結成分が木であるときにいう。グラフ G は連結であるとき、 G の全域部分グラフとして木をもつ。これを全域木 (**spanning tree**) という。

1.2 互換の積

G をグラフとする。各辺 $e = \{u, v\}$ に対して、端点を入れ換える互換 $\tau_e := (u, v) \in \mathfrak{S}_n$ を対応づける。ただし、 \mathfrak{S}_n は n 次対称群である。

グラフ G の辺順序 (**edge ordering**) とは、辺の集合 E_G の全順序 \leq_ω のことをいい、 $\omega = (e_1, \dots, e_m)$ のように表す。ただし、 $i \leq j$ のとき $e_i \leq_\omega e_j$ であるものとする。辺順序 $\omega = (e_1, \dots, e_m)$ に対して、互換の積 π_ω を

$$\pi_\omega := \tau_{e_m} \cdots \tau_{e_1}$$

で与える (積の順序が作用の順であることに注意)。以下、辺 e_i に対応する互換を τ_i と表すことがある。

辺順序 ω による互換の積 π_ω のサイクル分解は、直接的な計算をすることなく、グラフ G のいくつかの trail を観察するだけで求めることができる。辺順序 $\omega = (e_1, \dots, e_m)$ および各頂点 v に対して、 E_G の部分集合 $T_\omega(v)$ を

$$T_\omega(v) := \{ e_i \in E_G \mid \tau_i \tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) \neq \tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) \}$$

で定める。ただし、 $i = 1$ のとき、 $\tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) = v$ とする。 $T_\omega(v) = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_s}\}$ ($j_1 < \dots < j_s$) と表せるとき、辺の列 $\gamma_\omega(v)$ を

$$\gamma_\omega(v) := (e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \tag{1.1}$$

で定義する。 $\gamma_\omega(v)$ は v , $\pi_\omega(v)$ を端点とする trail である。 $v_0 := v$, $e_{j_k} = \{v_{k-1}, v_k\}$ ($k \in \{1, \dots, s\}$) とするとき、 $\gamma_\omega(v)$ は次のようにして、 ω による辺のラベル付けをしたグラフ G の観察だけで求めることができる:

- (1) 最初の辺 e_{j_1} は、 $I_G(v_0)$ の中で最小のラベルをもつ辺とする。
- (2) 各 $k \geq 2$ に対して、 辺 e_{j_k} は $I_G(v_{k-1})$ の中で $e_{j_{k-1}}$ の次に大きいラベルをもつ辺とする。
- (3) (2) を辺 e_{j_k} が $I_G(v_k)$ の中で最大のラベルをもつ辺となるまで繰り返す。

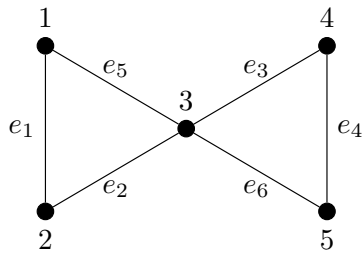


図1 butterfly graph.

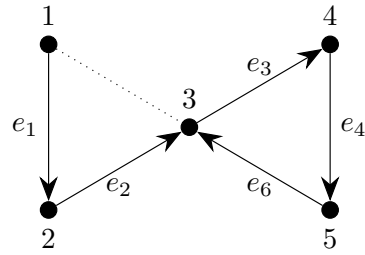


図2 trail $\gamma_\omega(1)$.

例 1.1. \mathcal{G} を図 1 で与えるグラフ (butterfly graph) とし, $\omega = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ をその辺順序とする. このとき, 互換の積 π_ω は

$$\pi_\omega = \tau_6 \tau_5 \tau_4 \tau_3 \tau_2 \tau_1 = (3\ 5)(1\ 3)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2\ 5\ 4)$$

となる. また, 各 trail $\gamma_\omega(v)$ は次のように求めることができる (図 2 を参照):

$$\begin{aligned} \gamma_\omega(1) &= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_6) && (1 \text{ から } 3 \text{ への trail}), \\ \gamma_\omega(2) &= (e_1, e_5, e_6) && (2 \text{ から } 5 \text{ への trail}), \\ \gamma_\omega(3) &= (e_2) && (3 \text{ から } 2 \text{ への trail}), \\ \gamma_\omega(4) &= (e_3, e_5) && (4 \text{ から } 1 \text{ への trail}), \\ \gamma_\omega(5) &= (e_4) && (5 \text{ から } 4 \text{ への trail}). \end{aligned}$$

1.3 full cyclic permutation ordering と Dénes の定理

定義 1.2. グラフ \mathcal{G} の辺順序 ω が full cyclic permutation ordering であるとは, 互換の積 π_ω が長さ n の巡回置換であるときにいう.

例 1.1 で与えた butterfly graph の辺順序は full cyclic permutation ordering である. 本講演では, full cyclic permutation ordering をもつグラフに注目する. その上で, 次の Dénes による定理は重要である:

定理 1.3 ([Dén59, §2, Theorem 1]. [Mos89, §2, Lemma], [Paw22, §2, Lemma 2.1] も参照). グラフ \mathcal{G} に対して, 次は同値である:

- (i) \mathcal{G} の任意の辺順序が full cyclic permutation ordering である;
- (ii) \mathcal{G} が木である.

この定理は, 長さ n の巡回置換における, $n - 1$ 個の互換の積による分解の総数を計算する過程で得られたものである. 近年においては, 彩色対称多項式 (chromatic symmetric function) の研究において注目されている. 特に Pawlowski [Paw22] では, グラフと対称群で生成される群代数を関連付ける過程で, Dénes の定理が重要な役割を果たしている.

本講演では, Dénes の定理を次の 2 つの観点から類推する:

- (a) full cyclic permutation ordering をもつグラフとはどのようなグラフか.

(b) グラフ \mathcal{G} を符号付きグラフ, 対称群 \mathfrak{S}_n を超八面体群 \mathfrak{H}_n にそれぞれ変えた場合, Dénes の定理と同様の主張は成り立つのか.

本講演における主結果は, 定理 2.3 と定理 3.4 であり, その内容は Tsujie-U [TU23] および Uchiyumi [Uch23] による.

2 full cyclic permutation ordering とグラフ埋め込み

この章では, full cyclic permutation ordering をもつグラフを, グラフ埋め込みの観点で特徴づける. グラフ埋め込みについては, [MT01] が詳しい.

2.1 グラフ埋め込み

以下, グラフ \mathcal{G} は連結であるとする. 実際, 連結でないグラフが full cyclic permutation ordering をもつことはない.

(連結な) グラフ \mathcal{G} に対して, $\beta(\mathcal{G}) := \#E_{\mathcal{G}} - V_{\mathcal{G}} + 1 = m - n + 1$ を **Betti 数** という. full cyclic permutation ordering ω をもつグラフ \mathcal{G} は, 長さ n の巡回置換 π_{ω} が m 個互換の積および $n - 1$ 個の互換の積による表示をそれぞれもっているため, その Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ は必ず偶数になる.

グラフ \mathcal{G} を位相空間とみなす. Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ は \mathcal{G} の位相空間としての 1 次 Betti 数に等しい. Σ を向き付け可能閉曲面とし, g_{Σ} をその種数 (genus) とする. $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \Sigma$ を埋め込み (単射な連続写像) とする. その像 $\iota(\mathcal{G})$ の補空間の各連結成分は面 (**face**) と呼ばれ, その個数を f_{ι} で表す. 埋め込み $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \Sigma$ が **2-胞体埋め込み (2-cell embedding)** であるとは, すべての面が開円盤に同相であるときにいう.

任意の 2-胞体埋め込み $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \Sigma$ に対して,

$$\#V_{\mathcal{G}} - \#E_{\mathcal{G}} + f_{\iota} = 2 - 2g_{\Sigma}$$

となることがよく知られている. この等式を変形することで

$$2g_{\Sigma} + f_{\iota} = \beta(\mathcal{G}) + 1 \tag{2.1}$$

が得られる. つまり, 閉曲面の種数を増やせば, その面の個数は減ることがわかる. \mathcal{G} の最大種数 (**maximum genus**) を, 2-胞体埋め込み $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \Sigma$ が存在するような閉曲面 Σ の種数 g_{Σ} の最大値として定義し, $\gamma_{\max}(\mathcal{G})$ で表す. このとき, 等式 (2.1) によって,

$$\gamma_{\max}(\mathcal{G}) \leq \left\lfloor \frac{\beta(\mathcal{G})}{2} \right\rfloor \tag{2.2}$$

であることがわかる. ただし, $\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数である. 特に, 不等式 (2.2) の等号が成立するとき, \mathcal{G} は **upper embeddable** であるという. 定義から, 次の同値性がわかる:

- (ii) \mathcal{G} が 2-胞体埋め込みで, 面の数がちょうど 1 であるものが存在する;
- (iii) \mathcal{G} の Betti 数が偶数で, \mathcal{G} が upper embeddable.

Jungerman [Jun78] および Xuong [Xuo79b] はそれぞれ独立に、グラフが upper embeddable であるための必要十分条件を次のように与えている:

定理 2.1 ([Jun78, Theorem 2], [Xuo79b, Theorem A]). グラフ \mathcal{G} が連結であるとき、次は同値である:

- (iii) \mathcal{G} の Betti 数が偶数で、 \mathcal{G} が upper embeddable;
- (iv) \mathcal{G} のある全域木 \mathcal{T} が存在し、 $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ のすべての連結成分が偶数個の辺をもつ.

また、Xuong による次の事実も重要である:

補題 2.2 ([Xuo79a, Lemma 3]). グラフ \mathcal{G} が upper embeddable で、Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ が偶数であるとする. \mathcal{G} が木でなければ、ある 2 辺 e', e'' が存在し、 $\mathcal{G} \setminus \{e', e''\}$ は upper embeddable となる.

(a) について、辻栄氏との共同研究において次を得た:

定理 2.3 ([TU23, Theorem 1.4]). グラフ \mathcal{G} に対して、次は同値である:

- (i) \mathcal{G} が full cyclic permutation ordering をもつ;
- (ii) \mathcal{G} の 2-胞体埋め込みで、面の数がちょうど 1 であるものが存在する;
- (iii) \mathcal{G} の Betti 数が偶数で、 \mathcal{G} が upper embeddable;
- (iv) \mathcal{G} のある全域木 \mathcal{T} が存在し、 $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ のすべての連結成分が偶数個の辺をもつ.

ただし、(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) は上で述べた通り、既に知られている結果である.

定理 2.3 のうち、(iii) \Rightarrow (i) は、補題 2.2 を用いた Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ の帰納法で示すことができる.

2.2 rotation system

定理 2.3 の残りの証明として、[TU23] では (i) \Rightarrow (ii) を示している. 以下では、その概略を述べる.

集合 $X = \{x_1, \dots, x_t\}$ 上の **cyclic order** とは、 X の全順序全体における同値関係

$$(x_1, x_2, \dots, x_t) \sim (x_2, \dots, x_t, x_1)$$

の同値類のことをいい、 $[x_1, \dots, x_t]$ などと表す. グラフ \mathcal{G} の **rotation system** とは、各頂点 v における $I_{\mathcal{G}}(v)$ 上の cyclic order ρ_v の集まり $\rho := (\rho_v)_{v \in V_{\mathcal{G}}}$ のことをいう. グラフ \mathcal{G} に対して、集合 $D_{\mathcal{G}}$ を

$$D_{\mathcal{G}} := \{ (e, v) \in D_{\mathcal{G}} \mid e \in I_{\mathcal{G}}(v) \}$$

で定め、 $D_{\mathcal{G}}$ の各元を **dart** と呼ぶ. 辺 $e = \{u, v\}$ に対して、dart (e, v) は e の v から u への向きを与えている.

グラフ \mathcal{G} の rotation system $\rho = (\rho_v)_{v \in V_{\mathcal{G}}}$ をとり、 $\rho_v = [e_1, \dots, e_t]$ であるとする. このとき、写像 $\sigma : D_{\mathcal{G}} \rightarrow D_{\mathcal{G}}$ を

$$\sigma(e_i, v) := (e_{i+1}, v)$$

で定義する. また, 辺 $e = \{u, v\}$ に対して $\alpha(e, v) := (e, u)$ と定め, 写像 $\phi: D_G \rightarrow D_G$ を

$$\phi := \sigma \circ \alpha \tag{2.3}$$

で定義する*2. 図3では, $e = \{u, v\}$ を辺にもつ dart $d = (e, v)$ の ϕ の作用における推移の様子を表している.

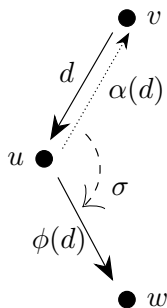


図3 ϕ による dart d の推移.

グラフ G の 2-胞体埋め込みが与えられたとき, 各 $I_G(v)$ 上に時計回りの順序を定めることで, G の rotation system が得られる. 一方, rotation system から得られる写像 ϕ の各軌道 W は, W の各 dart を辺とした多角形を形成する. これらの多角形をグラフの辺に対応する dart で接着することで, 向き付け可能閉曲面への 2-胞体埋め込みを得たことになる (図4を参照). 実際, rotation system と 2-胞体埋め込みの間には (閉曲面の向きを保った同相を除いて) 一対一対応が存在する (詳細は [MT01, §3.2]などを参照). また, $D_G/\langle\phi\rangle$ を写像 ϕ による D_G の軌道全体の集合とすると, $f_\iota = \#(D_G/\langle\phi\rangle)$ がわかる.

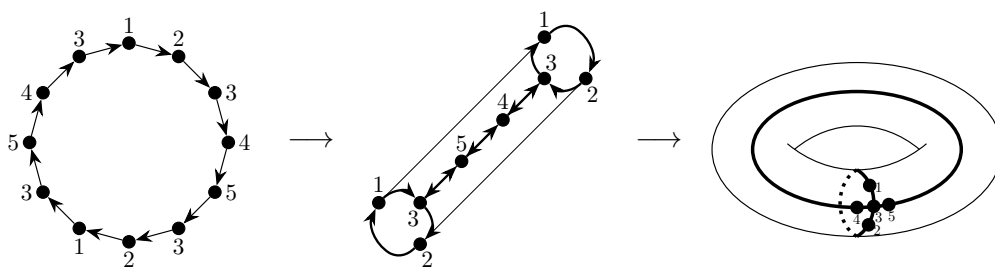


図4 図1のグラフ G の辺順序 ω から 2-胞体埋め込みを得る過程. 十二角形が円筒を経て Torus になっている.

グラフ G の辺順序 ω に対して, 各 $I_G(v)$ 上に ω から誘導される cyclic order $\rho_{\omega, v}$ を定めることで, rotation system $\rho_\omega = (\rho_{\omega, v})_{v \in V_G}$ が得られる. ϕ_ω を (2.3) で定義される写像とする. 各 $v \in V_G$ に対して, f_v を ω に関する $I_G(v)$ の最小元とすると, dart (f_v, v) を含む軌道 $W_\omega(v)$ は, (1.1) で定義した trail $\gamma_\omega(v), \gamma_\omega(\pi_\omega(v)), \dots, \gamma_\omega(\pi_\omega^{q-1}(v))$ を順に繋げて得られる closed walk に対応する. ただし, q は $\pi_\omega^q(v) = v$ を満たす最小の正整数とする. これは, 次の全単射を引き起こす:

*2 流儀によっては, 写像の三つ組 (σ, α, ϕ) あるいは組 (σ, α) のことを rotation system と呼ぶこともある.

補題 2.4 ([TU23, Lemma 3.2]). 写像

$$\Psi : V_{\mathcal{G}}/\langle\pi_{\omega}\rangle \ni [v] \mapsto W_{\omega}(v) \in D_{\mathcal{G}}/\langle\phi_{\omega}\rangle$$

は全単射である.

特に, ω が \mathcal{G} の full cyclic permutation であるとき, rotation system ρ_{ω} から得られる 2-胞体埋め込み ι について

$$f_{\iota} = \#(D_{\mathcal{G}}/\langle\phi_{\omega}\rangle) = \#(V_{\mathcal{G}}/\langle\pi_{\omega}\rangle) = 1$$

であることがわかる. これで, 定理 2.3 の (i) \Rightarrow (ii) が示されたことになる.

3 超八面体群と符号付きグラフ

この章では, グラフの辺と対称群の互換の対応を, 符号付きグラフと超八面体群の互換の対応に拡張する. 超八面体群の定義は [BB10] による. 他にも, [Car72], [Hum90], [Rei93] が詳しい.

3.1 超八面体群

$I_n := \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ とする. n 次超八面体群 (**hyperoctahedral group**) \mathfrak{H}_n とは, I_n の対称群 \mathfrak{S}_{I_n} の部分群

$$\mathfrak{H}_n := \{ \eta \in \mathfrak{S}_{I_n} \mid -\eta(i) = \eta(-i) \text{ for all } i \in I_n \}$$

のことである. この群は, B_n 型の Weyl 群 (つまり, Coxeter 群) であり, Euclid 空間 \mathbb{R}^n に対して, 超立方体 $[-1, 1]^n$ の対称性の群として作用する群である. また, 半直積 $\mathfrak{S}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, リース積 (wreath product) $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_n$ に同型である. 超八面体群の元 η は対称群と同様の表示

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \eta(1) & \eta(2) & \cdots & \eta(n) \end{pmatrix}$$

で表すことができる. 任意の $i \in [n]$ に対して $\eta(i) > 0$ であるとき, η は対称群の置換とみなすことができる. この意味で, n 次対称群 \mathfrak{S}_n は n 次超八面体群 \mathfrak{H}_n の部分群とみなせる.

超八面体群は次の 3 種類の互換をもつ:

- **(positive transposition)** $(i j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix};$
- **(negative transposition)** $(i -j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & -j & \cdots & -i & \cdots & n \end{pmatrix};$
- **(inversion transposition)** $(i -i) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & \cdots & -i & \cdots & n \end{pmatrix}.$

超八面体群はこれらの互換で生成される群である*3.

*3 実際には, $(i -j) = (i -i)(j -j)(i j)$ であるため, 超八面体群は positive transposition, inversion transposition だけで生成できる. \mathfrak{H}_n の極小な生成系は, $n-1$ 個の positive transposition と 1 個の inversion transposition で構成でき, 鏡映群としての simple reflection となる. また, positive transposition で生成される部分群, inversion transposition で生成される部分群 (正規部分群になる) はそれぞれ $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_2^n$ に同型であることに注意したい.

超八面体群における長さ l の巡回置換 σ は,

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{l-1} & i_l \\ \epsilon_1 i_2 & \epsilon_2 i_3 & \cdots & \epsilon_{l-1} i_l & \epsilon_l i_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と表せる. ただし, $i_1, \dots, i_l \in [n]$ とし, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_l$ は符号 $+, -$ を表している. 以下, $\{+, -\}$ は自然な構成によって位数 2 の群として扱う. $\epsilon_j := \epsilon_1 \cdots \epsilon_j$ ($j \in \{1, \dots, l\}$) とおくと, σ を

$$\sigma = (i_1 \ \epsilon_1 i_2 \ \cdots \ \epsilon_{l-1} i_l)_{\epsilon_l} \quad (3.2)$$

と表すこともある (サイクル表示). ただし, $\sigma(\epsilon_{l-1} i_l) = \epsilon_l i_1$ である. $\epsilon_l = +$ であるとき, σ を偶巡回置換 (**even cyclic permutation**) といい, $\epsilon_l = -$ であるときは奇巡回置換 (**odd cyclic permutation**) という. 対称群 \mathfrak{S}_n の長さ l の巡回置換は, 超八面体群 \mathfrak{H}_n においては長さ l の偶巡回置換である. また, 偶巡回置換に inversion transposition を左から一つ掛けたものは奇巡回置換となる.

注意 3.1. 巡回置換における偶奇の違いは顕著である. 実際, 長さ l の偶巡回置換の位数は l であるが, 長さ l の奇巡回置換の位数は $2l$ である. とりわけ, 長さ n の偶巡回置換は, I_n を位数 n の 2 つの軌道 X_1, X_2 に分解し, $j \in X_1$ ならば $-j \in X_2$ という関係にあることがわかる. 一方, 長さ n の奇巡回置換による軌道は I_n に一致し, 対称群 \mathfrak{S}_{I_n} の“巡回置換”となっていることがわかる. 例えば, $\sigma_1 := (1\ 2\ 3\ 4)_+$, $\sigma_2 := (1\ 2\ 3\ 4)_-$ とするとき, I_4 の各元はそれぞれ次のように推移する:

$$\begin{aligned} 1 \xrightarrow{\sigma_1} 2 \xrightarrow{\sigma_1} 3 \xrightarrow{\sigma_1} 4 \xrightarrow{\sigma_1} 1, \quad -1 \xrightarrow{\sigma_1} -2 \xrightarrow{\sigma_1} -3 \xrightarrow{\sigma_1} -4 \xrightarrow{\sigma_1} -1, \\ 1 \xrightarrow{\sigma_2} 2 \xrightarrow{\sigma_2} 3 \xrightarrow{\sigma_2} 4 \xrightarrow{\sigma_2} -1 \xrightarrow{\sigma_2} -2 \xrightarrow{\sigma_2} -3 \xrightarrow{\sigma_2} -4 \xrightarrow{\sigma_2} 1. \end{aligned}$$

3.2 符号付きグラフと互換の積

本講演における符号付きグラフ (**signed graph**) \mathcal{G} とは, 頂点の集合 $V_{\mathcal{G}}$, 符号付き辺の集合 $E_{\mathcal{G}}^+$, $E_{\mathcal{G}}^-$, ループの集合 $L_{\mathcal{G}}$ の四つ組で,

- $V_{\mathcal{G}} = [n]$;
- $E_{\mathcal{G}}^+, E_{\mathcal{G}}^-$ は $V_{\mathcal{G}}$ の位数 2 の部分集合からなる集合;
- $L_{\mathcal{G}}$ は $V_{\mathcal{G}}$ の部分集合

となるものをいい, $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}}^+, E_{\mathcal{G}}^-, L_{\mathcal{G}})$ と書く. 符号付き辺とループをまとめて辺といい, その集合を $E_{\mathcal{G}}$ で表す. 2 頂点の間に符号の異なる 2 つの符号付き辺が存在することがある. つまりこのとき, $E_{\mathcal{G}}^+$ と $E_{\mathcal{G}}^-$ は集合として交わっている. ただし, 2 頂点の間に存在する辺は高々 2 つである.

符号付きグラフ $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}}^+, E_{\mathcal{G}}^-, L_{\mathcal{G}})$ に対して, \mathcal{G} の符号とループを除いたグラフを $\bar{\mathcal{G}} = (V_{\bar{\mathcal{G}}}, E_{\bar{\mathcal{G}}})$ で表す. つまり, $V_{\bar{\mathcal{G}}} = V_{\mathcal{G}}$, $E_{\bar{\mathcal{G}}} = E_{\mathcal{G}}^+ \sqcup E_{\mathcal{G}}^-$ であり, $\bar{\mathcal{G}}$ はループのない多重グラフとなる. \mathcal{G} の符号付き辺 e に対応する $\bar{\mathcal{G}}$ の辺を \bar{e} で表す.

符号付きグラフ \mathcal{G} が符号付き木 (**signed tree**) であるとは, \mathcal{G} がループをもたず, $\bar{\mathcal{G}}$ が多重辺のない木であるときにいう.

符号付きグラフ \mathcal{G} の各辺 e に対して、超八面体群の互換 τ_e を

$$\tau_e = \begin{cases} (i\ j) & e = \{i, j\} \in E_{\mathcal{G}}^+; \\ (i\ -j) & e = \{i, j\} \in E_{\mathcal{G}}^-; \\ (i\ -i) & e = i \in L_{\mathcal{G}}. \end{cases}$$

で対応づける．辺順序 $\omega = (e_1, \dots, e_m)$ に対して、互換の積 π_ω を

$$\pi_\omega := \tau_{e_m} \cdots \tau_{e_1}$$

で与える．符号のない場合と同様に、 π_ω のサイクル分解は、 ω による辺のラベル付けをしたグラフ \mathcal{G} の観察だけで求めることができる．

3.3 符号付きグラフの full cyclic permutation ordering

定義 3.2. 符号付きグラフ \mathcal{G} の辺順序 ω が **even (odd) full cyclic permutation ordering** であるとは、互換の積 π_ω が長さ n の偶 (奇) 巡回置換であるときにいう．

符号付きグラフ \mathcal{G} の辺順序 $\omega = (e_1, \dots, e_m)$ に対して、 ω から誘導される $\bar{\mathcal{G}}$ の辺順序を $\varphi(\omega)$ で表す．すなわち、 $E_{\mathcal{G}}^+ \sqcup E_{\mathcal{G}}^- = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ ($i_1 < \dots < i_t$) であるとき、 $\varphi(\omega) = (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_t})$ である．また、 $\bar{\mathcal{G}}$ の辺順序 $\bar{\omega}$ に対して、 \mathcal{G} の辺順序の集合 $\varphi^{-1}(\bar{\omega})$ を

$$\varphi^{-1}(\bar{\omega}) := \{\omega \mid \varphi(\omega) = \bar{\omega}\}$$

で定める．符号付きグラフ \mathcal{G} の辺順序 ω に対して

$$J_\omega := \{j \in [n] \mid \pi_\omega^{-1}(j) < 0\}$$

とおくとき、互換の積 π_ω の特別な表示として

$$\pi_\omega = \prod_{j \in J_\omega} (j\ -j) \cdot \pi_{\varphi(\omega)}$$

が得られ、さらに $\#J_\omega = \#L_{\mathcal{G}}$ であることがわかる．この表示をもとに、符号付きグラフが full cyclic permutation ordering をもつための条件を次のように得た:

定理 3.3 ([Uch23, Theorem 1.8]). 符号付きグラフ \mathcal{G} について、次は同値である:

- (i) \mathcal{G} が even (odd) full cyclic permutation ordering をもつ;
- (ii) \mathcal{G} のループが偶数 (奇数) 個で、 $\bar{\mathcal{G}}$ が full cyclic permutation ordering をもつ.

よって (b) について、Dénes の定理と定理 3.3 から次を得た:

定理 3.4 ([Uch23, Theorem 1.9]). 符号付きグラフ \mathcal{G} に対して、次は同値である:

- (i) \mathcal{G} の任意の辺順序が even (odd) full cyclic permutation ordering である;
- (ii) \mathcal{G} が偶数 (奇数) 個のループをもつ符号付き木である.

また [Uch23, §3.2] では、定理 3.4 を用いて、長さ n の奇巡回置換における、 n 個の互換の積による分解の総数を組合せ的に計算している．

参考文献

- [BB10] A. V. Borovik and A. Borovik, *Mirrors and Reflections*, Springer New York, New York, NY, 2010.
- [Car72] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the weyl group*, *Compositio Mathematica* **25** (1972), 1–59.
- [Dén59] J. Dénes, *The representation of a Permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs*, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **4** (1959), 63–70.
- [Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, 1 ed., Cambridge University Press, June 1990.
- [Jun78] M. Jungerman, *A characterization of upper-embeddable graphs*, *Transactions of the American Mathematical Society* **241** (1978), no. 0, 401–406.
- [Mos89] P. Moszkowski, *A Solution to a Problem of Dénes: a Bijection Between Trees and Factorizations of Cyclic Permutations*, *European Journal of Combinatorics* **10** (1989), no. 1, 13–16.
- [MT01] B. Mohar and C. Thomassen, *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins studies in the mathematical sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2001.
- [Paw22] B. Pawlowski, *Chromatic symmetric functions via the group algebra of S_n* , *Algebraic Combinatorics* **5** (2022), no. 1, 1–20.
- [Rei93] V. Reiner, *Signed Permutation Statistics and Cycle Type*, *European Journal of Combinatorics* **14** (1993), no. 6, 569–579.
- [TU23] S. Tsujie and R. Uchiumi, *Upper Embeddability of Graphs and Products of Transpositions Associated with Edges*, December 2023, arXiv:2211.05422 [math].
- [Uch23] R. Uchiumi, *Signed graphs and signed cycles of hyperoctahedral groups*, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)* **11** (2023), no. 2, 419–429.
- [Xuo79a] N. H. Xuong, *How to determine the maximum genus of a graph*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **26** (1979), no. 2, 217–225.
- [Xuo79b] ———, *Upper-embeddable graphs and related topics*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **26** (1979), no. 2, 226–232.