Introduction of inverse correspondences between inverse semigroups, and a categorical approach to inverse semigroups

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
内村 朝樹 (Tomoki UCHIMURA)

概要

半群の一種である逆半群は, C^* 環論との深い関係が知られている. 本稿では, 逆半群の間に inverse correspondence と呼ぶ概念を導入する. これは C^* 環論においてよく知られる C^*-correspondence の逆半群論における類似である. 本稿の主題は, 逆半群と inverse correspondence がある種の圏を成すことを示し, この圏における同型を特徴付けることである.

1 導入

本稿は, 半群論の一分野である逆半群論における結果を述べたものであり, 発表者の論文 [Uch23] に基づく. 逆半群論は C^* 環論と密接な関わりがある [Pat99, Exe08].

C^* 環とは, 積と対合を備えた複素線型空間に, 代数的な構造と相性の良い完備ノルムを入れたものである. C^* 環論では非可換・無限次元の C^* 環が頻繁に登場するが, 一般に取り扱いが難しい. そこで, 比較的取り扱いの容易な数学的対象から C^* 環を構成し, C^* 環の性質を構成材料の性質を通して理解することがよくなされている. C^* 環の構成材料には, 群や亜群, そして本稿の主題である逆半群などがある.

近年こうした C^* 環の構成方法の理論において, ある種の圏 (双圏) を用いた圏論的なアプローチが行われている [BMZ13, AM16]. 例えば, 亜群からの C^* 環の構成法は, 亜群のなす双圏 $\mathfrak{Gr}$ から C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ へのある種の関手 (双関手) を成していることが明らかになった [Alb15]. 逆半群からの C^* 環の構成法にも同様の性質を期待したくなるが, $\mathfrak{Corr}$ や $\mathfrak{Gr}$ に相当する双圏は逆半群論において導入されていない. そこで本稿では, C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ を手本として, 逆半群の双圏 $\mathfrak{IC}$ を導入する. また, 双圏 $\mathfrak{IC}$ における同値が, 逆半群論において重要な概念である強森田同値と等価な概念であることを紹介する. 今回導入する双圏 $\mathfrak{IC}$ は, 逆半群から C^* 環への構成法を C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手と見なす際の始域になると期待される.

2 逆半群論の準備

結合的な二項演算を持つ集合を**半群** (semigroup) という. 半群 S が**正則** (regular) であるとは, 任意の元 $s \in S$ に対し, ある元 $t \in S$ が存在し, $sts = s$ と $tst = t$ を満たすことである. このとき t は

s の**一般化逆元** (generalized inverse) であるという．**逆半群** (inverse semigroup) とは, 正則半群であって, 各元に対し一般化逆元がただ 1 つ存在するものをいう．逆半群 S の元 s に対し, ただ 1 つ存在する一般化逆元を s^* と書く．逆半群 S の任意の元 s, t に対し, $s^{**} = s$ や $(st)^* = t^*s^*$ が成り立つ.

例 2.1. 群は逆半群である．群における一般化逆元は, 逆元のことに他ならない.

例 2.2. 位相空間 X に対し, その開集合全体の集合 $\mathcal{O}(X)$ は共通部分をとる操作を演算として逆半群を成す．逆半群 $\mathcal{O}(X)$ の元 U に対し, その一般化逆元は U である.

例 2.3. 位相空間 X, Y, Z を考える．開集合 $U \subset X$, $V \subset Y$ の間の同相写像を X から Y への部分同相写像という．開集合 $U \subset X$, $V, V' \subset Y$, $W \subset Z$ と部分同相写像 $u \colon U \to V$, $v \colon V' \to W$ に対してこれらの合成 vu を, 開集合 $u^{-1}(V \cap V') \subset X$ の元 x に対して $(vu)(x) = v(u(x))$ で定義された部分同相写像とする．位相空間 X, Y の間の部分同相写像全体を $I(X, Y)$ と書く．集合 $I(X) := I(X, X)$ は部分同相写像の合成を演算として逆半群を成す．逆半群 $I(X)$ の元 $u \colon U \to U'$ に対し, 一般化逆元は $u^{-1} \colon U' \to U$ である.

半群 S の元 s が**冪等元** (idempotent) であるとは, $ss = s$ を満たすことをいう．半群 S の冪等元全体を $E(S)$ と書く．正則半群について, 次が成り立つ (証明は [Pat99, Proposition 2.1.1], あるいは [Law98, Theorem 3] を見よ).

命題 2.4. 正則半群 S に対し, S が逆半群であることと, 部分集合 $E(S)$ の元同士が可換であることは同値である.

半群 S とその部分集合 I を考える．任意の元 $s \in S$ と $t \in I$ に対し, $st \in I$ かつ $ts \in I$ が成り立つとき, I は**両側イデアル** (two-sided ideal) であるという．半群の両側イデアルは半群であり, 逆半群の両側イデアルは逆半群である．逆半群 S に対して $E(S)$ の元同士が可換であることの証明を精査すると, 次の命題が成り立つことも分かる.

命題 2.5. 半群 S とその両側イデアル I を考える．両側イデアル I が逆半群なら、任意の $e \in E(S)$ と $f \in E(I)$ に対し, $ef = fe$ が成り立つ.

この命題は定理 4.11 の証明において重要な役割を果たす.

3 C^* 環のなす双圏

圏 (category) とは対象と射の集まりによって構成され, 2 つの射 $f \colon x \to y$, $g \colon y \to z$ に対してはその合成と呼ばれる射 $gf \colon x \to z$ が, 各対象 x に対しては単位射 $1_x \colon x \to x$ が定められている．これらは次の 2 つ (結合律と単位律) を満たすことが要請される.

(i) 任意の射 $f : x \to y$, $g : y \to z$, $h : z \to w$ に対して $h(gf) = (hg)f$ が成り立つ.
(ii) 任意の射 $f : x \to y$ に対して $1_y f = f = f 1_x$ が成り立つ.

ある圏において, 2 つの対象 x, y が**同型** (isomorphic) であるとは, 射 $f \colon x \to y$, $g \colon y \to x$ が存在し,

$gf = 1_x$, $fg = 1_y$ が成り立つことである.

圏の例を 2 つ挙げる. C^* 環 A, B に対して, 積と対合を保つ線型写像 $\sigma\colon A \to B$ を **$*$ 準同型** ($*$-homomorphism) という. C^* 環と $*$ 準同型は, 合成を写像の合成, 単位射を恒等写像と定めることで圏 $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ をなす. 2 つの C^* 環が同型であるとは, この圏 $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ において同型であることをいう.

半群 S, T に対して, 積を保つ写像を**半群準同型** (semigroup homomorphism) という. 2 つの半群 S, T が逆半群であれば, 一般化逆元は自動的に保たれる. 逆半群と半群準同型は, 合成を写像の合成, 単位射を恒等写像と定めることにより圏 $\mathbf{IS}$ をなす. 2 つの逆半群が同型であるとは, この圏 $\mathbf{IS}$ において同型であることをいう.

これに対し, Bénabou によって導入された**双圏** (bicategory) では, 対象, 射, 合成, 単位射に加えて, 2 射と呼ばれる "射の間の射" を考える. 結合律と単位律は要請しないが, 射 $h(gf)$ と $(hg)f$, $1_y f$ と f, f と $f1_x$ は自然な 2 射を通して "同型" であることを要請する. ある双圏において, 2 つの対象 x, y が**同値** (equivalent) であるとは, 射 $f\colon x \to y$, $g\colon y \to x$ が存在し, gf と 1_x, fg と 1_y がそれぞれ何らかの 2 射を通して "同型" であることをいう. 詳細は [Bén67, Lei98] を参照せよ.

第 1 節でも述べたように, C^* 環の構成法の理論において, C^* 環を対象とする双圏 $\mathfrak{Corr}$ が現れる. 以下では双圏 $\mathfrak{Corr}$ の射を導入するために, Hilbert 加群と C^*-correspondence について概説する. 詳細は [Lan95] を参照せよ.

C^* 環 A を考える. 複素線型空間 $\mathcal{E}$ 上の A 作用とは, 双線型写像 $\mathcal{E} \times A \to \mathcal{E}; (\xi, a) \mapsto \xi a$ であって, 任意の $a, a' \in A$ と $\xi \in \mathcal{E}$ に対し, $(\xi a)a' = \xi(aa')$ を満たすものをいう. ***Hilbert** A* **加群** (Hilbert A-module) $\mathcal{E}$ とは, 複素線型空間であって, その上の A 作用と写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$ を備えており, Hilbert 空間と類似した公理を満たすものをいう. 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ は "C^* 環値内積" である. C^* 環 A が複素数体 $\mathbb{C}$ であるとき, Hilbert A 加群は Hilbert 空間に他ならない. 第 4 節で導入される逆 S 集合は, 逆半群 S の作用と "逆半群値内積" を備えた集合として定義される. これは, 逆半群論における Hilbert A 加群の類似である.

Hilbert A 加群 $\mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{E}$ 上の線型写像 f が**随伴可能**であるとは, ある $\mathcal{E}$ 上の線型写像 g が存在して, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ が $\langle g(\eta) \,|\, \xi \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \eta \,|\, f(\xi) \rangle_{\mathcal{E}}$ を満たすことをいう. 随伴可能な $\mathcal{E}$ 上の線型写像全体を $L(\mathcal{E})$ と書く. このとき $L(\mathcal{E})$ は適切な構造を与えることで C^* 環になる. C^* 環 A, B に対し, Hilbert B 加群 $\mathcal{E}$ と, A から $L(\mathcal{E})$ への $*$ 準同型 $\sigma_{\mathcal{E}}$ の組 $(\mathcal{E}, \sigma_{\mathcal{E}})$ を, A から B への *C^*-correspondence* といい, $\mathcal{E}\colon A \to B$ と書く.

C^*-correspondence の例を挙げる. C^* 環 B に対し, 線型空間 B 上の B 作用を右からの掛け算で, 内積を任意の $b, b' \in B$ に対し $\langle b \,|\, b' \rangle_B := b^* b'$ と定義すれば, B は Hilbert B 加群になる. 任意の元 $b \in B$ に対し, b を左から掛ける操作は, Hilbert B 加群 B 上の随伴可能な線型写像である. この見方を通して, Hilbert B 加群 B 上の随伴可能な線型写像全体の成す C^* 環 $L(B)$ は, B を部分 C^* 環として含む. これにより, A から B への $*$ 準同型 $\sigma\colon A \to B$ は, Hilbert B 加群 B と $*$ 準同型 $\sigma\colon A \to B \subset L(B)$ の組による C^*-correspondence を誘導する. この意味において, C^*-correspondence は $*$ 準同型の一般化であると解釈できる. 特に, A 上の恒等写像 $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ が誘導する C^*-correspondence を A 上の identity correspondence という.

第 4 節において, 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ 上の写像にも "逆半群値内積" を用いて随伴可能と呼ばれる性質を定義し, 随伴可能な写像全体 $L(\mathcal{U})$ が逆半群を成すことを見る. 第 5 節において導入される inverse correspondence は, 逆半群 S, T に対して, 逆 T 集合 $\mathcal{U}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}}\colon S \to L(\mathcal{U})$ の組 $(\mathcal{U}, \theta_{\mathcal{U}})$ として定義される．これは, 逆半群論における C^*-correspondence の類似である．

4 つの C^* 環 A_1, A_2, A_3, A_4 と, 添字 $i = 1, 2, 3$ に対して C^*-correspondence $\mathcal{E}_i\colon A_i \to A_{i+1}$ を考える．2 つの C^*-correspondence $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ に対し, テンソル積 (tensor product) と呼ばれる C^*-correspondence $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2\colon A_1 \to A_3$ が定義できる．C^* 環と C^*-correspondence は, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence とすると, 双圏の要請の多くを満たすが, 以下で述べるように双圏にはならない．2 つの C^*-correspondence $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3$ と $\mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$ は, 構造を保つ "自然な" 全単射 $(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 \mapsto \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3)$ を通して同型である．これは双圏における結合律に相当する性質である．また, 2 つの C^*-correspondence $\mathcal{E}_1 \otimes A_2$ と $\mathcal{E}_1$ の間には, 構造を保つ "自然な" 全単射 $\xi_1 \otimes a_2 \mapsto \xi_1 a_2$ が存在することも分かる．これは双圏における単位律の一方に相当する性質である．しかし, 単位律のもう一方に相当する同型が一般には成り立たない．すなわち, 2 つの C^*-correspondence $A_1 \otimes \mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_1$ の間の構造を保つ "自然な" 線型写像 $a_1 \otimes \xi_1 \mapsto a_1 \xi_1$ は一般に同型にはならない．これが同型になるのは, $\mathcal{E}_1 = \{\sigma_{\mathcal{E}_1}(a_1)(\xi_1) \mid a_1 \in A_1, \xi_1 \in \mathcal{E}_1\}$ を満たす場合のみである．この性質を満たす C^*-correspondence を**非退化**という．そこで, C^* 環と非退化 C^*-correspondence を考えると, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence として双圏を成す [BMZ13]．この双圏を $\mathfrak{Corr}$ と書く．第 5 節において, 逆半群の間の inverse correspondence にもテンソル積や非退化と呼ばれる性質を導入し, 逆半群と非退化 inverse correspondence が双圏を成すことを見る．この双圏を $\mathfrak{IC}$ と書く．

Rieffel は C^* 環の間に強森田同値 (strong Morita equivalent) と呼ばれる同値関係を導入した [Rie74]．2 つの C^* 環が双圏 $\mathfrak{Corr}$ において同値であることは, それらが強森田同値であることと等価である [EKQR06]．Steinberg は逆半群の間に強森田同値 (strong Morita equivalent) と呼ばれる同値関係を導入し, 逆半群からの C^* 環の構成が強森田同値を保つことを示した [Ste11]．Steinberg はこの事実を亜群の理論を経由して示している．本稿の第 5 節にて, 2 つの逆半群が双圏 $\mathfrak{IC}$ において同値であることと, それらが強森田同値であることは等価であることを紹介する．この事実を踏まえると, 後に双圏 $\mathfrak{IC}$ から双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手が構成されれば, Steinberg が示した事実に対し, 双関手が双圏の同値を保つことを用いて亜群論を経由しない直接的な証明が与えられることが期待できる．

4　逆 S 集合の導入と随伴可能写像全体のなす逆半群 $L(\mathcal{U})$

逆半群 S を考える．本節では逆 S 集合とその間の随伴可能写像を定義する．また, 逆 S 集合上の随伴可能写像全体が逆半群を成すことを示す．

定義 4.1. 集合 $\mathcal{U}$ 上の S **作用**とは, 写像 $\mathcal{U} \times S \to \mathcal{U}; (u, s) \mapsto us$ であって, 任意の $s, s' \in S$ と $u \in \mathcal{U}$ に対し, $u(ss') = (us)s'$ を満たすものをいう．S 作用を備えた集合 $\mathcal{U}$ を S **集合**という．

定義 4.2 ([Uch23])**.** **正則** S **集合** $\mathcal{U}$ とは, S 集合であって, 写像 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to S$ を備えており, 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ と $s \in S$ に対し,

(R-i) $\langle u \mid u's \rangle_{\mathcal{U}} = \langle u \mid u' \rangle_{\mathcal{U}} s$,

(R-ii) $\langle u \mid u' \rangle_{\mathcal{U}}^* = \langle u' \mid u \rangle_{\mathcal{U}}$, (R-iii) $u\langle u \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = u$,

を満たすものをいう．**逆 S 集合**とは, 正則集合 $\mathcal{U}$ であって, 次を満たすものをいう．

(R-iv) $u, u' \in \mathcal{U}$ が $u\langle u' \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = u$ かつ $u'\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}} = u'$ を満たすならば $u = u'$ が成り立つ．

正則 S 集合や逆 S 集合の命名は以下の例を念頭に置いたものである．

例 4.3. 逆半群 S に対し, 集合 S 上の S 作用を右からの掛け算で, 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_S \colon S \times S \to S$ を任意の $s, s' \in S$ に対し $\langle s \,|\, s'\rangle_S := s^* s'$ で定義する．条件 (R-i) と (R-ii) は簡単に確認できる．ここで, S が正則半群であることから (R-iii) が成り立ち, 逆半群であることから (R-iv) が成り立つ．よって S はこれらの構造で逆 S 集合である．

例 4.4. 位相空間 X, Y に対し, 例 2.3 で定義した逆半群 $I(X)$ と集合 $I(X, Y)$ を考える．集合 $I(X, Y)$ 上の $I(X)$ 作用を右からの合成で, 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{I(X,Y)} \colon I(X, Y) \times I(X, Y) \to I(X)$ を任意の $u, u' \in I(X, Y)$ に対し $\langle u \,|\, u'\rangle_{I(X,Y)} := u^{-1} u'$ で定義すると, 逆 $I(X)$ 集合になる．

2 つの逆 S 集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ と写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を考える．

定義 4.5. 写像 φ が **S 写像**であるとは, 任意の $u \in \mathcal{U}$ と $s \in S$ に対して $\varphi(us) = \varphi(u)s$ が成り立つことをいう．

定義 4.6. 写像 φ が**随伴可能**であるとは, 写像 $\psi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ が存在して, 任意の $u \in \mathcal{U}$ と $v \in \mathcal{V}$ に対し,

$$\langle \psi(v) \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = \langle v \,|\, \varphi(u)\rangle_{\mathcal{V}}$$

が成り立つことをいう．この ψ を φ に対する**随伴**という．随伴は存在すれば一意であるため, φ に対して唯一存在する随伴を $\varphi^\dagger$ と書く．

定義 4.7. 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ から $\mathcal{V}$ への随伴可能写像全体を $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ と書く．集合 $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ を $L(\mathcal{U})$ と略す．

随伴可能写像は自動的に S 写像である．随伴可能写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ に対し, $\varphi^{\dagger\dagger} = \varphi$ が成り立つ．任意の逆 S 集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ と随伴可能写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\psi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ に対し, これらの合成写像 $\psi\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ は随伴可能であり, $(\psi\varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \psi^\dagger$ が成り立つ．特に集合 $L(\mathcal{U})$ は合成を演算として半群をなす．元 $\varphi \in L(\mathcal{U})$ が $\varphi = \varphi^\dagger$ を満たすとき, φ は**自己随伴**であるという．

定義 4.8. 任意の $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ に対し, 写像 $\omega_{v,u} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を任意の $u' \in \mathcal{U}$ に対し

$$\omega_{v,u}(u') := v\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}}$$

で定める．

定義 4.9. 逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ に対し, $K(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \{\omega_{v,u} \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$ と定義する．集合 $K(\mathcal{U},\mathcal{U})$ を $K(\mathcal{U})$ と略す．

任意の $u \in \mathcal{U}$ と $v \in \mathcal{V}$ に対し, $\omega_{v,u}$ は随伴可能であり, $\omega_{v,u}^\dagger = \omega_{u,v}$ が成り立つ．よって, $K(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

は $L(\mathcal{U},\mathcal{V})$ の部分集合である．また, 任意の S 集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ と $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$, $\varphi \in L(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $\psi \in L(\mathcal{V},\mathcal{W})$ に対し, $\omega_{w,v}\varphi = \omega_{w,\varphi^\dagger(v)}$, $\psi\omega_{v,u} = \omega_{\psi(v),u}$ が成り立つ．特に, $K(\mathcal{U})$ は $L(\mathcal{U})$ の両側イデアルであり, 従って半群である．次の命題は, 定理 4.11 や定理 5.6 の証明で重要な役割を果たす.

命題 4.10 ([Uch23])**.** 正則 S 集合 $\mathcal{U}$ において, 次の条件は同値である.

(i) 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, $u\langle u' \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = u$ かつ $u'\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}} = u'$ ならば $u = u'$ が成り立つ (すなわち, $\mathcal{U}$ は逆 S 集合である).

(ii) 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, $\langle u \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = \langle u' \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}} = \langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}}$ ならば $u = u'$ が成り立つ.

(iii) 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, $u\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}} = u'\langle u' \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}}\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}}$ が成り立つ.

(iv) 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, 写像 $\omega_{u,u}$ と $\omega_{u',u'}$ は交換する.

命題 4.10 において, 特に $\mathcal{U}$ を例 4.3 で挙げた正則 S 集合 S とすれば, 命題 2.4 を得る.

定理 4.11 ([Uch23])**.** 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ に対し, $K(\mathcal{U})$, $L(\mathcal{U})$ は逆半群である.

証明の概略．逆 S 集合において, 命題 4.10(ii) が成り立つことに注意すると, $E(K(\mathcal{U})) = \{\omega_{u,u} \mid u \in \mathcal{U}\}$ が得られる．また, 命題 4.10(iv) より $E(K(\mathcal{U}))$ は可換である．従って命題 2.4 より $K(\mathcal{U})$ は逆半群である.

次に半群 $L(\mathcal{U})$ の正則性を示す．元 $\varphi \in L(\mathcal{U})$ と $u \in \mathcal{U}$ を任意に固定せよ．半群 $L(\mathcal{U})$ の両側イデアル $K(\mathcal{U})$ が逆半群であることが得られたので, 命題 2.5 より, $L(\mathcal{U})$ の冪等元と $\omega_{u,u}$ は交換する．この事実と $\varphi^\dagger\varphi\omega_{u,u}$ や $\omega_{u,u}\varphi^\dagger\varphi$ が $L(\mathcal{U})$ の冪等元であることを用いて, $\varphi^\dagger\varphi$ と $\omega_{u,u}$ が交換することが分かる．定義 4.2(R-iii) や, φ が自動的に S 写像になることを用いて

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi(u)\langle\varphi(u) \,|\, \varphi(u)\rangle_{\mathcal{U}} = \varphi\big(u\langle\varphi(u) \,|\, \varphi(u)\rangle_{\mathcal{U}}\big) = \varphi\left(u\left\langle u \,\middle|\, \varphi^\dagger\varphi(u)\right\rangle_{\mathcal{U}}\right) \\
&= \varphi\big(\omega_{u,u}\,\varphi^\dagger\varphi(u)\big) = \varphi\big(\varphi^\dagger\varphi\,\omega_{u,u}(u)\big) = \varphi\varphi^\dagger\varphi(u\langle u \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}}) = \varphi\varphi^\dagger\varphi(u)
\end{aligned}
$$

を得る．これより $\varphi = \varphi\varphi^\dagger\varphi$ を得る．両辺の随伴をとって $\varphi^\dagger = \varphi^\dagger\varphi\varphi^\dagger$ を得る．以上より $L(\mathcal{U})$ が正則であることが分かる．正則半群 $L(\mathcal{U})$ における一般化逆元の一意性は次のように示す．命題 2.5 より $L(\mathcal{U})$ と $K(\mathcal{U})$ の冪等元が交換する．これを用いて, $L(\mathcal{U})$ の冪等元は自己随伴であることが分かる．任意に固定した元 $\varphi \in L(\mathcal{U})$ に対し, ψ_1, ψ_2 をその一般化逆元とする．ここで $\varphi\psi_1$, $\varphi\psi_2$, $\psi_1\varphi$, $\psi_2\varphi$ が冪等元であり, 従って自己随伴であることに注意すると, $\psi_1 = \psi_2\varphi\psi_1 = \psi_2$ を得る. □

次の定理も示すことができる.

定理 4.12 ([Uch23])**.** 逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ に対し, 集合 $L(\mathcal{U},\mathcal{V})$ は, その上の $L(\mathcal{U})$ 作用を右からの合成によって, 写像 $\langle\varphi \,|\, \psi\rangle_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})} \colon L(\mathcal{U},\mathcal{V}) \times L(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to L(\mathcal{U})$ を $\langle\varphi \,|\, \psi\rangle_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})} := \varphi^\dagger\psi$ で定義すると, 逆 $L(\mathcal{U})$ 集合である．集合 $K(\mathcal{U},\mathcal{V})$ は同様の構造で逆 $K(\mathcal{U})$ 集合である.

以上で, inverse correspondence を導入するための準備が整った.

5　Inverse corrsepondence の導入と逆半群のなす双圏 $\mathfrak{IC}$

C^* 環の間の C^*-correspondence を参考に, 逆半群の間の inverse correspondence を導入する. 逆半群 S, T を考える.

定義 5.1 ([Uch23]). 逆 T 集合 $\mathcal{U}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}}\colon S \to L(\mathcal{U})$ の組を S から T への *inverse correspondence* といい, $\mathcal{U}\colon S \to T$ と書く. 特に inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S \to T$ が $\mathcal{U} = \{\theta_{\mathcal{U}}(s)(u) \mid s \in S, u \in \mathcal{U}\}$ を満たすとき, $\mathcal{U}$ は**非退化**であるという.

定義 5.2. 逆半群 S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ と, 写像 $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を考える. 写像 φ が**同型射**であるとは, 全単射 S 写像であって, 任意の $s \in S$, $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, $\langle \varphi(u) \,|\, \varphi(u') \rangle_{\mathcal{V}} = \langle u \,|\, u' \rangle_{\mathcal{U}}$ と $\varphi(\theta_{\mathcal{U}}(s)(u)) = \theta_{\mathcal{V}}(s)(\varphi(u))$ が成り立つことをいう. 逆半群 S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ の間に同型射が存在するとき, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は**同型**であるという.

例 5.3. 逆半群 S, T と半群準同型 $\tau\colon S \to T$ を考える. 逆 T 集合 T が例 4.3 のようにして得られる. ここで, 逆 T 集合 T の部分集合 $\mathcal{U}_\tau := \{\tau(s)t \mid s \in S, t \in T\}$ も同様の構造で逆 T 集合になる. 写像 $\theta_{\mathcal{U}_\tau}\colon S \to L(\mathcal{U}_\tau)$ を任意の $s \in S$, $u \in \mathcal{U}_\tau$ に対して $\theta_{\mathcal{U}_\tau}(s)(u) := \tau(s)u$ と定めると, $\theta_{\mathcal{U}_\tau}$ は半群準同型である. よって半群準同型 $\theta\colon S \to T$ は, 逆 T 集合 $\mathcal{U}_\tau$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}_\tau}$ の組からなる S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}_\tau$ を誘導する. この inverse correspondence が非退化であることは簡単に確かめられる. 特に上の例において, S 上の恒等写像 $\mathrm{id}_S\colon S \to S$ が誘導する inverse correspondence $\mathcal{U}_{\mathrm{id}_S}$ を S に対する *identity correspondence* と呼ぶ. これは後に逆半群のなす双圏において単位射として扱われる.

例 5.4. 位相空間 X, Y に対して, 例 4.4 で考えた逆 $I(X)$ 集合 $I(X, Y)$ を考える. 逆半群 $I(Y)$ の元 v を左から合成する操作 $\theta_{I(X,Y)}(v)$ は $I(X, Y)$ 上の随伴写像になる. 写像 $\theta_{I(X,Y)}\colon I(Y) \to L(I(X, Y)); v \mapsto \theta_{I(X,Y)}(v)$ は半群準同型になる. よって $I(X, Y)$ は $I(Y)$ から $I(X)$ への inverse correspondence である.

例 5.5. 逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ に対して, 定理 4.12 で考えた逆 $L(\mathcal{U})$ 集合 $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ を考える. 逆半群 $L(\mathcal{V})$ の元 ψ を左から合成する操作 $\theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\psi)$ は $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 上の随伴写像になる. 写像 $\theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}\colon L(\mathcal{V}) \to L(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \psi \mapsto \theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\psi)$ は半群準同型になる. よって $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ は $L(\mathcal{V})$ から $L(\mathcal{U})$ への inverse correspondence である.

逆半群 S_1, S_2, S_3 と inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S_1 \to S_2$, $\mathcal{V}\colon S_2 \to S_3$ を考える. これらから新たな inverse correspondence $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}\colon S_1 \to S_3$ が次のように構成される. 直積集合 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ を, 任意の $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, $s_2 \in S_2$ に対して $(us_2, v) \sim \big(u, \theta_{\mathcal{V}}(s_2)(v)\big)$ が成り立つ最小の同値関係 $\sim$ で割った商集合を $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ とする. 元 $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ の同値類を $u \otimes v$ と書く. 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$, $v, v' \in \mathcal{V}$, $s_3 \in S_3$ に対し, 集合 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ への S_3 作用を

$$(u \otimes v)s_3 := u \otimes (vs_3)$$

で, 写像 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon (\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\times(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\to S_3$ を

$$\langle u'\otimes v'\,|\,u\otimes v\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}} := \langle v'\,|\,\theta_{\mathcal{V}}(\langle u'\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}})(v)\rangle_{\mathcal{V}}$$

で定義する.

定理 5.6 ([Uch23]). 以上の構造により, $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ は逆 S_3 集合になる.

証明の概略. 上の S_3 作用と写像 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$ は well-defined であり, これらの構造で $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ が正則 S_3 集合になることは簡単に確かめられる. 逆 S_3 集合になることには命題 4.10 を用いる. □

任意の $s_1\in S_1$ に対して, $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 上の写像 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)$ を, 任意の $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$ に対して

$$\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)(u\otimes v) := \theta_{\mathcal{U}}(s_1)(u)\otimes v$$

で定義すると, 随伴可能である. 写像 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon S_1\to L(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}); s_1\mapsto\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)$ は半群準同型になる.

定義 5.7 ([Uch23]). 2 つの inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S_1\to S_2$, $\mathcal{V}\colon S_2\to S_3$ に対し, 逆 S_3 集合 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon S_1\to L(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})$ からなる inverse correspondence $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ を, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ の**テンソル積**と呼ぶ.

2 つの非退化 inverse correspondence のテンソル積が非退化であることは簡単に確認できる.

定理 5.8 ([Uch23]). 逆半群と非退化 inverse correspondence は, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence として双圏を成す. この双圏を $\mathfrak{IC}$ と書く.

証明の概略. ここでは結合律や単位律に相当する同型射が存在することのみを確認する. 逆半群 S_1, S_2, S_3, S_4 と, 添字 $i=1,2,3$ に対して非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_i\colon S_i\to S_{i+1}$ を考える. 写像 $\alpha\colon(\mathcal{U}_1\otimes\mathcal{U}_2)\otimes\mathcal{U}_3\to\mathcal{U}_1\otimes(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_3)$ を

$$\alpha((u_1\otimes u_2)\otimes u_3) := u_1\otimes(u_2\otimes u_3)$$

で, 写像 $\lambda\colon\mathcal{U}_1\otimes S_2\to\mathcal{U}_1$ を

$$\lambda(u_1\otimes s_2) := u_1 s_2$$

で定義すると, これらは inverse correspondence の間の同型射である. また, $\rho\colon S_1\otimes\mathcal{U}_1\to\mathcal{U}_1$ を

$$\rho(s_1\otimes u_1) := \theta_{\mathcal{U}_1}(s_1)(u_1)$$

で定義すると, $\mathcal{U}_1$ が非退化であることより ρ は inverse correspondence の間の同型射である. □

例 5.9. 逆半群 S_1,S_2,S_3 と, 添字 $i=1,2$ に対して半群準同型 $\tau_i\colon S_i\to S_{i+1}$ を考える. 例 5.3 で述べた構成法より, 半群準同型 τ_1, τ_2 に対して非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_{\tau_1}$, $\mathcal{U}_{\tau_2}$ が得られる. これらのテンソル積 $\mathcal{U}_{\tau_1}\otimes\mathcal{U}_{\tau_2}$ は, 2 つの半群準同型の合成 $\tau_2\tau_1$ から得られる非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_{\tau_2\tau_1}$ と, 同型射 $\mathcal{U}_{\tau_1}\otimes\mathcal{U}_{\tau_2}\to\mathcal{U}_{\tau_2\tau_1}; u_1\otimes u_2\mapsto\tau_2(u_1)u_2$ を通して同型である. 半群準同型 τ から非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_\tau$ への対応付けは, 第 3 節で定義した圏 **IS** から双圏 $\mathfrak{IC}$ へのある種の関手 (双関手) を成す.

次の定理は, 双圏 $\mathfrak{IC}$ における同値を特徴付けるものである.

定理 5.10 ([Uch23])**.** 2 つの逆半群が双圏 $\mathfrak{IC}$ において同値になることの必要十分条件は, それらが強森田同値になることである.

証明は, 双圏 $\mathfrak{Corr}$ における同値が, C^* 環に対する強森田同値と等価であることを示した [EKQR06, Lemma 2.4] と類似した方法によって行われる. この定理により, 後に双圏 $\mathfrak{IC}$ から双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手が構成されれば, 「逆半群からの C^* 環の構成が強森田同値を保つ」という事実を, 双関手が双圏の同値を保つことを用いて証明できる.

参考文献

[Alb15] S. Albandik, *A colimit construction for groupoids*, Ph.D. Thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2015.

[AM16] S. Albandik and R. Meyer, *Colimits in the correspondence bicategory*, Münster J. Math. **9** (2016), no. 1, 51–76. MR3549542

[Bén67] J. Bénabou, *Introduction to bicategories* (1967), 1–77. MR0220789

[BMZ13] A. Buss, R. Meyer, and C. Zhu, *A higher category approach to twisted actions on C^*-algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **56** (2013), no. 2, 387–426.

[EKQR06] S. Echterhoff, S. Kaliszewski, J. Quigg, and I. Raeburn, *A categorical approach to imprimitivity theorems for C^*-dynamical systems*, Mem. Amer. Math. Soc. **180** (2006), no. 850, viii+169. MR2203930

[Exe08] R. Exel, *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **39** (2008), no. 2, 191–313. MR2419901

[Lan95] E. C. Lance, *Hilbert C^*-modules a toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society lecture note series ; 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Law98] M. V. Lawson, *Inverse semigroups*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. The theory of partial symmetries. MR1694900

[Lei98] T. Leinster, *Basic bicategories*, arXiv:math (1998), available at `arXiv:math/9810017`.

[Pat99] A. L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 170, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. MR1724106

[Rie74] M. A. Rieffel, *Induced representations of C^*-algebras*, Advances in Math. **13** (1974), 176–257. MR353003

[Ste11] B. Steinberg, *Strong Morita equivalence of inverse semigroups*, Houston J. Math. **37** (2011), no. 3, 895–927. MR2844456

[Uch23] T. Uchimura, *A bicategory of inverse semigroups*, 2023. in preparation.