

ビリヤード写像における不変曲線が存在しないための十分条件

京都大学 大学院情報学研究科 情報学専攻数理工学コース 修士課程1年
立石萌 (Hajime TATEISHI)

概要

ビリヤード系では、二次元領域内で直進し境界に達すると入射角と反射角が等しくなるように向きを変えるような質点 (ボール) の運動について取り扱う。この系において、ボールが境界と衝突する点とその向きを、その次に衝突する点とその向きに写すような写像を考えると、これは面積保存写像となる。本稿では、Aubry-Mather 理論の結果をビリヤード系に適用することで、ビリヤード系の不変曲線が存在しないための十分条件を与える。

1 導入

本節では、ビリヤード系およびより一般的な面積保存ツイスト写像について紹介する。

1.1 ビリヤード系

まず、ビリヤード系について紹介する。

固定された二次元領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ とその中を動く質点を考える。質点は領域 D 内では摩擦力がゼロのまま一定の速度で直進し、境界では弾性衝突するとする。このとき、質点は入射角と反射角が等しくなるように進行方向を変えて、また直進を始める。このようなルールで動く質点の軌道について考えることにする。

ビリヤードの軌道を考える際は、境界における衝突位置と衝突直後の進行方向がわかれば十分である。このことから、ビリヤード系を扱う際には境界をなす曲線の弧長パラメータと反射角を座標にとることが多い。曲線 $\gamma = \partial D$ の弧長パラメータを s とし、衝突点における γ の接線と衝突直後の進行方向のなす角を α とし、 $w = -\cos \alpha$ とする。 ($\alpha \in (0, \pi)$ であるから、 α と w は一対一対応する。)

さて、先ほどのビリヤードの運動によって、衝突前のパラメータを衝突後のパラメータに写す写像 $T: (s, w) \mapsto (s', w')$ が定まる。この写像 T をビリヤード写像といい、ビリヤード写像によって定まる力学系をビリヤード系という。特に γ が周長 L の閉曲線するとき、 T は $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [-1, 1]$ 上の写像になる。 ($w = 1$ および $w = -1$ については、 T が w について連続になるように拡張する。)

特に命題 1 の証明から、次のことがわかる:

実数 s, s' に対して関数 $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(s, s') = -|\gamma(s) - \gamma(s')|$ とおく。ある $w, w' \in (-1, 1)$ が

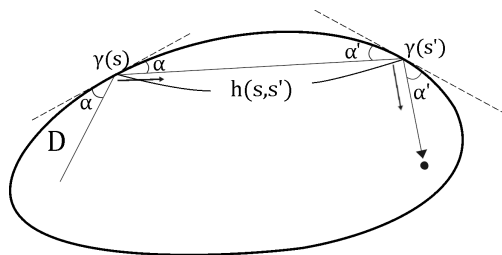


図1 ビリヤード系

存在してビリヤード写像により $T(s, w) = (s', w')$ という関係が成り立てば,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \cos \alpha = -w, \quad \frac{\partial h}{\partial s'} = -\cos \alpha' = w'$$

である.

1.2 面積保存ツイスト写像

ここで, 面積保存ツイスト写像について述べておく. 本節および次節の詳細については [3] §7 を参照してほしい.

$\mathbb{S} \times [a, b]$ 上の写像 $\phi(x, y) = (X, Y)$ が, $dx \wedge dy = dX \wedge dY$ を満たすとき, ϕ は面積保存写像であるという. さらに, $\frac{\partial X}{\partial y} > 0$ であるとき, ϕ はツイスト条件を満たすという.

面積保存ツイスト写像 $\phi(x, y) = (X, Y)$ について, x, X を独立変数と見たときに, 関数 $h(x, X)$ で

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial h}{\partial X} = Y$$

を満たすもの h を ϕ の母関数という.

さて, 有限の長さの点列 (x_j, \dots, x_k) について, 作用 H を ϕ の母関数 h を用いて

$$H(x_j, \dots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} h(x_i, x_{i+1})$$

と定める. もしもこの点列が H の”停留点”, つまりすべての $i \in \{j+1, \dots, k-1\}$ について

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = D_2 h(x_{i-1}, x_i) + D_1 h(x_i, x_{i+1}) = 0 \quad (1)$$

を満たすものであれば, $y_i = -D_1 h(x_i, x_{i+1})$ とおくと $y_{i+1} = -D_1 h(x_{i+1}, x_{i+2}) = D_2 h(x_i, x_{i+1})$ より $\phi(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ となる. すなわち, H の”停留点”を求めることができればそこを通る ϕ の軌道を復元することができる.

特に, (x_j, \dots, x_k) が H を両端点を固定した下での”最小点”であるとき, つまり任意の $x_i^* \in \mathbb{S}$ について

$$H(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k) \leq H(x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k) \quad (2)$$

が成り立つとき, 点列は自然に”停留点”になるので, やはりその点列を通る ϕ の軌道を復元できる.

以上の話は、可算無限の長さの点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ について拡張することができる。ただし、無限列についての H の”停留点”は $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ から有限の長さの部分列 (x_j, \dots, x_k) を任意に選んできたときに式 (1) が成り立つものとし、 H の”最小点”は有限の長さの部分列 (x_j, \dots, x_k) を任意に選んできたときに式 (2) が成り立つものとする。

さて、ビリヤード系に話を戻そう。実は、先ほど定義したビリヤード写像 T は面積保存ツイスト写像であることが知られている。

命題 1. ビリヤード写像 $T : (s, w) \mapsto (s', w')$ は面積保存写像である。つまり、 $dw' \wedge ds' = dw \wedge ds$ が成り立つ。

Proof. ビリヤード写像 T によって $T(s, w) = (s', w')$ と反射し、 $w = -\cos \alpha, w' = -\cos \alpha'$ であるとする。 $h(s, s') = -|\gamma(s) - \gamma(s')|$ とおくと、 $h(s, s')^2 = (\gamma(s) - \gamma(s'))^2$ なので、 s で偏微分すれば

$$2h(s, s') \frac{\partial h}{\partial s} = 2(\gamma(s) - \gamma(s')) \cdot \gamma'(s)$$

ここで、 s は弧長パラメータなので、 $\gamma'(s)$ は $\gamma(s)$ における単位接ベクトルであるから、

$$(\gamma(s) - \gamma(s')) \cdot \gamma'(s) = -|\gamma(s) - \gamma(s')| \cos \alpha = h(s, s') \cos \alpha$$

である。よって、 $\frac{\partial h}{\partial s} = \cos \alpha = -w$ が成り立つ。

また、 s' で偏微分したときも同様にすれば $\frac{\partial h}{\partial s'} = -\cos \alpha' = w'$ が求まる。

以上から、 $h(s, s')$ について全微分をとると、

$$dh = \frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial s'} ds' = -w ds + w' ds'$$

であり、 $0 = d^2 h = -dw \wedge ds + dw' \wedge ds'$ である。 □

命題 2. 領域 D が狭義凸であって境界 γ がなめらかな閉曲線であるとする。このとき、ビリヤード写像 $T : (s, w) \mapsto (s', w')$ はツイスト条件 $\frac{ds'}{dw} > 0$ を満たす。

Proof. $\gamma(s)$ を原点とし、 $\gamma'(s)$ が x 軸になるように直交座標系を取る。 $\gamma(s') = (x(s'), y(s'))$ とすると、 $x(s') = -h(s, s') \cos \alpha = h(s, s') w$ である。両辺を w で偏微分すれば、

$$\frac{dx}{ds'} \frac{\partial s'}{\partial w} = \frac{\partial h}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial w} w + h(s, s') = -\frac{\partial h}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial w} \cos \alpha + h(s, s').$$

ここで、 $\frac{\partial h}{\partial s'} = -\cos \alpha'$ であり、また $\gamma'(s')$ が x 軸方向となす角は $\alpha + \alpha'$ と書けることから、

$$\frac{\partial s'}{\partial w} \cos(\alpha + \alpha') = \frac{\partial s'}{\partial w} \cos \alpha \cos \alpha' + h(s, s').$$

$\alpha, \alpha' \in (0, \pi)$ より $\cos(\alpha + \alpha') - \cos \alpha \cos \alpha' = -\sin \alpha \sin \alpha' < 0$ であるから、 $h(s, s') = -|\gamma(s')| < 0$ より、

$$\frac{\partial s'}{\partial w} = -\frac{h(s, s')}{\sin \alpha \sin \alpha'} > 0.$$

□

命題 1 の証明から、ビリヤード写像 T の母関数は証明中の $h(s, s')$ 、つまり質点が次に反射するまでに移動する距離の -1 倍であることがわかる。

1.3 不変曲線

写像 $\phi: \mathbb{S} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S} \times [-1, 1]$ に対して、曲線 C が $\mathbb{S} \times \{0\}$ とホモトピックであって $\phi(C) = C$ となるとき、 C を ϕ の不変曲線と呼ぶ。すなわち、不変曲線とは ϕ で不変な集合であってアニュラス $\mathbb{S} \times [-1, 1]$ を右から左へちょうど一周するような曲線である。

面積保存ツイスト写像に関して、不変曲線の存在性を考える。

準備として、まず写像 $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ を考える。 f の持ち上げ $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に関して

$$\alpha(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(x)}{n}$$

は実は必ず存在し、しかも x によらないことが知られている。この $\alpha = \alpha(f)$ を f の回転数という。

次に、 $\mathbb{S} \times [-1, 1]$ 上の面積保存ツイスト写像 $\phi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ を考える。 y を適当に固定すると $X(x, y)$ は \mathbb{S} 上の写像になる。特に写像 $X(x, -1)$ の回転数を α_0 、 $X(x, 1)$ の回転数を α_1 とする。

ϕ の母関数を h とし、 h により定まる作用を H とする。任意 $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ について、 M_α を

$$M_\alpha = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{S} \times [-1, 1] \mid \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : H \text{ に関しての } " \text{最小点} ", \xi = x_0, \eta = -D_1 h(x_0, x_1)\}$$

とする。前節よりこの M_α が ϕ で不変であることは明らかである。さらにこの集合はリプシッツグラフであることが知られている。

逆に不変曲線 C が存在するときは、次のことが成り立つ。

定理 1 (Mather). C を $\mathbb{S} \times [-1, 1]$ 上を一周する ϕ で不変な曲線とし、 C 上への制限 $\phi|_C$ の回転数が α であるとする。このとき、 $C \subset M_\alpha$ である。特に α が無理数なら $C = M_\alpha$ となる。

Mather の定理の対偶から、もし H の "最小点" がなければ不変曲線が存在しないということがわかる。

ちなみに、ビリヤード写像の不変曲線は焦線というものに対応している。焦線は領域 D の内側にある閉曲線で、ビリヤードの質点の軌道が常に接し続けるようなものである。たとえば D が円のときは焦線は同心円になり、楕円のときは焦線は同じ焦点をもつ楕円になることが知られている。

焦線について、次の Birkhoff の予想が知られている。

予想 1. (Birkhoff) 凸で境界がなめらかな領域について、境界の近傍が焦線による葉層構造を持っているとする。このとき、ビリヤード台は楕円である。

Birkhoff の予想に関する重要な結果は以下のようなものがある。

- Lazutkin (1973) [4] ビリヤード系を考える領域の境界が十分なめらかでかつその曲率が 0 にならない場合、不変曲線は存在する。
- Mather (1982) [5] ビリヤード系を考える領域の境界上に曲率が 0 になる点が存在すれば、不変曲線は存在しない。

- Hubacher (1987) [7] ビリヤード系を考える領域の境界上に曲率が不連続になる点が存在すれば, 相空間の境界 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times \{-1\}$ の近傍に不変曲線は存在しない.
- Bialy (1993) [6] ビリヤード写像の相空間全体が不変曲線による葉層構造を持つとき, ビリヤード系を考える領域は円である.

2 主定理

本節では, 主結果を紹介する.

2.1 設定

まず, ビリヤード系を考える領域を設定する.

関数 $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の条件を満たす C^2 級関数と仮定する.

$$f(x) > 0, \quad f(x+c) = f(x), \quad L = \int_0^c \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}.$$

ビリヤードを考える領域 D を $D = \{(x, y) \mid -f(x) \leq y \leq f(x)\}$ と定め, 図 2 のようにボールが上側の境界と下側の境界を交互に反射するようなケースを考える.

2.2 主定理

主定理は, この設定の下でビリヤード写像の不変曲線が存在しないための十分条件を与えるものである.

(s, w) を弧長パラメータ $s = \int_0^x \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}$ と $w = \cos \alpha$ の組としておく. ただし, $\alpha \in (0, \pi)$ はボールの反射角である. $x(\hat{s}) = x(s) + c$ となる s と \hat{s} を同一視することで, s を $\mathbb{S} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ の元と見なせば, ビリヤード写像 T は $\mathbb{S} \times (-1, 1)$ 上の写像 $(s, w) \mapsto (s', w')$ と考えることができる.

定理 2. 次の不等式を満たす $x_2 \in [0, c)$ が存在するとき, ビリヤード写像は相空間 $\mathbb{S} \times (-1, 1)$ 上に不変曲線を持たない.

$$f''(x_2)f(x_2) + f'(x_2)^2 + 1 \leq 0 \tag{3}$$

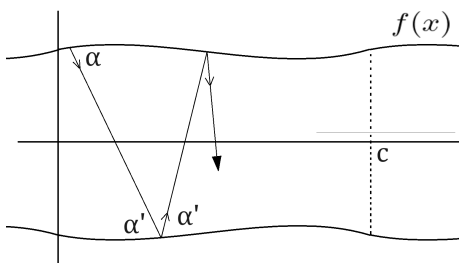


図 2 関数 $f(x)$ により定まるビリヤード系

注意 1. 不等式 (3) は

$$\frac{d^2}{dx^2} f^2(x_2) \leq -2$$

と書き換えることもできる.

証明の概略

$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ をビリヤード軌道の切片の長さとして定める.

$$h(s, s') = \sqrt{(x(s) - x(s'))^2 + (f(x(s)) + f(x(s')))^2}.$$

このとき, 以下の二つが容易に確認できる.

補題 1. ビリヤード写像 $T: (s, w) \mapsto (s', w')$ は面積形式 $\omega = ds \wedge dw$ を保存する. つまり,

$$ds \wedge dw = ds' \wedge dw'$$

が成り立つ.

補題 2. ビリヤード写像 $T: (s, w) \mapsto (s', w')$ はツイスト条件

$$\frac{\partial s'}{\partial w} > 0$$

を満たす.

特に, h はビリヤード写像 T の母関数になっている.

したがって, この h によって作用 H を 1.2 節のように定めたとき, H の "最小点" が存在しなければ Mather の定理の対偶から不変曲線の非存在性が示せる.

任意に無限列 $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を取ってきたとき, ある部分列 (s_1, s_2, s_3) は H について "最小点" でないことを示す. そのためには, 両端固定の下で $\frac{d^2}{ds_2^2} H(s_1, s_2, s_3) = D_2^2 h(s_1, s_2) + D_1^2 h(s_2, s_3) < 0$ がわかればよい.

実際に計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds_2^2} H(s_1, s_2, s_3) &= \dot{x}_2^2 \frac{f''(x_2) \{f(x_1) + f(x_2)\}}{h(s_1, s_2)} + \dot{x}_2^2 \frac{f''(x_2) \{f(x_2) + f(x_3)\}}{h(s_2, s_3)} \\ &\quad + \sin^2 \alpha_2 \left(\frac{1}{h(s_1, s_2)} + \frac{1}{h(s_2, s_3)} \right) \end{aligned}$$

(ドットは s での微分, プライムは x での微分を表す.)

ここで, $(x_2, f(x_2))$ における単位接ベクトルを $(\cos \beta_2, \sin \beta_2)$ と表すことにすれば, いまビリヤードの質点は $y = 0$ を横切るように動いているので,

$$\frac{f(x_2)}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)} < h(s_1, s_2), \quad \frac{f(x_2)}{\sin(\alpha_2 - \beta_2)} < h(s_2, s_3)$$

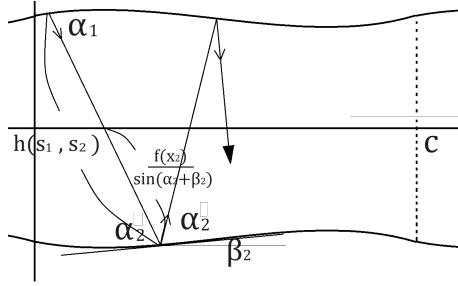


図3 $h(s_1, s_2)$ の不等式評価

したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds_2^2} H(s_1, s_2, s_3) &< \dot{x}_2^2 f''(x_2) \sin(\alpha_2 + \beta_2) + \frac{\sin^2 \alpha_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}{f(x_2)} \\
&+ \dot{x}_2^2 f''(x_2) \sin(\alpha_2 - \beta_2) + \frac{\sin^2 \alpha_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2)}{f(x_2)} \\
&= 2\dot{x}_2^2 f''(x_2) \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + \frac{2 \sin^3 \alpha_2 \cos \beta_2}{f(x_2)} \\
&= \frac{2\dot{x}_2^2 \sin \alpha_2}{f(x_2)} \left(f''(x_2) f(x_2) + \frac{\sin^2 \alpha_2}{\dot{x}_2^2} \right)
\end{aligned}$$

仮定から $\dot{x}_2 = 1/\sqrt{1 + f'(x_2)^2} > 0$, $\sin \alpha_2 > 0$ および $f(x) > 0$ であったので,

$$f''(x_2) f(x_2) + (1 + f'(x_2)^2) \sin^2 \alpha_2 \leq 0$$

のとき $\frac{d^2}{ds_2^2} H(s_1, s_2, s_3) < 0$ となる.

$1 + f'(x_2)^2 > 0$ かつ $0 < \sin^2 \alpha_2 \leq 1$ より, もし $f''(x_2) f(x_2) + f'(x_2)^2 + 1 \leq 0$ を満たす x_2 が存在すれば, $f''(x_2) f(x_2) + (1 + f'(x_2)^2) \sin^2 \alpha_2 \leq 0$ となる.

ゆえに, 不等式 (3) が成り立てば不変曲線は存在しないことがわかる. \square

2.3 適用例: $f(x) = A \sin x + d$ の場合

$d > A \geq 0$ として, $f(x) = A \sin x + d$ により定まるポリヤード系を考える.

$A = 0$ のときは $f(x) = d$ であり, 任意の $w \in (-1, 1)$ に対し $C_w = \{(s, w) | s \in \mathbb{S}\}$ は相空間上の不変曲線となるため, 相空間全体が不変曲線による葉層構造を持つ.

では, $A > 0$ のときはどうだろうか. $f(x) = A \sin x + d$ に対し, $f'(x) = A \cos x$, $f''(x) = -A \sin x$ なので,

$$f''(x) f(x) + f'(x)^2 + 1 = 1 + A^2 \cos 2x - dA \sin x = (1 + A^2) - 2A^2 \sin^2 x - dA \sin x \quad (4)$$

となる.

ここで, 任意の $u \in [-1, 1]$ で $-2A^2 u^2 - dAu + (1 + A^2) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は $d \in \left[\frac{A^2 - 1}{A}, \frac{1 - A^2}{A} \right]$ であるから, $-2A^2 u^2 - dAu + (1 + A^2) < 0$ となる $u \in [-1, 1]$ が存在するのは $d > \frac{1 - A^2}{A}$ または $d < \frac{A^2 - 1}{A}$ が成り立つときである.

仮定より $d > A > 0$ なので, 主定理から不変曲線が存在しないための十分条件は $d > \frac{1 - A^2}{A}$, つまり $A > \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4}}{2}$ である.

特に, $A > \frac{1}{\sqrt{2}}$ であれば d にかかわらず不変曲線は存在しないことがわかる.

$f(x) = A \sin \omega x + d$ の場合も同様にして $d > \frac{1 - \omega^2 A^2}{\omega^2 A}$, つまり $A > \frac{-\omega d + \sqrt{\omega^2 d^2 + 4}}{2\omega}$ のとき不変曲線が存在せず, 特に $A > \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$ のとき d にかかわらず不変曲線が存在しないことがわかる.

参考文献

- [1] S. Tabachnikov. Geometry and billiards. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.
- [2] 柴山允瑠. ハミルトン力学系可積分系と KAM 理論を中心に. サイエンス社, 2016.
- [3] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. Dynamics reported, 1 (1988), 1 – 56.
- [4] V. F. Lazutkin. Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 37 (1973), 186 – 216.
- [5] J. N. Mather. Glancing billiards. Ergodic Theory Dynam. Systems, 2 (1982), 397 – 403.
- [6] M. Bialy. Convex billiards and a theorem by E. Hopf. Math. Z., 214 (1993), 147 – 154.
- [7] A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. Comm. Math. Phys., 108 (1987), 483 – 488.