決定性公理の下での組み合わせ論

神戸大学　大学院　システム情報学専攻
丹野俊将 (Toshimasa TANNO) *

概要

公理的集合論において, (ZF の下で) 決定性公理 (Axiom of determinacy) AD からどのような命題が導かれるかという問題は長くから研究されており, 特に巨大基数の仮定の下で ZF + AD の自然なモデルとなる $L(\mathbb{R})$ に関してはよく調べられている．今回は無限組み合わせ論的対象に関し, $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つとき $L(\mathbb{R})$ にアロンシャイン直線と呼ばれる非可算直線構造が存在しないことを示した.

1　公理的集合論

はじめに (公理的) 集合論の背景を概覧する．集合論の研究は, 19 世紀後半のカントールに端を発する．彼は実数直線 $\mathbb{R}$ についての解析的研究の中で, $\mathbb{R}$ と自然数全体 ω の間に全単射が存在しない, すなわち $\mathbb{R}$ が非可算集合であることを証明した．この論文の最後にカントールは以下の主張が成り立つと予想した．ここでの濃度とは集合論の言葉で定式化される無限集合の大きさである.

Definition 1.1. 連続体仮説 (Continium Hypothesis) CH とは, 「$\mathbb{R}$ の任意の部分集合は可算であるか, $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ」という主張である.

カントールは連続体仮説を証明できなかったが, これは単に証明が技術的に困難であるというよりももっと本質的な問題があることがその後の研究で明らかになる．ゲーデルとコーエンそれぞれの結果によって, 連続体仮説は集合論の公理系 ZFC から独立であることが示された．ここである命題 ϕ が公理系から**独立**であるというのは, その命題 ϕ もその否定 $\neg\phi$ も公理系から証明できないことを意味する.

Theorem 1.2. ZF が無矛盾ならば, ZFC + CH も ZFC + ¬CH も無矛盾である.

ツェルメロ-フレンケルの公理系と呼ばれる集合論の公理系 ZF, 特に ZF に選択公理 AC (Axiom of choice) を加えた公理系 ZFC は現代数学のほとんどを記述する表現力を持つため, 現代数学の標準的な形式体系と捉えることができる．その一方で (連続体仮説のように素朴な主張であっても) 無限集合の大きさや性質についての言明のうちで ZFC から独立なものは数多く存在する.

公理的集合論では, 種々の命題を満たすようなモデルから別の命題が成り立つようなモデルを構成するなどの手法を用いて, ZF(C) から独立な命題たちが互いにどのような関係にあるかを研究する.

* E-mail:211x503x@stu.kobe-u.ac.jp

2　決定性公理

前章で述べた連続体仮説に関連して, ある程度の複雑さまでで定義可能な $\mathbb{R}$ の部分集合はすべて**正則性**と呼ばれる性質を持ち, 特に連続体仮説の反例になり得ない (すなわち可算と $\mathbb{R}$ の濃度の間の濃度を持ちえない) ことが知られている．正則性とは ルベーグ可測性に代表されるような「素性の良い」性質の総称である．特にその中の一つである完全集合の性質を持つことからその集合の濃度が可算であるか $\mathbb{R}$ と等しいかどちらかであることが従う.

Theorem 2.1. *$\mathbb{R}$ の $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合はすべて可算であるか, $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ.*

ここで $\mathbb{R}$ の部分集合が $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合であるとは, その集合がある $\mathbb{R}^2$ のボレル集合の射影で与えられることをいい, このような集合は集合論的複雑さの低い階層にある．これは ZFC の定理であるが, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合よりも複雑さの高い集合に関しての正則性を要請するためには本質的に ZFC に更なる公理を追加する必要があることが知られている.

ではどのような公理があればすべての実数の部分集合の正則性が保証されるか？そのような公理の一つに**決定性公理**がある．この公理について述べるために, 2 人のプレイヤーが行う完全情報無限ゲームについての定義を行う.

ここで, 集合論では実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と自然数の無限列 ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ を同一視することに注意する.

Definition 2.2. $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対して, プレイヤー I と II が行うゲーム G_A を次のように定める．ゲーム G_A のプレイとは自然数列 $x = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots \rangle \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ であり, 各自然数 a_n, b_n をそれぞれ n 番目の I,II の手という．プレイ x が A の元であるとき I の勝ち, そうでないとき II の勝ちであるとする.

I の戦略とは, 長さ偶数の自然数列に対して自然数を与える関数であり, II の戦略とは, 長さ奇数の自然数列に対して自然数を与える関数である．σ を I の戦略としたとき, I が σ に従ってプレイするとはプレイ $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots \rangle$ が $a_0 = \sigma(\emptyset), a_1 = \sigma(\langle a_0, b_0 \rangle), a_2 = \sigma(\langle a_0, b_0, a_1, b_1 \rangle), \ldots$ を満たすことをいう. II の戦略に対しても同様に定義する.

プレイヤーの戦略 σ が必勝戦略であるとは, もう一方のプレイヤーの手に依らず σ に従ったプレイが必ずそのプレイヤーの勝ちとなることをいう.

Definition 2.3. $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ が決定的とは, ゲーム G_A においてどちらかのプレイヤーが必勝法を持つことをいう.

決定性公理 (Axiom of determinacy) AD とは, 「任意の ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ の部分集合が決定的である」という主張である.

Theorem 2.4 (ZF)**.** *G_A が決定的であるならば, A は正則性を持つ．特に AD が成り立つならば実巣のすべての部分集合が正則性を持つ.*

このような文脈から, AD の下で展開される集合論の研究は定義可能な集合に関する研究の一般化と捉えることができる．注意するべき点として, AD は選択公理 (Axiom of choice) AC と両立しない．これはよく知られたように AC を使うことでルベーグ可測性を持たないような (特に決定的でな

い) 集合を構成できることからわかる.

ZF + AD で展開される集合論は, $\mathbb{R}$ の部分集合以外の集合に関しても ZFC でのそれとは非常に様相が異なる. AD に関する重要な結果として, (ZFC+ 強い仮定の下で) $\mathbb{R}$ から構成されるある種の自然な ZF のモデルで AD が成り立っていることが知られている.

Definition 2.5. 順序数全体を含み, 推移的であるような ZF のモデルを ZF の内部モデルという.

集合 A に対して A を要素に持つような内部モデルで最小のものが存在し, これを $L(A)$ と表す.

Theorem 2.6. 超コンパクト基数が存在すると仮定する. このとき, $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つ.

$L(\mathbb{R})$ のような内部モデルで何が成り立っているかを調べることは元の (ZFC の) モデルで何が成り立っているかを調べる上で重要であり, このような視点からも AD が導く帰結について研究がなされている.

3 直線構造

ここでは今回の講演と関連する無限組み合わせ論的対象として, ススリン直線とアロンシャイン直線の定義およびその背景について述べる.

Definition 3.1. X を集合とする. X 上の関係 $R \subseteq X \times X$ が以下を満たすとき, $\langle X, R\rangle$ は半順序集合であるという.

- 任意の $x \in X$ に対して xRx.
- 任意の $x, y \in X$ に対して xRy かつ yRx ならば $x = y$.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して xRy かつ yRz ならば xRz.

半順序集合 $\langle X, R\rangle$ が全順序集合であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して xRy または yRx が成り立つことをいう.

全順序集合 $\langle X, R\rangle$ が

- 稠密であるとは, 任意の xRy に対し $xRzRy$ となる $z \in X$ が存在することをいう.
- 完備であるとは, 任意の空でない有界な部分集合が上限と下限を持つことをいう.
- 可分であるとは, 可算な稠密部分集合を持つことをいう.
- 可算鎖条件を満たすとは, 互いに交わらない開区間の族が高々可算であることをいう.

ここで, 稠密な部分集合は任意の開区間と交わることから, 可分であれば可算鎖条件を満たすことに注意する. 順序集合の言葉を用いることで, 実数直線 $\mathbb{R}$ は次のように特徴づけられる.

Theorem 3.2. $\langle X, R\rangle$ を空でない全順序集合とする. $\langle X, R\rangle$ が最小元も最大元も持たず, 稠密かつ完備かつ可分であるとき, $\mathbb{R}$ と順序集合として同型である.

この特徴づけにおける可分性を可算鎖条件に置き換えることができるか？というのがススリンの立てた問いであった.

Definition 3.3. ススリン直線とは, 最大元も最小元も持たない稠密かつ完備な全順序であって, 可算鎖条件を満たすが可分でないものをいう.

ススリンの仮説 (Suslin Hypothesis) SH とは, ススリン直線が存在しないという主張である.

ススリン直線の定義自体は自然なものであるが, SH は ZFC 上独立な命題である.

Theorem 3.4. *ZFC が無矛盾ならば, ZFC + SH も ZFC + ¬SH も無矛盾である.*

一方で, ある程度までの複雑さを持つ順序集合はススリン直線になりえないことが知られている.

Theorem 3.5. *$\mathbf{\Delta}^1_1$-集合であるような順序集合はススリン直線ではない.*

ススリン直線と関係が深い重要な非可算な全順序集合として, アロンシャイン直線がある.

Definition 3.6. アロンシャイン直線とは, 非可算全順序集合であって $\omega_1, -\omega_1$ および $\mathbb{R}$ の非可算部分順序のいずれも埋め込めないものをいう. ここで ω_1 は最小の非可算順序数, $-\omega_1$ はその逆順序である.

木についての詳しい定義はここでは省略するが, ZFC の下でススリン直線・アロンシャイン直線の存在はそれぞれススリン木・アロンシャイン木と呼ばれる組み合わせ論的対象の存在と同値であり, ススリン木は常にアロンシャイン木である.

アロンシャイン直線はススリン直線と異なり, ZFC で存在が証明できる.

Theorem 3.7 (ZFC)**.** *アロンシャイン直線が存在する.*

4　先行研究

2 章で述べたように, AD は定義可能な集合についての性質を一般の集合に要請するような公理であると捉えることができる. このような観点と Theorem 3.5 から, AD の下で SH は成り立つか, すなわちススリン直線は存在し得るのか？という問いが立つ.

前章で述べたように, ススリン直線の存在は ZFC の下ではススリン木という対象の存在と同値である. ところがススリン直線の存在からススリン木を構成する方法には AC を用いる必要があるため, ZF ではススリン直線の存在とススリン木の存在を別個に考える必要がある. ZF + AD の下でススリン木が存在しないことは比較的容易にわかるが, このような事情により, そこから直ちにススリン直線が存在しないことが従うわけではない.

また, AD は実数の部分集合に関する主張であるため, SH のような任意の無限集合に関する命題については単に ZF + AD の下で考えるのではなく $\mathbb{R}$ から自然に構成される $L(\mathbb{R})$ のような AD のモデルについて考察するのが妥当である ($L(\mathbb{R})$ に属する全ての集合は実数をパラメータとして定義可能であり, いわば $L(\mathbb{R})$ では全ての集合が実数の影響を受けている).

この問題に対してチャンとジャクソンは次を示した [1].

Theorem 4.1. *$L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で SH が成り立つ.*

5　主定理

AD の下でのアロンシャイン直線の存在について, 講演者は次を示した.

Theorem 5.1. *$L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で次が成り立つ. アロンシャイン直線は存在しない. すなわち, 任意の非可算全順序集合に対して, ω_1, $-\omega_1$, $\mathbb{R}$ の非可算部分順序のいずれかが埋め込める.*

証明にはウディンによる次の分類定理を用いた.

Theorem 5.2 (ウディン)**.** *$L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で次が成り立つ：任意の集合 X に対して, X は整列可能もしくは $\mathbb{R}$ から X への単射が存在する.*

非可算全順序 $\langle X, R\rangle$ について X が整列可能ならば ω_1 または $-\omega_1$ が, $\mathbb{R}$ から X への単射が存在するならば $\mathbb{R}$ が埋め込めることを, AD の下で $\mathbb{R}$ や ω_1 が持つ組み合わせ論的性質を用いて証明した.

参考文献

[1] W. Chan and S. Jackson, "$L(\mathbb{R})$ with determinacy satisfies the Suslin hypothesis." Advances in Mathematics 346 (2019): 305-328.

[2] W. Chan, "An Introduction to combinatorics of determinacy." Trends in Set Theory, Contemporary Mathematics, 752 (2020): 21-75.

[3] A. E. Caicedo and R. Ketchersid, "A trichotomy theorem in natural models of AD^+." Contemporary Mathematics, 533 (2009): 227-258.