Short time asymptotics of the fundamental solutions for Schrödinger equations with non-smooth potentials

東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 1 年
瀧澤 駿 (Shun TAKIZAWA) *

概 要

本稿では, 滑らかでないポテンシャル関数を伴う Schrödinger 方程式に対する基本解の短時間挙動を考察する. ポテンシャルが滑らかな場合はよく研究されており, 短時間の場合に, 基本解が作用積分を用いて表されることが知られている. しかし, ポテンシャルが滑らかでない場合は, 振動積分作用素の L^2 有界性定理が適用できず, 従来の方法では解析が困難である. 本研究では, 波束変換とよばれる線型変換を用いることにより, 滑らかでないポテンシャルに対しても上記の性質が得られたので, その結果を紹介する.

1 導入

本稿では, 以下の時間依存ポテンシャルを伴う線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(t,x)u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $i=\sqrt{-1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$ であり, $u(t,x)$ は複素数値の未知関数, $u_0(x)$ は複素数値の既知関数, $V(t,x)$ は実数値の既知関数で, ポテンシャルとよばれるものである.

初期値 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ から時刻 t における (1) の解 $u(t) \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ に写す作用素 $U(t)$ を (1) の解作用素という. もし, (1) に解作用素 $U(t)$ が存在すれば, その積分核 (一般には超関数核)$E(t,\cdot,\cdot)$ を (1) の基本解という. すなわち

$$u(t,x) = (U(t)u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x,y)u_0(y)dy$$

である. 以下, $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $x\cdot y$ を単に xy と書く. ポテンシャル V が次の場合には, (1) の基本解 $E(t,x,y)$ を具体的に書くことができる.

- $V \equiv 0$ の場合,
$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}, \quad t \neq 0,$$
- $V(t,x) = Ex$ の場合,
$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} \exp\left(i\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{1}{2}itE(x+y) - \frac{1}{24}iE^2t^3\right), \quad t \neq 0,$$

*E-mail:1123703@ed.tus.ac.jp

- $V(t,x)=\frac{1}{2}x^2$ の場合,

$$E(t,x,y)=\begin{cases}(2\pi i\sin t)^{-n/2}\exp\left(i\frac{\mathrm{cos}t(x^2+y^2)-2xy}{2\mathrm{sin}t}\right), & t\notin\pi\mathbb{Z},\\ e^{-\frac{1}{2}it}\delta(x-(-1)^{t/\pi}y), & t\in\pi\mathbb{Z},\end{cases}\tag{2}$$

ただし, δ は Dirac のデルタ関数である.

$V\equiv 0$ のとき, (1) は自由 Schrödinger 方程式であり, $V=Ex, \frac{1}{2}x^2$ はそれぞれ, シュタルクポテンシャル, 調和振動子とよばれるものである. 一般の場合には, Fujiwara [2, 3] によって, ポテンシャルが二次以下の増大度で, 滑らかなときに, 基本解が短時間で次の形によって表されることが示されている:

$$E(t,x,y)=(2\pi it)^{-n/2}e^{iS(t,x,y)}a(t,x,y),\quad 0<t\ll 1,\tag{3}$$

ここで, 位相関数 S は作用積分とよばれるものであり, (1) に対応する Hamilton 方程式:

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}x(s)=\xi(s)\\ \frac{d}{ds}\xi(s)=-\left(\nabla_x V\right)(s,x(s))\\ x(0)=y,\ \ x(t)=x.\end{cases}\tag{4}$$

の解 $x(s;t,x,y),\xi(s;t,x,y)$ を用いて,

$$S(t,x,y)=\int_0^t\frac{1}{2}|\xi(s;t,x,y)|^2-V(s,x(s;t,x,y))ds$$

と表される関数である. また, 振幅関数 a は, 次の短時間における漸近評価をみたす関数である.

$$\|a(t,x,y)-1\|_{L^\infty_{x,y}}\lesssim t.$$

Fujiwara [2, 3] の結果において, ポテンシャルの滑らかさに関する条件は技術的な仮定である. Hamilton 方程式 (4) が解ける程度の C^2 級のポテンシャルに対して, 基本解の明示的表現を与えることが期待されている (例えば Yajima [7] を参照). しかし, Goldberg [4] により, 一般に滑らかでないポテンシャルに対しては, 短時間における分散型評価が成立せず, (3) と全く同様の表現は期待できない. Nicola [6] はポテンシャル $V(t,x)$ が $|\alpha|=2$ に対して $\partial_x^\alpha V(t,\cdot)\in H_{ul}^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ の場合に, 次の表現を得ている.

$$E(t,x,y)=(2\pi it)^{-n/2}e^{iS(t,x,y)}+r'(t,x,y),\quad 0<t\ll 1.$$

ここで, 剰余項 r' は次の評価をみたす.

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}r'(t,\cdot,y)f(y)dy\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim t^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

注意. (2) が示すように, 空間遠方で二次関数的に増大するポテンシャルの場合には, 短時間の条件が必要である.

注意. $H_{ul}^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ は一様局所ソボレフ空間と呼ばれるものであり, Nicola [6] の滑らかさの仮定は大まかにいえば $C^{3+\frac{n}{2}}$ 級である.

2　主結果

Nicola [6] は証明に振動積分作用素の L^2 有界性定理を用いており, Boulkhemair [1] により, 同様の手法ではポテンシャルの滑らかさが $C^{3+\frac{n}{2}}$ 級より弱められないことが分かっている．本研究では振動積分作用素の代わりに, 波束変換 (定義 2 を参照) を用いることによって, ポテンシャルが C^2 級の場合に対する次の結果を得た.

仮定 1. 任意の $|\alpha| \le 2$ に対して, $\partial_x^\alpha V(t,x) \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ であり, $|\alpha| = 2$ に対して定数 $C_\alpha > 0$ が存在して,

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

をみたすとする.

定理 1. ポテンシャル $V(t,x)$ は仮定 1 をみたすとする．このとき, (1) の基本解 $E(t,x,y)$ は次で表される.

$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} e^{iS(t,x,y)} a_0(t,x,y) + r(t,x,y), \quad 0 < t \ll 1,$$

ここで, a_0 および r は次の漸近評価をみたす.

$$\|a_0(t,x,y) - 1\|_{L^\infty_{x,y}} \lesssim t, \tag{5}$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} r(t,\cdot,y) f(y) dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6}$$

注意. 仮定 1 のもとで, 初期値問題 (1) の基本解の一意存在性に関しては, Nicola [6] により保証されている.

3　準備

定義 1. 自由発展作用素を $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ とする．すなわち,

$$\left(e^{\frac{1}{2}it\Delta} f\right)(x) = \mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[e^{-\frac{1}{2}it\xi^2}\widehat{f}(\xi)\right](x) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i t)^{-n/2} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy \tag{7}$$

と定める．また, $L^2(\mathbb{R}^n)$ 不変となるダイレーション作用素を $D_\varepsilon f(x) := \varepsilon^{-n/2} f(\varepsilon^{-1}x), \quad \varepsilon > 0$ で定める.

補題 1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \le 2$ とする．このとき, $t, \varepsilon > 0$ によらない定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して次の評価が成立する.

$$\left\| x^\alpha e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f \right\|_{L^1} \le C_1 \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^k,$$

$$\left\| x^\alpha e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f \right\|_{L^2} \le C_2 \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}.$$

Proof. $\alpha = 0$ の場合, 定義 1 より,

$$e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f(x) = \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{n/2} e^{i\frac{x^2}{2t}} \int e^{-\frac{1}{2}i\xi^2} \widehat{f}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\xi + \frac{\varepsilon}{t}x\right) d\xi$$

と表されて, 等式 $e^{-\frac{1}{2}i\xi^2}=\frac{1+i\xi\cdot\nabla_\xi}{1+\xi^2}e^{-\frac{1}{2}i\xi^2}$ を用いて部分積分を $n+1$ 回繰り返すことにより, L^1 ノルムの評価が得られる. L^2 ノルムに関しては, $e^{\frac{1}{2}it\Delta}, D_\varepsilon$ の L^2 不変性から直ちにしたがう. $|\alpha|=1,2$ の場合は, 作用素の交換関係:

$$xe^{\frac{1}{2}it\Delta}=e^{\frac{1}{2}it\Delta}\left(x-it\nabla_x\right),\quad \left(x-it\nabla_x\right)D_\varepsilon=\varepsilon D_\varepsilon x-i\frac{t}{\varepsilon}D_\varepsilon\nabla_x$$

を用いることにより, $\alpha=0$ の場合に帰着される. □

定義 2 (波束変換)**.** $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を,

$$W_\varphi f(x,\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi(y-x)}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy,\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

によって定める. また, W_φ の形式的共役作用素 W_φ^* を次で定める.

$$W_\varphi^*F(x):=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\varphi(x-y)e^{ix\cdot\xi}F(y,\xi)dy\bar{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \bar{d}\xi=(2\pi)^{-n}d\xi.$$

Fourier 変換における反転公式, Plancherel の定理の対応物として, 次の補題が成り立つ.

補題 2. $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする. このとき以下が成立する.

- $f(x)=\|\varphi\|_{L^2}^{-2}W_\varphi^*[W_\varphi f](x)$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- $\|W_\varphi^*F\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$, $F\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

次に, 証明で用いる古典軌道に関する性質を述べる. (1) に対応する Hamilton 方程式:

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}x(s)=\xi(s),\\ \frac{d}{ds}\xi(s)=-\left(\nabla_xV\right)(s,x(s)),\end{cases}\tag{8}$$

に対して, $x^{(1)}(s;t,x,y),\xi^{(1)}(s;t,x,y)$ を (8) に境界条件: $x(0)=y,x(t)=x$ を付けたものの解とし, $x^{(2)}(s;t,x,\xi),\xi^{(2)}(s;t,x,\xi)$ を (8) に初期条件: $x(t)=x',\xi(t)=\xi$ を付けたものの解とする. ただし, $0<t\ll 1$ である. このとき, 次が成り立つ.

補題 3. $0<t\ll 1$ とする. $\Phi:\mathbb{R}^n\ni\xi\longmapsto x^{(2)}(0;t,x',\xi)=Y\in\mathbb{R}^n$ とおくと, Φ は $\mathbb{R}^n$ 上 C^1 級の大域的微分同相であり, Φ^{-1} のヤコビアンはある $\mathbb{R}^{1+2n}$ 上有界な関数 r_0 を用いて,

$$\det J\Phi^{-1}=t^{-n}+t^{-n+1}r_0(t,x',Y)\tag{9}$$

と表される. また, ある定数 $C_1,C_2>0$ が存在して, 次の評価が成り立つ.

$$|x^{(1)}(s)-\xi^{(1)}(s)|\le C_1\left(|x-x'|+|y-x^{(2)}(0)|\right),\tag{10}$$

$$\left|\xi^{(1)}(s)-\xi^{(2)}(s)-\frac{(x-x')-(y-x^{(2)}(0))}{t}\right|\le C_2t\left(|x-x'|+|y-x^{(2)}(0)|\right).\tag{11}$$

4 証明の概略

4.1 波束変換による方程式の変換

Kato-Kobayashi-Ito [5] の方法によって, もとの方程式を積分方程式に書き換える. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を任意に一つ取り固定して, $\varphi_\varepsilon^{(t)}(x) := e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon \varphi(x)$ と定める. また, $u(t) \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ を初期値問題 (1) の解とする. $\varphi_\varepsilon^{(t)}(x)$ を窓関数として, (1) の方程式を波束変換すると,

- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[\partial_t u] = \partial_t W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - W_{\partial_t \varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[\Delta u] = W_{\Delta \varphi_\varepsilon^{(t)}} u + 2i\xi \cdot \nabla_x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + |\xi|^2 W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[V(t,\cdot)u] = V(t,x) W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - \nabla_x V(t,x) \cdot x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + i \nabla_x V(t,x) \cdot \nabla_\xi W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
$$+\tfrac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} \int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)} \left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t, x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta \right) u(t,y) e^{-iu\xi} dy$$

を用いることにより,

$$\begin{aligned}
& i \left(\partial_t W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + \xi \cdot \nabla_x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - \nabla_x V(t,x) \cdot \nabla_\xi W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u \right) \\
&= -W_{(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + \left(\frac{1}{2}|\xi|^2 + V(t,x) - \nabla_x V(t,x) \cdot x \right) W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} \int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)} \left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t, x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta \right) u(t,y) e^{-iu\xi} dy
\end{aligned}$$

となる. $\varphi_\varepsilon^{(t)}$ は自由 Schrödinger 方程式の解であるから, 右辺第一項は 0 である. 特性曲線法により, 次の積分方程式を得る.

$$\begin{aligned}
W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u(t,x,\xi) &= e^{-i\int_0^t h(s;t,x,\xi)ds} W_{\varphi_\varepsilon^{(0)}} u_0(x^{(2)}(0;t,x,\xi), \xi^{(2)}(0;t,x,\xi)) \\
&\quad - i \int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds} R[u] \left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi) \right) d\tau
\end{aligned}$$

ここで, $h(s;t,x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi^{(2)}(s;t,x,\xi)|^2 + V(t, x^{(2)}(s;t,x,\xi)) - \nabla_x V(t, x^{(2)}(s;t,x,\xi)) \cdot x^{(2)}(s;t,x,\xi)$,

$$R[u](t,x,\xi;\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=2} \int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)} \left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t, x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta \right) u(t,y) e^{-iu\xi} dy$$

である. 両辺に $W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}$ を作用させると, 補題 2 および L^2-保存則 $\|\varphi_\varepsilon^{(t)}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ より,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_0(t,x,y;\varepsilon) u_0(y) dy \\
&\quad - i \|\varphi\|_{L^2}^{-2} W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} \left[\int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds} R[u] \left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi); \varepsilon \right) d\tau \right], \quad (12) \\
E_0(t,x,y;\varepsilon) &= \|\varphi\|_{L^2}^{-2} (2\pi)^{-n} \iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x-x') \overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(y - x^{(2)}(0;t,x',\xi)} \\
&\qquad \times \exp\left(-i \int_0^t h(s;t,x,\xi) ds + ix\xi - iy\xi^{(2)}(0;t,x,\xi) \right) d\xi dx'
\end{aligned}$$

となる.

4.2 主要項に関する漸近評価

$\phi(t,x,y,x',\xi) = -i\int_0^t h(s;t,x,\xi)ds + ix\xi - iy\xi^{(2)}(0;t,x,\xi)$ とおく．補題 3 の (10), (11) より，次の評価をもつような, ある連続関数 $r_1(t,x,y,x',\xi)$ が存在して, ϕ は次で表される:

$$\begin{aligned}
&\phi(t,x,y,x',\xi) = S(t,x,y) - \frac{1}{2t}\left((x-x') - (y - x^{(2)}(0))\right)^2 + tr_1(t,x,y,x',\xi),\\
&|r_1(t,x,y,x',\xi)| \lesssim |x-x'|^2 + |y - x^{(2)}(0)|^2.
\end{aligned}$$

これより, E_0 は次の振幅関数 $\widetilde{a_0}$ を用いて次のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
E_0(t,x,y;\varepsilon) &= (2\pi it)^{-n/2}e^{iS(t,x,y)}\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon),\\
\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) &= \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(2\pi)^{-n}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x-x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(y - x^{(2)}(0;t,x',\xi)}\\
&\qquad \times e^{\frac{1}{2t}\left((x-x')-(y-x^{(2)}(0))\right)^2}e^{itr_1(t,x,y,x',\xi)}d\xi dx'.
\end{aligned}$$

補題 3 の (9) および $e^{itr_1} = 1 + \left(e^{itr_1} - 1\right)$ より, $\widetilde{a_0}$ は次の三つの項に分けることができる.

$$\begin{aligned}
\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) &= \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}dYdx'\\
&+ \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint r_0(t,x,y,x'+x,\Phi^{-1}(Y+y))\varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}dYdx'\\
&+ \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}\left(e^{itr_1(t,x,y,x'+x,\Phi^{-1}(Y+y)}-1\right)dYdx'
\end{aligned}$$

右辺第一項は, 自由 Schrödinger 方程式の基本解の公式 (7) と, $\|\varphi_\varepsilon^{(t)}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ から 1 に等しい. 右辺第二項, 第三項に補題 1 を用いると,

$$\|\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) - 1\|_{L^\infty_{x,y}} \lesssim \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^k \tag{13}$$

が得られる.

4.3 剰余項に関する漸近評価, 結論

$U(t)$ を (1) の解作用素とする. $\widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon) := E(t,x,y) - E_0(t,x,y;\varepsilon)$ とおくと, (12) および補題 2 より,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int \widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon)f(y)dy\right\|_{L_x^2}\\
&\lesssim \left\|W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}\left[\int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds}R[U(\tau)f]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi);\varepsilon\right)d\tau\right]\right\|_{L_x^2}\\
&\lesssim \int_0^t \left\|R[U(\tau)f]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi);\varepsilon\right)d\tau\right\|_{L^2_{x,\xi}}\\
&= \int_0^t \|R[U(\tau)f](\tau,X,\Xi;\varepsilon)d\tau\|_{L^2_{X,\Xi}}\\
&\lesssim \sum_{|\alpha|=2}\int_0^t \|X^\alpha\varphi_\varepsilon^{(\tau)}(X)\|_{L^2_X}\|U(\tau)f\|_{L^2}d\tau.
\end{aligned}$$

ここで, 補題 1 と L^2-保存則 $\|U(\tau)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ を用いて, 上の評価を続ければ,

$$\left\| \int \widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon) f(y) dy \right\|_{L^2_x} \lesssim t \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|_{L^2} \tag{14}$$

を得る. (13), (14) が $\varepsilon > 0$ によらない定数で評価されていることに注意して, $a_0(t,x,y) := \widetilde{a_0}(t,x,y;\sqrt{t})$, $r(t,x,y) := \widetilde{r}(t,x,y;\sqrt{t})$ とすれば, a_0, r はそれぞれ, (5), (6) をみたし, 定理 1 の証明が終了する.

参考文献

[1] Boulkhemair, A., *Estimations L^2 precisées pour des integrales oscillantes.* Comm. Partial Differential Equations, **22** (1997), 165–184.

[2] Fujiwara, D., *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation.* J. Analyse Math, **35** (1979), 41–96.

[3] Fujiwara, D., *Remarks on convergence of the Feynman path integrals.* Duke Math. J. **47** (1980), 559–600.

[4] Goldberg, M., Visan, M., *Remarks on convergence of the Feynman path integrals.* Duke Math. J. **47** (1980), 559–600.

[5] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., *Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials.* J. Funct. Anal. **266** (2014), 733–753.

[6] Nicola, F., *On the time slicing approximation of Feynman path integrals for non-smooth potentials.* J. Analyse. Math. **137** (2019), 529–558.

[7] Yajima, K., *Schrödinger equations II (in Japanese)*, (2014).