Local Central Limit Theorem for Reflecting Diffusions in a Continuum Percolation Cluster

慶應義塾大学大学院理工学研究科　基礎理工学専攻
竹内裕隆 (Yutaka TAKEUCHI) *

概 要

ランダム媒質の研究において均一化は重要な問題の一つである. 離散的なモデルの場合には多くの結果が知られている. 連続的なモデルに関しても, random environment 上の拡散過程に関する結果は多く知られているが, 拡散過程が反射壁を持つ場合に関しては結果があまり知られていない. 本講演では連続パーコレーションが幾何的な条件を満たす場合, その上の反射壁を持つ拡散過程に関して局所中心極限定理が成り立つという結果を紹介する.

1　導入

熱拡散や電流の流れは, 媒質内の不純物により複雑な挙動をする. ランダム媒質の研究では不純物が乱雑に混ざっていると解釈し, これらの現象を調べる.

ランダム媒質に関する主要な問題の一つに均一化がある. これは端的に言えばある粗視的・巨視的にはランダム性が失われ, 熱拡散や電流の流れ等の挙動が単純に見える事を指す. 確率論的には, 均一化とは媒質上の確率論的対象（例えば確率過程）に関するスケール極限が, 媒質を決めるランダム性とは無関係な極限に収束するという事である.

ランダム媒質に関する均一化はまず Kipnis-Varadhan([17]) によりボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する annealed invariance principle が 1980 年に示された. だが, それより強い quenched invariance principle については長らく技術的な理由により解決されていなかった. しかし, 2000 年代に Barlow([4]) が熱核（推移密度）の漸近挙動に対する評価を与えた事により, ボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する quenched invariance principle が証明された ([9],[18]). それを皮切りに, より一般的なモデルであるランダムコンダクタンスモデル上のランダムウォークに関する quenched invariance principle の証明がなされた ([5],[1],[2]). 特に, Deushcel-Nguyen-Slowik([12]) が定常エルゴード的な場合に媒質にある種の可積分性と幾何的な条件を課すだけでその上のランダムウォークが quenched invariance principle を満たす事を示している. その後, Bella-Schäffner([7]) が可積分条件を緩める事に成功している. 最近では離散的な場合に関しては長距離相関を持つモデルや媒質にダイナミクスを入れたモデルに関しての研究が行われている. また, 離散モデルの場合はより強く, スケーリングした熱核が時空間局所一様にガウス核に収束するという局所中心極限定理が示されている. ([6], [3], [8])

一方で, 連続的なモデルに関しては, 拡散過程に関する quenched invariance principle がいくつか知られている ([13],[20],[11]). 特に, Chiarini と Deuschel は random environment 上の拡散過程に関して, 媒質が定常エルゴード的だが退化している場合に quenched invariance principle だけで

*E-mail:yutaka.takeuchi@keio.jp

なく局所中心極限定理が成り立つことまで証明している ([10]). しかし, ある境界で拡散過程が反射する場合を考えると, 問題が難しくなり, それ程多くの結果は知られていない. 連続パーコレーション上の反射壁 Brown 運動に対する annealed invariance principle が知られているだけである ([21],[24]).

本稿では, 連続パーコレーションの無限クラスター上の反射壁を持つ拡散過程に関する局所中心極限定理について紹介する.

2　準備

2.1　連続パーコレーション

$\mathbb{R}^d$ 上の配置空間 Ω を以下のように定める：

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}^d,\ \text{全てのコンパクト集合 } K \subset \mathbb{R}^d \text{ に対して } \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(K) < \infty \right\}.$$

Ω は適切な位相（漠位相）を入れる事ができ, その Borel 集合族は $\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) = n\}$, $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N})$ という形の部分集合から生成される事が知られている. また, ω は Dirac 測度の可算和であり, $\omega = \sum_i \delta_{x_i}$ と $\mathbb{R}^d$ の部分集合 $\{x_i\}_i$ を, x_i が全て異なっている場合に同一視する事とする[1].

連続パーコレーション $L(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, ω は多重点を持たない) は

$$L(\omega) = \bigcup_{x \in \omega} B_{\mathrm{Euc}}(x, \rho)$$

と定義される. （ω を先程の同一視で $\mathbb{R}^d$ の部分集合と見ている事に注意. ）ここで, $B_{\mathrm{Euc}}(x, r)$ は中心が x で半径が r の $\mathbb{R}^d$ の通常の Euclid 開球であり, ρ は固定された正定数である. $L(\omega)$ が非有界連結成分をただ一つ持つ時, それを $W(\omega)$ と記し, これを無限クラスターと呼ぶ. 便宜上非有界連結成分が存在しなかったり, 二つ以上存在する場合, $W(\omega) = \emptyset$ と定める.

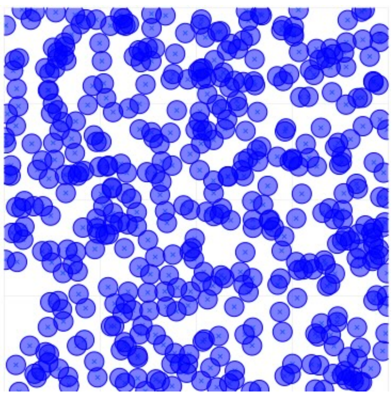

図 1: 連続パーコレーション

[1] この同一視によって, 多重点を持たない Ω の元をピックアップする事は, （可算個の）粒子の配置を考える事と同義になるので Ω を配置空間と呼ぶ.

パーコレーションは浸透現象を数理モデル化した物[2]であり, 中心点の配置 ω をある確率測度に基づいてランダムに配置していった時に $L(\omega)$ の幾何的な様子を調べる事に興味がある．例えば, 無限クラスター $W(\omega)$ が存在するかどうかは基本的な問題である．連続パーコレーションに関する基本的な事は [19] を参照されたい.

定義より, $W(\omega)$ はある ω の部分集合 $I(\omega)$ を用いて $\bigcup_{x\in I(\omega)} B_{\mathrm{Euc}}(x,\rho)$ と書くことができる．新しい半径 $\rho' \geq \rho$ を取ってきて modified cluster $W'(\omega)$ を

$$W'(\omega) \equiv W_{\rho'}(\omega) = \bigcup_{x\in I(\omega)} B_{\mathrm{Euc}}(x,\rho').$$

で定義する．本稿ではこの modified cluster 上の拡散過程を考える事とする．modified cluster は半径を少し膨らませている事によって開球同士の重なり具合が良くなっている事に注意されたい. 元のクラスターでは二つの開球が「ギリギリ」接しているような状況があるかもしれない．そのような場所を拡散過程は通りにくいが, 一度入ったら戻りにくい trap の部分になっており, 均一化を阻害している可能性がある. 元のクラスターではなく modified cluster を考える事の利点としては, このような状況を回避できる点がある.

技術的な理由により除外集合 Δ を

$$\Delta = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega = \sum_i \delta_{x_i}, \quad |x-y| = 2\rho \ \ (\exists x, y \in \omega) \\ \text{または } x_i = x_j \ (\exists i \neq j) \end{array} \right\}.$$

で定め, 考える集合を $\widehat{\Omega} = \{\omega \in \Omega \setminus \Delta \mid 0 \in W'(\omega)\}$ に制限する.

$\mathbb{P}$ を Ω 上の確率測度とし, その $\widehat{\Omega}$ への制限 $\widehat{\mathbb{P}}$ を $\mathbb{P}(\widehat{\Omega}) > 0$ の場合 $\widehat{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \widehat{\Omega})/\mathbb{P}(\widehat{\Omega})$ で定める. また, $\widehat{\mathbb{P}}$ に関する期待値を $\widehat{\mathbb{E}}$ と記す.

また, 配置空間上の平行移動 τ_z を

$$\tau_z\omega(A) = \omega(A+z) = \sum_{x\in\omega} \delta_x(A+z) = \sum_{x\in\omega} \delta_{x-z}(A),$$

で定める.

2.2 双線形形式

$a\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ を正定値行列に値を取る確率変数とし, $u, v \in L^2(W'(\omega))$ に対して $\mathcal{E}^\omega(u,v)$ を

$$\mathcal{E}^\omega(u,v) = \int_{W(\omega)} \langle a(\tau_x\omega)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx$$

で定める．（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積．）

$C_c^\infty\left(\overline{W'(\omega)}\right) \cap L^2(W'(\omega))$ を $(\cdot,\cdot) + \mathcal{E}^\omega(\cdot,\cdot)$ という内積で完備化したものを $\mathcal{F}^\omega$ とする．ここで, $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積であり, $\mathbb{R}^d$ 上の領域 U に対して関数空間 $C_c^\infty(\overline{U})$ とは

$$C_c^\infty(\overline{U}) = \{u \in C(U) \mid \text{ある } U \text{ の開近傍 } V \text{ と } v \in C_c^\infty(V) \text{ が存在して } u = v \text{ in } U.\}$$

で定まる集合である．この時, $(\mathcal{E}^\omega, \mathcal{F}^\omega)$ は Dirichlet 形式になり, 正則であれば対応するマルコフ過程を持つ事が知られている．Dirichlet 形式の一般論については [14] を参照されたい.

[2]例えば, 雨粒が落ちて地面に染み込むという現象が該当する．この場合 ω とは無数の雨粒が落ちる位置であり, $L(\omega)$ とは雨粒が落ちてできる無数の円形のシミによる模様である.

2.3　幾何的概念

均一化を考える上で, 幾何的な条件が重要な役割を果たす．この小節では W を Lipschitz 領域とする．

2 点 $x, y \in W$ に対して, “intrinsic distance” を x と y を結ぶ W 内の連続曲線の長さの下限として定める．さらに, d_W による開球を $B_W(x,R) = \{y \in W \mid d_W(x,r) < R\}$ $(x \in W,\ R > 0)$ と書く．均一化の問題を解く為には局所的な議論をしていけば十分なのだが, intrinsic ball $B_W(x,R)$ は一般的には良い性質を持っていない．その為, 均一化を考える上で良い ball という概念を導入する必要がある．

Definition 2.1. W を Lipschitz 領域とする．

(1) $x \in W$, $R > 0$, $C_V \geq 1$, $C_{\rm iso} > 0$ とする．intrinsic ball $B_W(x,R)$ が (C_V, C_{iso})-*regular* であるとは次の 2 条件を満たす事を言う

(a) (Volume regularity). $|\cdot|$ で d 次元 Lebesgue 測度を表す事とする．この時,

$$C_V^{-1} R^d \leq |B_W(x,R)| \leq C_V R^d \tag{2.1}$$

が成り立つ．

(b) (相対等周不等式). $\mathcal{H}_{d-1}$ を $(d-1)$ 次元 Hausdorff 測度とする時,

$$\mathcal{H}_{d-1}(B_W(x,R) \cap \partial O) \geq C_{\rm iso} R^{-1} |O| \tag{2.2}$$

が Lipschitz 境界を持ち, $|O| \leq \frac{1}{2}|B_W(x,R)|$ を満たす全ての開集合 $O \subset B_W(x,R)$ に対して成り立つ．

(2) $\theta \in (0,1)$, $C_V \geq 1$, $C_{\rm iso} > 0$ とする．W が (C_V, C_{iso}, θ)-*very regular* であるとは, ある $\hat{R}_\theta > 0$ が存在して, 全ての $R \geq \hat{R}_\theta$ に対して $x \in B_W(0,R)$ かつ $r \geq R^{\frac{\theta}{d}}$ であるなら開球 $B_W(x,r)$ は $(C_V, C_{\rm iso})$-regular となる事を言う．

図 2, 3 では regular ball の条件を満たさないような例を挙げている．それぞれの図の青い領域が一つの intrinsic ball $B_W(x,R)$ を表している．regular ball の条件 (a) は intrinsic ball の volume growth が通常の Euclid 開球と同じである事を言っている．直感的には, これは均一化が成り立つのであれば空間の広がり具合が Euclid 空間と同じである筈という事から課されている．条件 (b) は直感的には「長い」通路が存在しないという事を示している．幅が一定だが長さがいくらでも長

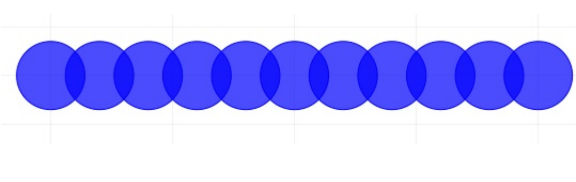

図 2: 条件 (a) を満たさない例

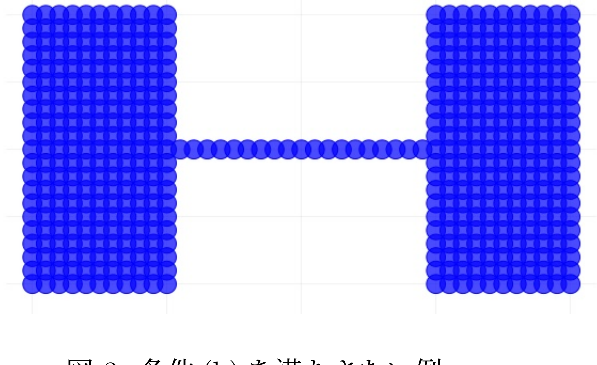

図 3: 条件 (b) を満たさない例

くできる場合, この通路によって長時間挙動がブラウン運動からどんどん離れていってしまう. 条件 (b) はこのような事が起きないという事を言っている.

$G_W(x)$ を x に最も近い $\overline{W}$ 内の点全体の集合とする. また, $G_W(x)$ の点で, 辞書式順序で最小の点を $g_W(x)$ と書く事とする.

最後に maximal “hole” size という量を導入する. 通常の Euclid 距離は $d_{\mathrm{Euc}}(x,y)$ で表す事にする. 各 $R>0$ に対して maximal hole size $h_W(R)$ を以下で定義する.

$$h_W(R) = \sup\{d_{\mathrm{Euc}}(x,W) \mid x \in B_{\mathrm{Euc}}(0,R)\}.$$

3 主定理

この説では modified cluster 上の拡散過程に関する主結果を述べる. まずその為に必要な仮定を紹介する.

Assumption 1. 確率測度 $\mathbb{P}$ は以下の条件を満たす.

(1) $\mathbb{P}$ は平行移動 $\{\tau_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ に関して定常エルゴード的. すなわち,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\circ\tau_x^{-1} = \mathbb{P} \\ \tau_x^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \end{cases}$$

が全ての $x\in\mathbb{R}^d$ に関して成立する.

(2) $\mathbb{P}(\widehat{\Omega}) > 0$ かつ $\mathbb{P}(\Delta) = 0$.

Assumption 2. ある定数 $\lambda, \Lambda > 0$ が存在して, $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all ω に対して

$$\lambda|\xi|^2 \le \langle a(\omega)\xi, \xi\rangle \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Assumptions 1 と 2 によって $(\mathcal{E}^\omega, \mathcal{F}^\omega)$ が正則 Dirichlet 形式になる事が知られている ([15], [16]). 従って Dirichlet 形式の一般論により対応する拡散過程 $\{X_t^\omega\}_t$ が構成できる. この拡散過程は境界を反射壁として持つので, 本講演ではこれを reflecting diffusion と呼ぶ.

Assumption 3. $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all ω に対して reflecting diffusion $\{X_t^\omega\}_t$ は Lebesgue 測度に対して絶対連続な推移密度 $p_t^\omega(\cdot,\cdot)$ を持つ.

Assumption 4. (1) (θ-very regularity (cf. [12, Assumption 1.3])) $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, ある (ω のみに依存する) 定数 $C_V^\omega \ge 1$, $C_{\mathrm{iso}}^\omega > 0$, $\theta^\omega \in (0,1)$ が存在して, $W'(\omega)$ は $(C_V^\omega, C_{\mathrm{iso}}^\omega, \theta^\omega)$-very regular. また, very regular の定義に現れる定数 $\hat{R}_\theta$ を, ω 依存性がわかるように $\hat{R}_\theta^\omega$ と書く事とする

(2) (Isoperimetric condition) $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, ある定数 $c_H^\omega > 0$ が存在して

$$C_{\mathrm{IS}}^\omega := \inf\left\{ \frac{\mathcal{H}_{d-1}(W'(\omega)\cap\partial O)}{|W'(\omega)\cap O|^{\frac{d-1}{d}}} \;\middle|\; \begin{array}{l} O \subset W'(\omega) \text{ は有界開集合で} \\ \text{Lipschitz 境界を持ち, かつ} \\ \mathcal{H}_{d-1}(W'(\omega)\cap\partial O) < c_H^\omega \end{array} \right\} > 0. \tag{3.1}$$

直感的には (1) は modified cluster が巨視的なスケールでは十分良い性質を持っている事を仮定している．一方 (2) は trap になるような狭い部分が存在しない事を仮定している．この 2 条件によって, Sobolev 型不等式や Poincaré 不等式が導けるので, 解析的な手法を使うことが可能になる．

筆者は前研究において Assmptions 1–4 の下で ω を固定する毎に確率 1 で reflecting diffusion のスケール極限がブラウン運動に収束する事を示した．

Theorem 3.1 (Quenched invariance principle, [23])**.** $d \geq 2$ とし, Assumptions 1-4 を仮定する．P_0^ω を $\{X_t^\omega\}_t$ が 0 から出発する時の法則とする．この時 $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s.ω に対して, scaled process $\{\varepsilon X^\omega_{\varepsilon^{-2}t}\}_t$ は $\varepsilon \to 0$ とした時 P_0^ω の下で共分散行列 Σ の Brown 運動に弱収束する. さらに共分散行列 Σ は non-random な正定値行列である．

本稿の主定理はこれをより精密化した結果である．その為にはもう一つ仮定が必要になる．

Assumption 5. $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, 次が成り立つ．

(1) ある定数 $\gamma \equiv \gamma(\omega) \in (0,1)$ が存在して

$$\lim_{R\to\infty} \frac{h_{W'(\omega)}(R)}{R^\gamma} = 0. \tag{3.2}$$

(2) ある定数 $\Upsilon \equiv \Upsilon(\omega) \in (0,1)$ と $C_W^\omega > 0$ が存在して

$$d_{W'(\omega)(x,y)} \leq C_W d_{\mathrm{Euc}}(x,y) \vee R^\Upsilon \tag{3.3}$$

が全ての $x, y \in B^\omega(0,R)$ と $R \geq \hat{R}_\theta^\omega$ に対して成り立つ．ここで, $\hat{R}_\theta^\omega$ は Assumption 4 において現れる定数である．

Assumption 5 は最近接点 $g_{W'(\omega)}(x)$ と x のズレを制御するために用いられる．

筆者は以上の仮定の下で主結果である局所中心極限定理を証明する事に成功した．$k_t^\Sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ で共分散行列 Σ のガウス核を表す．すなわち,

$$k_t^\Sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d \det \Sigma}} \exp\biggl(-\frac{\langle x, \Sigma^{-1}x\rangle}{2t}\biggr).$$

Theorem 3.2 (局所中心極限定理, [22])**.** $d \geq 2$ とし, Assumptions 1–5 を仮定する．$R > 0$ とし, $I \subset (0,\infty)$ は有界開区間とする．この時 $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|x|<R} \sup_{t\in I} \Bigl| \varepsilon^{-d} p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0, g_{W'(\omega)}(x/\varepsilon)) - k_t^\Sigma(x) \Bigr| = 0.$$

Assumption1–3 は, クラスターに定常エルゴード性を課している Assumption 1(1) を除けば問題を考える為に必要な技術的な仮定である. 筆者は Assumption 4, 5 が局所中心極限定理において本質的な条件である事を明らかにした．

4 証明の概略

この節では主結果の証明の概略を簡潔に述べる．各 $\omega \in \widehat{\Omega}$ 毎に示せば十分なため, 以後 ω を固定して議論する[3]．まず, 前節でも述べたように Assumption 4 から Sobolev 型不等式や Poincaré 不

[3]実際, [22] では一般の Lipschitz 領域 W に対して今の仮定に対応する条件を課して non-random な設定の下で議論を進めている．

等式を導く事ができる．また, volume regularity (2.1) から，（十分大きな半径を取れば）半径が事なる 2 つの同心円の Lebesgue 測度の比は定数で抑えられる事に注意されたい．これらによって Moser's iteration を行うことで放物型 Harnack 不等式を証明する事ができる．放物型 Harnack 不等式からは, 熱核の Hölder 連続性

$$\sup_{x,y\in B_{W'(\omega)}(x_0,r)} |p_t^\omega(0,x)-p_t^\omega(0,y)| \le c\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^\alpha t^{-\frac{d}{2}}$$

を導く事ができる．さらに, Assumption 5 によって最近接点 $g_W(x)$ をコントロールできるので

$$\lim_{r_0\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{x,y\in B_{\mathrm{Euc}}(0,R)\\|x-y|<r_0}}\sup_{t\in I}\varepsilon^{-d}|p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0,g_{W'(\omega)}(x/\varepsilon))-p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0,g_{W'(\omega)}(y/\varepsilon))|=0 \tag{4.1}$$

という局所一様な熱核評価を得る事ができる．今, quenched invariance principle (Theorem 3.1) によって各点ではガウス核に収束する事が言えており, 式 (4.1) と組み合わせる事により主結果である Theorem 3.2 を示す事ができる．

参考文献

[1] S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, and B. M. Hambly. Invariance principle for the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 156(3-4):535–580, 2013.

[2] S. Andres, J.-D. Deuschel, and M. Slowik. Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment. *Ann. Probab.*, 43(4):1866–1891, 2015.

[3] S. Andres and P. A. Taylor. Local limit theorems for the random conductance model and applications to the Ginzburg-Landau $\nabla\varphi$ interface model. *J. Stat. Phys.*, 182(2):Paper No. 35, 35, 2021.

[4] M. T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(4):3024–3084, 2004.

[5] M. T. Barlow and J.-D. Deuschel. Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances. *Ann. Probab.*, 38(1):234–276, 2010.

[6] M. T. Barlow and B. M. Hambly. Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for percolation clusters. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 1, 1–27, 2009.

[7] P. Bella and M. Schäffner. Quenched invariance principle for random walks among random degenerate conductances. *Ann. Probab.*, 48(1):296–316, 2020.

[8] P. Bella and M. Schäffner. Non-uniformly parabolic equations and applications to the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 182(1-2):353–397, 2022.

[9] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Related Fields*, 137(1-2):83–120, 2007.

[10] A. Chiarini and J.-D. Deuschel. Local central limit theorem for diffusions in a degenerate and unbounded random medium. *Electron. J. Probab.*, 20:no. 112, 30, 2015.

[11] A. Chiarini and J.-D. Deuschel. Invariance principle for symmetric diffusions in a degenerate and unbounded stationary and ergodic random medium. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(4):1535–1563, 2016.

[12] J.-D. Deuschel, T. A. Nguyen, and M. Slowik. Quenched invariance principles for the random conductance model on a random graph with degenerate ergodic weights. *Probab. Theory Related Fields*, 170(1-2):363–386, 2018.

[13] A. Fannjiang and T. Komorowski. A martingale approach to homogenization of unbounded random flows. *Ann. Probab.*, 25(4):1872–1894, 1997.

[14] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended edition, 2011.

[15] M. Fukushima and M. Tomisaki. Reflecting diffusions on Lipschitz domains with cusps—analytic construction and Skorohod representation. volume 4, pages 377–408. 1995. Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma).

[16] M. Fukushima and M. Tomisaki. Construction and decomposition of reflecting diffusions on Lipschitz domains with Hölder cusps. *Probab. Theory Related Fields*, 106(4):521–557, 1996.

[17] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104(1):1–19, 1986.

[18] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 463(2085):2287–2307, 2007.

[19] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[20] H. Osada. Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. In *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982)*, volume 1021 of *Lecture Notes in Math.*, pages 507–517. Springer, Berlin, 1983.

[21] H. Osada and T. Saitoh. An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains. *Probab. Theory Related Fields*, 101(1):45–63, 1995.

[22] Y. Takeuchi. Local central limit theorem for reflecting diffusions in a continuum percolation cluster. arXiv:2310.05482.

[23] Y. Takeuchi. Quenched invariance principle for a reflecting diffusion in a continuum percolation cluster. *J. Math. Soc. Japan, to appear*, arXiv:2204.01288.

[24] H. Tanemura. Homogenization of a reflecting barrier Brownian motion in a continuum percolation cluster in $\mathbf{R}^d$. *Kodai Math. J.*, 17(2):228–245, 1994.