

# K3 曲面の自己同型群とその実質的コホモロジー次元について

東京工業大学 理学院数学系  
高津 大樹 (Taiki TAKATSU) \*

## 1 はじめに

本講演では、 $\mathbb{C}$  上の代数的 K3 曲面のみを扱う。特に、K3 曲面の自己同型群の分類や不変量の計算問題について話したい。

K3 曲面の自己同型群の分類問題については 2 つのアプローチが知られている。1 つはある種の有限性条件を課した上での分類である。例えば、向井氏 [7] により、K3 曲面の有限シンプレクティック部分群は 23 次のマッシュー群の部分群として実現することが知られている。もう 1 つのアプローチは、Borcherds の格子理論の応用による、自己同型群の生成系の決定である。K3 曲面の自己同型群は非可換無限群になることがあり、種数 2 のリーマン面に付随する Jacobian Kummer surface の場合などがそうである。Jacobian Kummer surface の自己同型群の生成系の決定問題は Klein によって提起され、金銅氏 [6] により、Borcherds の格子理論を用いて解決されるまで、100 年以上を要した難題であった。この手法により、これまでいくつかの K3 曲面の自己同型群の生成系が決定されている。一方で、この手法は全ての K3 曲面に適用できるわけではないため、一般の K3 曲面の自己同型群の分類論を構築するためには、新しい手法の開発が望まれる。一般の自己同型群を捉える新たな試みとして、2018 年の代数学シンポジウムにおいて向井茂氏 [8] により、以下の予想が提唱された。

**Conjecture 1** ([8]).  $X$  を楕円的 K3 曲面、Enriques 曲面、または Coble 曲面とし、 $\text{Aut}(X)$  を  $X$  の自己同型群とする。このとき、 $\text{Aut}(X)$  の実質的コホモロジー次元  $\text{vcd}(\text{Aut}(X))$  は、 $X$  の楕円曲面構造から誘導される Mordell-Weil 群の階数の最大に一致するだろう。

今回、講演者は K3 曲面の自己同型群の自然な双曲空間への作用を通して、 $\text{vcd}(\text{Aut}(X))$  が  $X$  のアンブル錐のある種の無限遠境界から決定されることを示した。また、アンブル錐の無限遠境界がある種の sphere packing になっている場合に、具体的に自己同型群の  $\text{vcd}$  を決定することができた。講演ではこれらの結果について紹介したい。

---

\* E-mail: takatsu.t.aa@m.titech.ac.jp

## 2 導入

主結果を述べるにあたって、(1) 双曲幾何、(2) 群のコホモロジー、(3) K3 曲面、それぞれの事項について順番に用語等を準備する。

### 2.1 双曲空間について

K3 曲面  $X$  に対して、自然な双曲空間  $\mathbb{H}_X^n$  が構成できる。これを後に説明するため、まずは双曲幾何の基本事項について述べる。

**Definition 2.1.**  $n$  を非負整数とする。  $(n+1)$  次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^{n+1}$  とベクトル  $x = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_{n-1}, y_n)$  に対して、内積  $x \circ y$  を以下で定める:

$$x \circ y = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n).$$

$n$  次元双曲空間の hyperboloid model  $H^n$  を  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x \circ x = -1, x_1 > 0\}$  で定める。  $H^n$  上の点  $x, y$  の間の双曲距離  $d_H$  は以下で定める:

$$\cosh d_H(x, y) = -x \circ y.$$

**Remark 2.2.** 通常は  $\mathbb{R}^{n+1}$  上の内積を  $x \circ y = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  と定め、hyperboloid model を定義するのが一般的である。ここでは、後の代数幾何への応用のため符号を逆にしている。

$(n+1)$  次正方行列  $A$  が上の内積を保つ、すなわち任意のベクトル  $x, y$  に対して  $x \circ y = Ax \circ Ay$  を満たすとする。さらに  $A$  が hyperboloid model  $H^n$  を  $H^n$  自身に写す場合、双曲距離  $d_H$  の定義より、 $A$  は  $H^n$  上の等長写像を誘導する。以下のように、逆が成り立つ。

**Theorem 2.3** ([9, Theorem 3.2.3]).  $n$  次元双曲空間の hyperboloid model  $H^n$  に対して、

$$O^+(1, n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A \text{ は内積 } \circ \text{ を保つ、さらに } AH^n = H^n \text{ を満たす}\}$$

とする。  $O^+(1, n)$  の  $\mathbb{R}^{n+1}$  への作用の  $H^n$  への制限を通して、  $O^+(1, n)$  は  $H^n$  の等長変換群と同一視される。

### 2.2 群のコホモロジー次元について

群に対してある種の大きさを考えたものが (実質的) コホモロジー次元である。ここでは、定義と簡単な具体例を見る。

**Definition 2.4.**  $R$  を単位的環、  $M$  を左  $R$  加群とする。以下のような  $M$  に関する長さ  $n$  の射影分解が存在するとき、  $\text{projdim}_R M \leq n$  とする:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

このような  $n$  が存在しないとき、  $\text{projdim}_R M = \infty$  とする。  $\text{projdim}_R M$  を  $M$  の射影次元という。

**Definition 2.5.** 群  $\Gamma$  に対して、 $\mathbb{Z}$  上の群環  $\mathbb{Z}\Gamma$  を考える。このとき、任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して、 $\gamma \cdot 1 := 1$  という自明な作用を考えることで、 $\mathbb{Z}$  は自明な左  $\mathbb{Z}\Gamma$  加群になる。このとき、 $\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}\Gamma$  に関する射影次元  $\text{prodim}_{\mathbb{Z}\Gamma} \mathbb{Z}$  を群  $\Gamma$  のコホモロジー次元といい、 $\text{cd}\Gamma$  と書く。

**Example 2.6.** 以下を例としてあげる。

1. 階数  $n$  の自由アーベル群  $\mathbb{Z}^n$  のコホモロジー次元は  $n$ 。
2. 階数  $m$  の自由群  $F_m$  のコホモロジー次元は  $1$ 。

このように、群に対してある種の大きさを定めることができた。一方で、群  $\Gamma$  が有限位数の元（振れ元）を含む場合はコホモロジー次元  $\text{cd}\Gamma = \infty$  となってしまうため、次の定義に移行する。

**Definition 2.7.** 群  $\Gamma$  が振れ元を持たない有限指数部分群  $\Gamma'$  を持つとする。このとき、 $\Gamma'$  のコホモロジー次元  $\text{cd}\Gamma'$  を  $\Gamma$  の実質的コホモロジー次元といい、 $\text{vcd}\Gamma$  で表す。

この定義が well-defined であることは、以下の Serre の定理により保証される。

**Theorem 2.8** ([3, Chapter VIII, Theorem 3.1]). 群  $\Gamma$  が振れ元を持たないとする。  $\Gamma$  の任意の有限指数部分群  $\Gamma'$  に対して、 $\text{cd}\Gamma = \text{cd}\Gamma'$  が成り立つ。

## 2.3 K3 曲面について

**Definition 2.9.** コンパクトな複素曲面  $X$  について、その標準束が自明かつ不正則数が  $0$  のとき、K3 曲面であるという。

以下では特に断らない限り、 $X$  を  $\mathbb{C}$  上の代数的 K3 曲面とする。

**Example 2.10.** K3 曲面の例として、以下をあげておく。

1. 射影空間  $\mathbb{P}^3$  内の非特異 4 次曲面。
2. 射影平面  $\mathbb{P}^2$  内の非特異 6 次曲線  $C$  で分岐する 2 重被覆。

K3 曲面の自己同型群は、アンプル錐への作用を見ると理解しやすい。アンプル錐を定義するため、いくつか必要な用語を定める。

**Definition 2.11.**  $\omega_X$  を K3 曲面  $X$  の至る所で  $0$  にならない正則 2 形式とする。このとき、 $X$  のネロン・セベリ格子  $NS(X)$  を以下で定める：

$$NS(X) := \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) : \langle x, \omega_X \rangle = 0\}.$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $H^2(X, \mathbb{Z})$  のカップ積であり、これを  $NS(X)$  へ制限することで符号  $(1, \rho(X) - 1)$  の格子になる。 $\rho(X)$  は  $X$  のピカル数である。また、 $NS(X)$  の直交群を  $O(NS(X))$  で表す。

**Definition 2.12.** K3 曲面  $X$  に対し、

$$\Delta(X) := \{\delta \in S_X : \langle \delta, \delta \rangle = -2\}, \quad \Delta^+(X) := \{\delta \in \Delta(X) : \delta \text{ は有効因子.}\}$$

と定める. また, 錐  $P(X)$  を

$$P(X) = \{x \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) : \langle x, x \rangle > 0\}$$

で定めると, 2つの連結成分を持っている. ケーラー類のクラスを含む方を  $P^+(X)$  と表し, positive cone という.

**Definition 2.13.** また  $X$  のアンプル錐  $A(X)$  を以下で定める:

$$A(X) = \{x \in (NS(X) \otimes \mathbb{R}) \cap P^+(X) : \text{任意の } \delta \in \Delta(X)^+ \text{ に対して, } \langle x, \delta \rangle > 0\}.$$

**Definition 2.14.** K3 曲面  $X$  から  $\mathbb{P}^1$  への固有全射正則写像  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  でそのファイバーが連結であり, 有限個のファイバーを除いて楕円曲線であるとき,  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  は楕円的 K3 曲面という. また,  $j : J \rightarrow \mathbb{P}^1$  を  $f$  の jacobian fibration とし,  $j$  のセクションの生成する群を  $f$  に付随する Mordell-Weil 群という.

次に, ネロン・セベリ格子  $NS(X)$  から双曲空間が構成できることを説明する.

まず,  $NS(X)$  は符号  $(1, \rho(X) - 1)$  の格子であった. ここで,  $n = \rho(X) - 1$  とし, 2次形式  $f_{n+1}(x)$  を  $f_{n+1}(x) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$  で定める. さらに2次形式  $f$  を  $f(x) = \langle x, x \rangle$  ( $x \in NS(X) \otimes \mathbb{R}$ ) とすると, シルベスターの慣性法則より, ある  $M \in GL(n+1, \mathbb{R})$  が存在して,  $f_{n+1}(Mx) = f(x)$  となる. Definition 2.1より, 集合  $\{x \in NS(X) \otimes \mathbb{R} : \langle x, x \rangle = 1\}$  のケーラー類を含む方の連結成分を  $n$ 次元双曲空間の hyperboloid model と同一視できる.

**Definition 2.15.** 上のように構成された双曲空間を  $\mathbb{H}_X^n$  と表わし, K3 曲面  $X$  に付随する双曲空間と呼ぶ.  $\mathbb{H}_X^n$  の点  $x, y$  の間の双曲距離  $d(x, y)$  は以下で与えられる:

$$\cosh d(x, y) = -\langle x, x \rangle$$

.

**Remark 2.16.** ここで, K3 曲面  $X$  の自己同型は  $NS(X)$  に作用し, カップ積を保つので, 双曲空間  $\mathbb{H}_X^n$  に等長写像として作用している.

双曲幾何学, より一般に幾何学的群論などの分野では, 群の作用する空間に対して性質の良い無限遠コンパクト化を考えたい, というものがある. 例えば, Bestvina, Mess [2] は振れ元を持たない双曲群  $G$  に対して以下を示した:

$$\text{cd}G = \dim \partial G + 1,$$

ここで  $\dim \partial G$  は  $G$  のグロモフ境界の位相次元である.

[5] で深谷氏, 尾國氏により相対双曲群に対するブローアップ境界というものが構成されており, 最近, 深谷氏 [4] により相対双曲群に対する Bestvina-Mess 型の公式が示された. 本研究の主結果は, この深谷氏の結果を自己同型群  $\text{Aut}(X)$  に適用することで得られる. 一般の相対双曲群に対するブローアップ境界は, 粗コンパクト化といった幾何学的群論の言葉を用いて記述されているが, 我々の場合には, 双曲空間  $\mathbb{H}_X^n$  とアンプル錐を用いて単純な記述が可能である. 以下では, K3 曲面  $X$  のアンプル錐  $A(X)$  に付随するブローアップ境界  $\partial A_X^b$  を定義するため, いくつか用語を準備する.

**Definition 2.17.**  $X$  の positive cone  $P^+(X)$  の閉包を  $\overline{P^+(X)}$  で表す。ここで、

$$\mathbb{P}(\overline{P^+(X)}) = (\overline{P^+(X)} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}_{>0}.$$

とすると、自然な包含写像  $i: \mathbb{H}_X^n \rightarrow \mathbb{P}(\overline{P^+(X)})$  が考えられる。  $i$  は  $\mathbb{H}_X^n$  から  $i(\mathbb{H}_X^n)$  への同相写像を与えている。このとき  $i(\mathbb{H}_X^n)$  の  $\mathbb{P}(\overline{P^+(X)})$  における閉包を  $\overline{\mathbb{H}_X^n}$ 、境界を  $\partial\mathbb{H}_X^n$  で表す。

**Definition 2.18.**  $X$  のアンプル錐  $A(X)$  に対して、集合  $A_X$  を

$$A_X = A(X) \cap \mathbb{H}_X^n$$

と定める。  $A_X$  の  $\overline{\mathbb{H}_X^n}$  における閉包を  $\overline{A_X}$  で表す。また、集合  $\partial A_X := \overline{A_X} \setminus A_X$  をアンプル錐  $A(X)$  に付随する無限遠境界と呼ぶ。

**Definition 2.19.** 自然な包含写像  $i: \mathbb{H}_X^n \rightarrow \mathbb{P}(\overline{P^+(X)})$  に対して、  $\mathcal{E}_X$  を

$$\mathcal{E}_X := i(NS(X)) \cap \partial A_X$$

で定める。

$\partial\mathbb{H}_X^n = \{x \in \overline{P^+(X)} \setminus \{0\} : \langle x, x \rangle = 0\} / \mathbb{R}_{>0}$  より、  $\mathcal{E}$  の点は  $NS(X) \cap \overline{A(X)}$  の原始的な点で自己交点数が 0 であるもの、つまり  $X$  上の楕円曲面構造と一対一対応していることがわかる。以下では、  $\mathcal{E}_X$  の各点で  $\partial A_X$  をブローアップすることで  $\partial A_X^{bl}$  を構成する。

**Definition 2.20.**  $(n-1)$  次元球面を  $S^{n-1}$  で表す。  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  と点  $p \in U$  に対して、

$$\text{Bl}_p(U) = \{(x, t) \in U \times S^{n-1} : |x - p|t = (x - p)\}$$

と定める。ここで、  $|\cdot|$  はユークリッドノルムとする。また、写像  $\pi_p: \text{Bl}_p(U) \rightarrow U$  を  $\pi_p(x, t) = x$  で定める。写像  $\pi_p$  を開集合  $U$  の点  $p$  でのブローアップと呼ぶ。

**Definition 2.21.**  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$  を  $U$  の有限部分集合とする。各  $p \in \mathcal{P}$  に対して、  $p$  の開近傍  $U_p$  を  $U_p \cap \mathcal{P} = \{p\}$  を満たすようにとる。各  $i$  に対して  $U_{p_i}$  の点  $p_i$  でのブローアップ  $\pi_{p_i}: \text{Bl}_{p_i}(U_{p_i}) \rightarrow U_{p_i}$  をとる。ここで、  $\text{Bl}_{p_i}(U_{p_i}) \setminus \pi_{p_i}^{-1}(p_i)$  と  $U_{p_i} \setminus \{p_i\}$  を  $\pi_{p_i}$  により同一視することで、  $U \setminus \mathcal{P}, \text{Bl}_{p_1}(U_{p_1}), \dots, \text{Bl}_{p_m}(U_{p_m})$  を張り合わせた空間を  $\text{Bl}_{\mathcal{P}}(U)$  で表す。

写像  $\pi_{\mathcal{P}}: \text{Bl}_{\mathcal{P}}(U) \rightarrow U$  を以下で定める:

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} x & (x \in U \setminus \mathcal{P}) \\ \pi_p(x) & (x \in \text{Bl}_p(U_p), p \in \mathcal{P}) \end{cases}$$

写像  $\pi_{\mathcal{P}}$  を開集合  $U$  の  $\mathcal{P}$  でのブローアップという。

**Definition 2.22.**  $\overline{\mathbb{H}_X^n}$  は単位閉球  $B^n$  と同相なので、自然な包含  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  を考えることで、  $\overline{\mathbb{H}_X^n}, \mathcal{E}_X$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分集合とみなす。  $\mathcal{E}_X$  の有限部分集合  $\mathcal{P}$  に対し、  $\mathbb{R}^n$  の  $\mathcal{P}$  でのブローアップ  $\pi_{\mathcal{P}}: \text{Bl}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  を考え、包含関係に関する射影極限  $\varprojlim \pi_{\mathcal{P}}$  を  $\pi_{\mathcal{E}_X}: \text{Bl}_{\mathcal{E}_X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  と表す。  $\pi_{\mathcal{E}_X}^{-1}(\partial A_X \setminus \mathcal{E}_X)$  の  $\text{Bl}_{\mathcal{E}_X}(\mathbb{R}^n)$  での閉包を  $\partial A_X^{bl}$  と表し、アンプル錐  $A(X)$  に付随するブローアップ境界と呼ぶ。

### 3 主結果

**Definition 3.1.**  $\text{Aut}(X)$  の  $\overline{\mathbb{H}}_X^n$  への作用に関して、ある点  $p \in \overline{\mathbb{H}}_X^n$  の軌道  $\text{Aut}(X) \cdot p$  が有限集合になるとき、 $\text{Aut}(X)$  を初等的という。

講演者は、K3 曲面のシンプレクティック自己同型群  $\text{Aut}_s(X)$  が幾何学的有限性を持つこと、特に相対双曲性を示すことで深谷氏の Bestvina-Mess 型の公式 [4] を適用し、以下を示した。

**Theorem 3.2** ([10, Theorem 1]).  $\text{Aut}(X)$  が非初等的であるならば、以下が成り立つ。

$$\text{vcd}(\text{Aut}(X)) = \dim \partial A_X^{bl} + 1.$$

ここで、 $\dim \partial A_X^{bl}$  は  $\partial A_X$  の位相次元を表す。

**Remark 3.3.**  $\text{Aut}_s(X)$  の幾何学的有限性については、菊田康平氏が同様の主張をほぼ同時期に得ていたことが、最近判明した。詳細は [10] で述べている。

さて次は、Theorem 3.2の応用として実質的コホモロジー次元が計算できる具体例を紹介したい。一般にはアンプル錐の無限遠境界  $\partial A_X$  は非常に複雑な形になっているが、sphere packing の場合には比較的扱いやすい。

**Definition 3.4.**  $\Delta^+(X)$  の元  $\delta$  に対して、

$$\begin{aligned} H_\delta &= \{x \in \mathbb{H}_X^n : d(x, a) = d(x, s_\delta a)\}, \\ H_\delta^+ &= \{x \in \mathbb{H}_X^n : d(x, a) < d(x, s_\delta a)\}, \end{aligned}$$

とする。また  $H_\delta$  の  $\overline{\mathbb{H}}_X^n$  での閉包を  $\overline{H}_\delta$ 、 $S_\delta := \overline{H}_\delta \cap \partial \mathbb{H}_X^n$  と定める。アンプル推  $A(X)$  は  $A(X) = \bigcap_{\delta \in \Delta^+(X)} H_\delta^+$  と表せた。 $\Delta^+(X)$  の元で  $A(X)$  の面を定めるもの全体の集合を  $\Delta_X$  とする。

このとき  $\partial A_X$  が sphere packing であるとは、任意の相異なる  $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_X$  に対して、 $S_{\delta_1} \cap S_{\delta_2}$  が空もしくは一点であることである。また、 $\partial A_X$  が連結な sphere packing であるとは、 $\partial A_X$  が sphere packing であり、任意の相異なる  $\delta, \delta' \in \Delta_X$  に対して、 $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Delta_X$  が存在して、 $\delta = \delta_1, \delta_m = \delta'$  かつ  $S_{\delta_i} \cap S_{\delta_{i+1}}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) が一点集合になることである。

**Theorem 3.5** ([10, Theorem 3]).  $X$  を楕円的 K3 曲面とする。 $\partial A_X$  が連結な sphere packing であり、 $X$  の任意の  $\mathcal{E}_X$  の点が sphere packing のある接点に対応するとき、以下が成り立つ。

$$\text{vcd}(\text{Aut}(X)) = \max\{\text{rk MW}(f)\} = \rho(X) - 3.$$

Theorem 3.5の仮定を満たすような具体例として Baragar の結果 [1] がある。

**Example 3.6.** Baragar はアンプル推の無限遠境界が Apollonian circle packing になる K3 曲面  $Y_2$  を構成した。

$Y_2$  のネロン・セベリ格子は以下の Gram 行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.5より、 $\text{vcd Aut}(Y_2) = 1$  を得る.

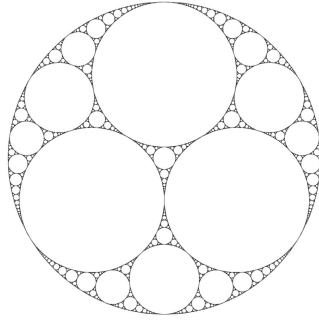


図1 The Apollonian circle packing

**Example 3.7.** また、Apollonian circle packing の高次元化として自然に Apollonian sphere packing が考えられるが、Baragar は Apollonian sphere packing をアンプル推に持つような K3 曲面  $Y_3$  とそのネロン・セベリ格子を計算している.  $NS(Y_3)$  は以下の Gram 行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.5より、 $\text{vcd Aut}(Y_3) = 2$  を得る.

## 参考文献

- [1] A. Baragar, The apollonian circle packing and ample cones for K3 surfaces, preprint.
- [2] M. Bestvina, G. Mess, The boundary of negatively curved groups, Journal of the american mathematical society. Vol 4 (1991), 469-481.
- [3] K. S. Brown, Cohomology of Groups, (1982), Springer New York, NY.
- [4] T. Fukaya, Blown-up corona of relatively hyperbolic groups, preprint.
- [5] T. Fukaya and S. Oguni, Coronae of relatively hyperbolic groups and coarse cohomologies, Journal of Topology and Analysis 8(2016) 431-474.
- [6] S.Kondo, The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface, J. Algebraic Geometry, 7 (1998), 589-609.
- [7] S. Mukai, Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group, Invent. Math., 94(1988), 183-221.

- [8] S. Mukai, K3, Enriques, Coble 曲面-無限自己同型群を中心として, 第 63 回代数学シンポジウム報告集 (2018), 111-118.
- [9] J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic manifolds (3rd edition), (2019), Springer Science & Business Media.
- [10] T. Takatsu, Blown-up boundaries associated with ample cones of K3 surfaces, preprint.