

コルクとエキゾチック対のトライセクション

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻

高橋夏野 (Natsuya TAKAHASHI) *

概要

コルクとは所定の条件を満たす可縮な 4 次元多様体であり, コルクに沿った切り貼り操作によって 4 次元多様体のエキゾチック対を構成することができる. 本稿では, あるコルクに対して, 最小種数の相対トライセクションを 2 通りの方法で与える. また応用として, コルクによって得られる境界付き 4 次元多様体のあるエキゾチック対に対して, 最小種数の相対トライセクションを構成する.

1 エキゾチック微分構造とコルク

本稿で考える多様体は全て連結, コンパクト, 有向で滑らかなものとする. また境界付き 4 次元多様体といえば, その境界は空でない連結なものとする.

2 つの滑らかな多様体がエキゾチックであるとは, それらが同相であるが微分同相でないことをいう. 多様体のトポロジーにおいて, 4 次元はエキゾチック微分構造に関する現象が特に顕著である. 例えば $n \neq 4$ のとき, 任意の閉 n 次元位相多様体は高々有限通りの微分構造しか許容しないことが知られている. 一方で $n = 4$ のときは, 無限通りの微分構造を許容するものが存在する. 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の構成に関する研究において, コルクと呼ばれる概念が導入された. 本章では, コルクとエキゾチック対の関連について紹介する.

定義 1.1. C を可縮な 4 次元多様体で, 境界をもつものとする. $\tau: \partial X \rightarrow \partial X$ を境界上の滑らかな対合写像とする. τ が C 上の自己同相写像に拡張可能であり, C 上の自己微分同相に拡張できないとき, 組 (C, τ) を (または単に C を) コルクと呼ぶ.

コルクを用いることによって, 4 次元多様体のエキゾチック対を構成することができる. X を滑らかな 4 次元多様体とし, (C, τ) をコルクとする. また C は, X に滑らかに埋め込まれているとする. 4 次元多様体 X' を, $X - \text{Int } C$ と C を τ によって貼合せて得られるものとして定める. 即ち, $X' := (X - \text{Int } C) \cup_{\tau} C$ とおく. このとき X' は, X から (C, τ) に沿ったコルクツイストで得られたという. このように構成された X' は X と同相となる. しかし微分同相であるとは限らないので, (X, X') はエキゾチック対となる可能性がある.

逆に, 4 次元多様体の任意のエキゾチック対はコルクツイストを介して移り合うことが知られている. 即ち, 以下の主張が成り立つ.

* E-mail:nt-takahashi@ist.osaka-u.ac.jp

定理 1.2 (Curtis–Freedman–Hsiang–Stong [3], Matveyev [6]). 単連結な閉 4 次元多様体の任意のエキゾチック対 (X, Y) に対して, X に埋め込まれたあるコルク (C, τ) が存在し, コルクツイスト X' は Y と微分同相である.

この定理は, 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の研究において, コルクの重要性を示すものとして注目されている. 以下では, コルクと, コルクツイストによって得られるエキゾチック対の例を紹介する.

例 1.3 (Akbulut [1]). 境界付き 4 次元多様体 W_1 を図 1 の Kirby 図式によって与えられるものとする. 対合写像 $f_1 : \partial W_1 \rightarrow \partial W_1$ は, 図 1 における「 \bullet 」と「 0 」を入れ替える操作によって得られるものとする. このとき, 組 (W_1, f_1) はコルクである.

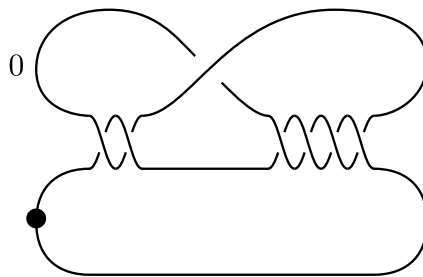


図 1 Akbulut コルク W_1 の Kirby 図式.

上記の組 (W_1, f_1) は **Akbulut** コルクと呼ばれるものであり, 最初に構成されたコルクの例として知られている. 例えば, Akbulut コルクを用いることによって, $K3$ 曲面をブローアップして得られる閉 4 次元多様体 $K3 \# \overline{CP^2}$ のエキゾチック対が構成できる ([1]). 以下の主張は, Akbulut コルクから得られる境界付き 4 次元多様体のエキゾチック対の代表的な例を与える.

例 1.4 (Akbulut [1]). 境界付き 4 次元多様体 P, Q をそれぞれ図 2, 3 の Kirby 図式で与えられるものとする. このとき, (P, Q) は Akbulut コルクに沿ったツイストで得られるエキゾチック対である.

本稿では, このエキゾチック対 (P, Q) に焦点を当てる.

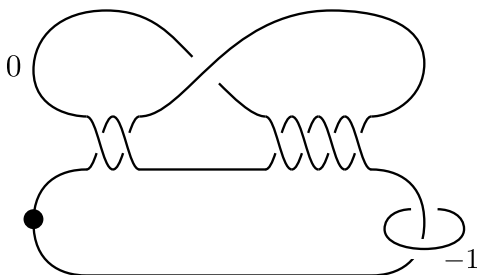


図 2 P の Kirby 図式.

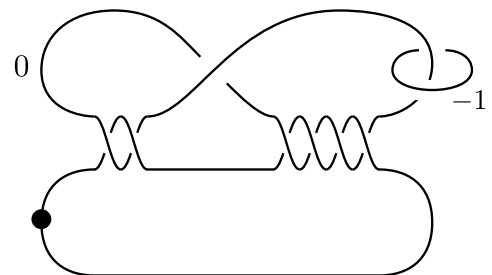


図 3 Q の Kirby 図式.

2 4次元多様体のトライセクション

トライセクションとは、滑らかな4次元多様体を所定の方法で3つの4次元1ハンドル体に分割するという概念である。これは3次元多様体に対するHeegaard分解の4次元におけるアナロジーとして解釈される。通常、単にトライセクションといえば、閉4次元多様体に対する3分割を意味することが多い。本稿では、境界付き4次元多様体に対して定義される相対トライセクションに着目する。

3次元多様体の位相構造はHeegaard図式という曲面上の2つの曲線族によって表示されるのであった。これと同様のことが4次元多様体のトライセクションによって実現できる。滑らかな4次元多様体の微分構造は、トライセクション図式と呼ばれる曲面上の3種類の曲線族によって表すことができる。本章では、境界付き4次元多様体の相対トライセクションに対応する、相対トライセクション図式について詳しく解説する。(相対)トライセクション自体の定義については、例えば[4], [2]を参照のこと。

定義 2.1. Σ, Σ' を連結でコンパクトな向き付けられた曲面とする。整数 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して、 α^i, β^i をそれぞれ Σ, Σ' 上の互いに交わらない単純閉曲線の族とする。曲面と n 個の曲線族の組 $(\Sigma; \alpha^1, \dots, \alpha^n), (\Sigma'; \beta^1, \dots, \beta^n)$ に対し、これらが **ds** 同値であるとは、 $(\Sigma; \alpha^1, \dots, \alpha^n)$ が Σ からの微分同相写像と有限回のスライドによって $(\Sigma'; \beta^1, \dots, \beta^n)$ に移ることをいう。但し、ここでのスライドは α^i 内の曲線同士でのみ行うものとし、 $i \neq j$ なる i, j に対しては α^i 内の曲線を α^j 内の曲線へスライドすることは許さない。

定義 2.2. 整数 g, k, p, b を $g, k, p \geq 0, b \geq 1, 2p + b - 1 \leq k \leq g + p + b - 1$ を満たすものとする。曲面 Σ を $\Sigma_{g,b}$ と微分同相なものとし、 α, β, γ を Σ 上の $g - p$ 個の互いに交わらない単純閉曲線の族とする。曲面とその上の3つの曲線族の組 $\mathcal{D} = (\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ が $(g, k; p, b)$ 相対トライセクション図式であるとは、 $(\Sigma; \alpha, \beta), (\Sigma; \beta, \gamma), (\Sigma; \gamma, \alpha)$ が図4の標準的な図式 $(\Sigma_{g,b}; \delta, \epsilon)$ と **ds** 同値であることをいう。但し、図4において赤色の曲線族が δ で、青色の曲線族が ϵ である。

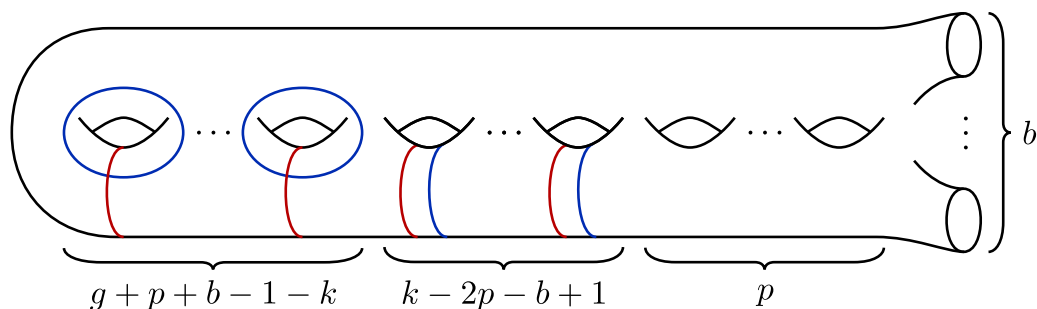


図4 標準的な $(g, k; p, b)$ 型の図式 $(\Sigma_{g,b}; \delta, \epsilon)$.

図5, 6は相対トライセクション図式の例である。定義2.2からわかるように、相対トライセクション図式とは、所定の条件を満たす曲面とその上の3つの曲線族の組のことであった。この分野における慣習では、図5, 6のように、(相対)トライセクション図式は曲面上の3色の曲線で表し、同色の曲

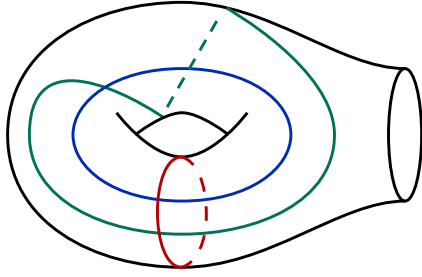


図5 (1, 0; 0, 1) 相対トライセクション図式.

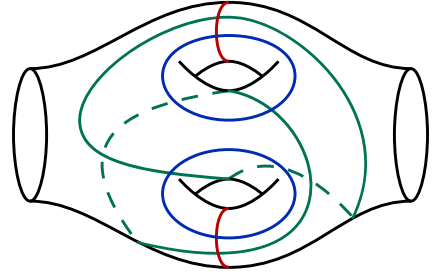


図6 (2, 0; 0, 2) 相対トライセクション図式.

線は同一の族に属することを意味する. 特に, α に属する曲線は赤色, β に属する曲線は青色, γ に属する曲線は緑色で表す.

次の定理は, 相対トライセクションと相対トライセクション図式の間に対応を与える.

定理 2.3 (Castro-Gay-Pinzón-Caiced [2]). 次の 2 つが成り立つ.

- (i) 任意の $(g, k; p, b)$ 相対トライセクション図式 $(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ に対して, 次の条件を満たすある境界付き 4 次元多様体 X と, X のある $(g, k; p, b)$ 相対トライセクション $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ が (微分同相を法として) 一意に存在する.
 - 3 分割の共通部分 $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ は曲面 Σ と微分同相である.
 - $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ と Σ を同一視したとき, α, β, γ はそれぞれ $X_3 \cap X_1, X_1 \cap X_2, X_2 \cap X_3$ 内の $g - p$ 個のメリディアン円盤の境界である.
- (ii) 相対トライセクションが与えられた任意の境界付き 4 次元多様体 (X, T) に対し, ある相対トライセクション図式 D が (ds 同値を法として) 一意に存在し, (X, T) は (i) によって D から誘導される.

定理 2.3 は以下の 1 : 1 対応が存在することを意味する.

$$\frac{\{\text{相対トライセクション}\}}{\text{微分同相}} \xleftrightarrow{1:1} \frac{\{\text{相対トライセクション図式}\}}{\text{ds 同値}}.$$

X を 4 次元多様体とし, D を相対トライセクション図式とする. X が, 定理 2.3 によって D に対応する相対トライセクションが与えられた 4 次元多様体と微分同相であるとき, 単に D は X の相対トライセクション図式であるともいう. 図 5 は穴あき複素射影平面 $\mathbb{C}P^2 - \text{Int } D^4$ の $(1, 0; 0, 1)$ 相対トライセクション図式である. 図 6 は $S^2 \times D^2$ の $(2, 0; 0, 2)$ 相対トライセクション図式である.

3 主結果

本章では, コルクおよびコルクから得られるエキゾチック対の相対トライセクションの構成を紹介する. 詳しい議論については, [8], [9] を参照のこと. 第 1 章で見たように, コルクは 4 次元多様体のエキゾチック対の構成に役立つのであった. 本稿における 1 つ目の主結果は, Akbulut コルク W_1 の相対トライセクションに関するものである.

定理 3.1 ([9]). Akbulut コルク W_1 は図 7, 8 の相対トライセクション図式 D_1, D_2 に対応する 2

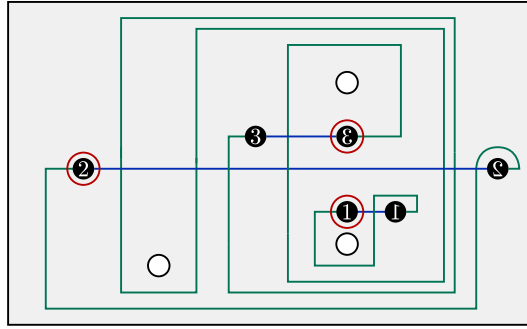


図7 Akbulut コルク W_1 の $(3, 3; 0, 4)$ -相対トライセクション図式 \mathcal{D}_1 .

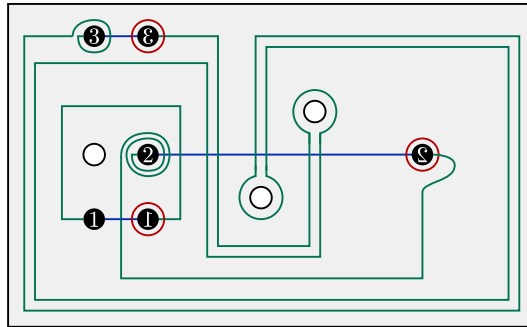


図8 Akbulut コルク W_1 の $(3, 3; 0, 4)$ -相対トライセクション図式 \mathcal{D}_2 .

つの $(3, 3; 0, 4)$ 相対トライセクションを許容する.

筆者は [8] において, Akbulut コルクが許容するトライセクションの種数の最小値が 3 であることを示した. 定理 3.1 で与えた $(3, 3; 0, 4)$ 相対トライセクション図式は, 最小種数を実現するものである. トライセクションの種数の下からの評価についての議論も, [8] を参照のこと.

定理 3.1 で与えた Akbulut コルクに対する 2 通りの相対トライセクションを応用し, あるエキゾチック対に対して同一の係数を持つ相対トライセクションを構成した.

定理 3.2 ([9]). 図 2, 3 の Kirby 図式で与えられる境界付き 4 次元多様体のエキゾチック対 (P, Q) は, 共に $(4, 3; 0, 4)$ 相対トライセクションを許容する. 特に, P, Q はそれぞれ図 9, 10 で表示される $(4, 3; 0, 4)$ 相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P, \mathcal{D}_Q$ を持つ.

図 9, 10 の $(4, 3; 0, 4)$ 相対トライセクション図式は, Akbulut コルクの相対トライセクション図式を元にして構成した. 相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P, \mathcal{D}_Q$ 内の灰色の部分が消すと, それぞれ $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ に一致することが確認できる.

最後に, トライセクションに関するある予想と, 今回の主結果の関連について述べる. 4 次元多様体 X のトライセクション種数とは, X が許容する全てのトライセクションの中で, 3 分割の共通部分となる曲面の種数の最小値のことをいう. これは滑らかな 4 次元多様体の微分同相不変量として定義される. しかし Lambert-Cole-Meier [5] は, トライセクション種数は同相に関する不変量でしかないという予想を立てた. 即ち, 「4 次元多様体の任意のエキゾチック対は同一のトライセクション種数を持つ」という主張である. 定理 3.2 を発展させた結果として, エキゾチック対 (P, Q) は共にトライセ

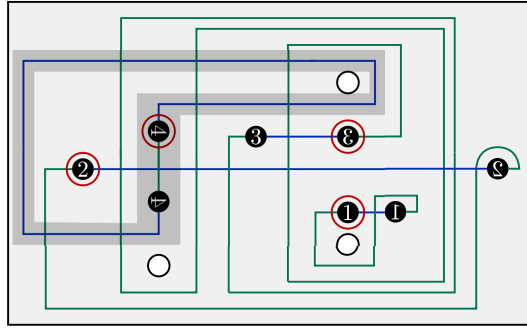


図9 P の $(4, 3; 0, 4)$ -相対トライセクション図式 \mathcal{D}_P .

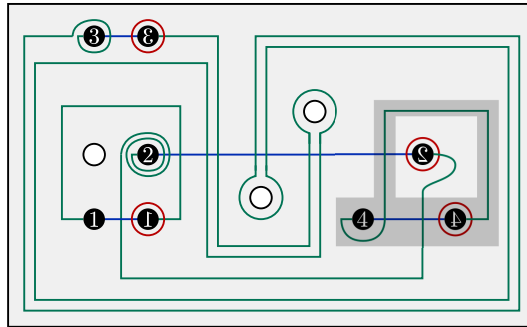


図10 Q の $(4, 3; 0, 4)$ -相対トライセクション図式 \mathcal{D}_Q .

クシオン種数が4であることが示せた ([9]). この4という値は、トライセクション種数が一致する既知のエキゾチック対の中で、最小である。

参考文献

- [1] Selman Akbulut, *A fake compact contractible 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 335–356.
- [2] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.
- [3] Cynthia L. Curtis, Michael H. Freedman, Wu-Chung Hsiang, and Richard Stong, *A decomposition theorem for h -cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), no. 2, 343–348.
- [4] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [5] Peter Lambert-Cole and Jeffrey Meier, *Bridge trisections in rational surfaces*, J. Topol. Anal. **14** (2022), no. 3, 655–708.
- [6] Rostislav Matveev, *A decomposition of smooth simply-connected h -cobordant 4-manifolds*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 571–582.
- [7] Natsuya Takahashi, *Minimal genus relative trisections of corks*, arXiv preprint

arXiv:2208.08144 (2022).

- [8] Natsuya Takahashi, *Exotic 4-manifolds with small trisection genus*, arXiv preprint arXiv:2308.00482 (2023).