$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な Poisson 括弧

神奈川学園中学・高等学校
多田和功 (Yasukatsu TADA) *

概要

Grassmann 代数や Clifford 代数における代数的自己同型写像には $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な写像が存在する．$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な写像に対しては, 従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は保存されない.Grassmann 代数（あるいは）Clifford 代数の二つの代数的自己同型写像の間に,parity map なる写像を定義し, その特別な場合を利用して parity 項と呼ぶ odd 元を定義する.parity 項が $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧を決定付けることと $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像による $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の相互関係を述べる.

1 導入

Heisenberg 方程式の解として調和振動子の代数を考えるとき,Weyl 代数と Clifford 代数が得られる．Weyl 代数と可換代数,Clifford 代数と Grassmann 代数との対応で, 量子 - 古典対応が見られる. 代数上に Moyal $*$-積を定義し, 代数との組を考えるストラテジーが変形量子化の手法であった ([3], [4], [15], [16], [20], [21]). 変形表示の問題については [17],[18],[19],[22],[23] 等にある. 計算の背後には Hochshild のコホモロジーの議論が登場した ([9]). 代数を出発点として“座標変換”なるものを考えるとき,“座標変換”＝“代数的自己同型写像”という見方を採用することができる.

ところで, 超対称性を記述する 数学として supermanifold の理論が登場し, 広く発展してきており, 様々な場所で基本的言語として使用されている ([1], [2], [5], [7], [8], [11], [24]) . supermanifold はその座標変換がボゾンとフェルミオンを保つような（$\mathbb{Z}_2$-graded parity 保存な）写像として定義される. そこでの Poisson 括弧 はやはり, ボゾンとフェルミオンを保つように考えられている．したがって, 従来の定義による Poisson 括弧は parity 保存する写像に関しては, その形は保たれるので parity 非保存な写像については特に考察の対象にする必要がなかったわけである ([6]). しかし,Leites[12],[13] で既に述べられているように (最近では [14]), supermanifold の座標変換として parity を保存するという仮定は, 数学的には人工的な仮定である.Grassmann 代数や Clifford 代数には parity 非保存な写像が存在するので, その点も含めて考察をしていくことはできないだろうか（計算式は明示されていないが [21] に括弧式が保存されないことへの言及がある）. そこで, 本論文では,Grassmann 代数上での Poisson 括弧 についての考察を変形量子化の手法を用いながら行うことにする.superalgebra 上の Poisson 括弧についてはこれまでも様々調べられており, 例えば,N.Cantarini,V.Kac[10] が 述べている generalized Poisson 括弧のようなものもあるが, そこで考えている写像も parity 保存なも

* E-mail:tada@kanagawa-kgs.ac.jp

のである. Grassmann 代数は superalgebra の特別な場合であるので, ここでは Grassmann 代数に話を限る. 考える写像としては parity 保存に限らずに代数的自己同型写像にまで広げて考えることにし,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧が parity 非保存な写像に対してどのような変化を受けるのかを考察する.parity 構造を定めると,Poisson 構造はそれに対応して定まることを述べる. 座標変換を代数的自己同型写像であるべしといったときから,parity 構造を持つ代数に対して,parity の変化を統制しているものは一体何であるのかといった疑問が浮かんでくる. その問に答えるために,parity map なる写像を定義する.Clifford 代数の代数的自己同型写像からの Poisson 括弧のずれは parity map から定まる parity 項 によって定まることを述べる.

2 代数的自己同型写像, 代数的自己同型写像のなす群

本稿において,Grassmann 代数の生成元の個数は 2n 個とする（Weyl 代数の定義のアナロジーで考える）. 形式的パラメーター ν を添加した ν 付き Grassmann 代数上に Moyal$*$-積を定義を行う. 組 $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), *\right)$ は Clifford 代数 $Cl_{n,n}(\mathbb{R})$ に同型となる. ここで,Moyal$*$-積を定義を行うときに, 生成元を微分する消滅作用素を利用するので生成元の取り方に依存することを注意しておく.$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像を考えるときに, 項の次数について, 偶元 (even な項) は偶元で保たれるが, 奇元（odd な項）は偶元が mixed される. 奇元の表示は絶対的なものではなく,$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像に依存する (代数表示の問題を持つ). 以下, 記号法などを述べた上で得られた群論的な定理, 命題を列挙する.

定義 2.1. 代数 $(A,\cdot)$ が parity 構造を持つとは, ある P,Q⊂A が存在して, 次の関係式を満たすときをいう.

$$\begin{array}{l} A = P \oplus Q \\ P \cdot P \subset P \\ P \cdot Q \subset Q \\ Q \cdot P \subset Q \\ Q \cdot Q \subset P \end{array}$$

次に, 代数（A, ·）が parity 構造を持つときに, parity が同じであることを以下のように定義する.

定義 2.2. 代数（A, ·）が parity 構造を持つとき, 代数（A, ·）の代数的自己同型写像の元 $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut$（$A,\cdot$）に対して, parity 同値であるとは $\varphi_1(P) = \varphi_2(P), \varphi_1(Q) = \varphi_2(Q)$ が成り立つときをいう.

定義 2.3. $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ が 2^{2n} 次元実 Grassman 代数であるとは, 次の性質を持つ $\mathbb{R}$ 係数 2^{2n} 次元線形空間のことである.

- $\wedge$ は結合的な積
- 生成元 $\langle e_i\rangle = \{e_1, e_2, \cdots, e_{2n}\}$ が存在し, 次の基本関係式を満たす.

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,2n)$$

生成元の変更を行うことがあるので,$\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ という記法で, 生成元 $\langle e_i\rangle$ を用いていることを明示的にしている. 特に混乱を生じない場合には $\left(\bigwedge^{2n}, \wedge\right)$ のように表す.

定義 2.4. Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}, \wedge\right)$ の even part $\left(\bigwedge_0^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$,odd part $\left(\bigwedge_1^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ を次のように定義する.

$$\left(\bigwedge\nolimits_0^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) = \left\{a_{ev} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{2k}=1}^{2n} a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}, a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k}} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\left(\bigwedge\nolimits_1^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) = \left\{a_{od} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}=1}^{2n} a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k+1}}, a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}} \in \mathbb{R}\right\}$$

命題 2.1. Grassmann 代数は parity 構造を持つ（$\mathbb{Z}_2$-graded 代数である）.

定義 2.5. $Ev_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_0^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ を even part への射影とする.

定義 2.6. $Od_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_1^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ を odd part への射影とする.

定義 2.7. $B_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ を次で定義する (先頭項を一番後ろへ移動する写像).

$$B_{\langle e_i\rangle}\left(e_p \wedge e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\right) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_p$$

定義 2.8. $\iota_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_1^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ なる odd part の符号を取り替える写像を

$$\iota_{\langle e_i\rangle}(a) = Ev_{\langle e_i\rangle}(a) - Od_{\langle e_i\rangle}(a)$$

で定義する.

定義 2.9. 左消滅作用素 $\overrightarrow{\partial}_{e_i} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ を次で定義する.

- $\mathbb{R}$-linear
- $\overrightarrow{\partial_{e_i}}\left(e_j\right) = \delta_{ij}$
- $\overrightarrow{\partial_{e_i}}(a \wedge b) = \overrightarrow{\partial_{e_i}}(a) \wedge b + \iota\left(\langle e_i\rangle\right)(a) \wedge \overrightarrow{\partial_{e_i}}(b)$

右消滅作用素 $\overleftarrow{\partial_{e_i}} : \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ の定義も同様に行う（飛び越しの際, 生成元の選び方に依存していることに注意する).

定義 2.10. $\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right)[\![\nu]\!], \wedge\right)$ が ν 付き Grassmann 代数であるとは,$\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ の $\mathbb{R}[[\nu]]$ による中心拡大 ν として得られる結合的代数のことである.

定義 2.11. Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right), \wedge\right)$ の元に対して, $\langle e_i\rangle$ に関する degree が k 次であるとは, 異なる k 個の生成元の積

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

の線形和で書かれているときをいう. また ν は 2 次の元として定義し, この定義を $\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right)[\![\nu]\!], \wedge\right)$ の場合にも適用する.

一般に $\varphi\left(\bigwedge_0^{2n}\right) = \bigwedge_0^{2n}$ であるが $\varphi\left(\bigwedge_1^{2n}\right) \neq \bigwedge_1^{2n}$ である.Grassmann 代数の項の次数は,odd part の取り方に依存する. ゆえに parity という概念は絶対的な概念ではない（表示の問題を持つことになる）.

定義 2.12. ν 付き Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ 上の Moyal $*$-積を次の式で定義する.

$$*=\exp\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overleftarrow{\partial_{e_i}}\wedge\overrightarrow{\partial_{e_{i+n}}}+\overleftarrow{\partial_{e_{i+n}}}\wedge\overrightarrow{\partial_{e_i}}\right)$$

$\exp\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{e_j}}, e^{\frac{\nu}{2}\overleftarrow{\partial}\overrightarrow{\partial}}$ などと略記する.

上で定義した Moyal $*$-積を用いると, 次の関係式が得られる.

定義 2.13. 次の関係式が成り立つ.(Clifford 代数の基本関係式)

$$e_i*e_j+e_j*e_i=\nu\delta_{ij+n}\qquad(i,j=1,2,\cdots,2n\ :mod\,2n)$$

命題 2.2. $*$-積は associativity を持つ.

命題 2.3. $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right)\cong Cl_{n,n}(\mathbb{R})$ が成り立つ.

$\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right)$ 上に逆 Moyal 積 $*^{-1}$ を次のように定義することができる.

$$*^{-1}=\exp\left(-\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overleftarrow{\partial_{e_i}}*\overrightarrow{\partial_{e_{i+n}}}+\overleftarrow{\partial_{e_{i+n}}}*\overrightarrow{\partial_{e_i}}\right)\right)$$

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.4. $\left(\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right),*^{-1}\right)\cong\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ が成り立つ.

群	特徴
$Aut\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	Grassmann 代数の代数的自己同型写像の全体
$Aut_0\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{2n}a_i^je_j, a_i^j\in\mathbb{R}\right\}$
$Aut_E\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=e_i+\sum_{p=2}\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq 2n}a_i^{j_1j_2\cdots j_p}e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}, a_i^{j_1j_2\cdots j_p}\in\mathbb{R}\right\}$
$Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=e_i+\sum_{p\geq\ell}\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq 2n}a_i^{j_1j_2\cdots j_p}e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}, a_i^{j_1j_2\cdots j_p}\in\mathbb{R}\right\}$

注 2.1. ν 付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像全体を考える場合には,$Aut\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle),\wedge\right)$ を $Aut\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ と表記し,$\mathbb{R}$ 係数を $\mathbb{R}[\![\nu]\!]$ 係数にして考えればよい. 以下 $(\langle e_i\rangle)$ の表記を $\langle e_i\rangle$ と書いたり省略することもある.

命題 2.5.

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)=Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)\rtimes Aut_E\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$$

命題 2.6.

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)\triangleright Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$$

命題 2.7. $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)\cong\left\{X\in M\left(2n,\mathbb{R}\right)|{}^tX\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}\right\}$

上の命題の右辺は Lie 群 $GL\left(2n,R\right)$ の閉部分群であるから次がいえる.

命題 2.8. $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$ は Lie 群である.

命題 2.9. $Aut_{E,l}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)/Aut_{E,k}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)(k<l)$ は有限次元 Lie 群である.

定理 2.1. $Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$ は有限次元 Lie 群の射影極限である.

3 Parity 非保存な代数的自己同型写像の例

この節では parity 非保存な写像の例を挙げる. 代数的自己同型性は基本関係式を満たすことを確認すればよい. 以下の議論で $\eta\in\left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ とする.

例 3.1. 次で定義される Grassmann 代数の代数的自己同型写像
$\varphi:\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right),\wedge\right)\to\left(\bigwedge^{2n}\left(\langle e_i\rangle\right),\wedge\right)$ は $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存である.

$$\begin{aligned}\varphi\left(e_i\right)&=e_i+e_i\wedge\eta\\&=\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right)\wedge e_i\wedge\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)\end{aligned}$$

命題 3.1. $\psi\left(e_i\right)=\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right)*e_i*\exp\left(\frac{\eta}{2}\right)$ で定義される写像が Clifford 代数の代数的自己同型写像であるための必要十分条件は $\eta*\eta=0$ が成り立つことである.（基本関係式を書き, 最低次数に注目せよ. この条件を満たす η は豊富にある. 具体例はここから作れる. 条件 $\eta*\eta=0$ は $\{\eta,\eta\}=0$ でもよい）.

従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は parity 保存な代数的自己同型写像に関して不変であるが,parity 非保存な写像に関しては, 従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は保存されない. 次の例がある.

例 3.2. $\varphi\left(e_i\right)=e_i+e_i\wedge\eta$ に対して（$\eta\in\left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle[\![\nu]\!],\wedge\right)$ とおく.）

$$\sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{\varphi_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{\varphi_j}}=\sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\left(\delta_{ij+n}-\left(1+\eta\right)\left\{e_{ij},\eta\right\}-\sum_{k=1}^{2n}\left\{e_{k+n},\eta\right\}\left\{e_{ijk},\eta\right\}\right)\overrightarrow{\partial_{e_j}}$$

が成り立つ. ゆえに一般に $\sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{\varphi_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{\varphi_j}}\neq\sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{e_j}}$ である.

以上のことは $\mathbb{Z}_2$-graded な Poisson 括弧式は代数表示の問題を抱えていることを示している.

4　代数的自己同型写像の合成と parity map，parity 項の定義

前節の内容を受けて, 異なる $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧式をとった時に, お互いにどのような関係式で結ばれるのかといった問題を考える.parity 非保存な部分に本質的に関わるのは $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle [\![\nu]\!],\wedge\right)$ の元である．そこで $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle [\![\nu]\!],\wedge\right)$ の元の Grassmann 代数への射影（後で定義する）による生成元の像, および $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle [\![\nu]\!],\wedge\right)$ の二つの元の合成の生成元の像に関して考察を行う（Cliffrod 代数の場合についても考察する）. 異なる代数的自己同型写像に対して parity map（二つの代数的自己同型写像の持つ odd 性の“ずれ”を表す写像）を定義するとともに parity 項の定義を与えることにする．まずは, 代数的自己同型写像の生成元の像について, いくつかの準備をする.

定義 4.1. $Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle [[\nu]],*\right)$ の Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影（$\nu\to 0$）から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像全体とおく.

$Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ は $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ の部分群である（一致はしない）.

ν 付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像の元を

$$\varphi(e_i)=e_i+e^i_A+e^i_B\quad\left(e^i_A:even\,,\,e^i_B:odd\right)\quad\varphi\in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle [\![\nu]\!],\wedge\right)$$

と表す（一般には e^i_B の項が e_i を含まない場合もある）． $e^i_A\,,\,e^i_B$ の $\mathbb{R}[\![\nu]\!]$ 係数は略記している.Grassmann 代数の基本関係式から,

$$(e_i+e^i_A+e^i_B)\wedge\left(e_j+e^j_A+e^j_B\right)+\left(e_j+e^j_A+e^j_B\right)\wedge(e_i+e^i_A+e^i_B)=0$$

が成り立つ. 展開して整理すると

$$\begin{cases}e_i\wedge e^j_A+e_j\wedge e^i_A+e^i_A\wedge e^j_B+e^i_B\wedge e^j_A=0 & odd\ part\\ e^i_A\wedge e^j_A+e^j_A\wedge e^i_A=0 & even\ part\end{cases}$$

となる. 特に $i=j$ のときを考え, 次数に気を付ければ

$$e^i_A\wedge e_i=0\,,\ \ e^i_A\wedge e^i_B=0$$

が得られる.$\nu\to 0$（Grassmann 射影を考える）とし第１式に注目すれば

$$e^i_A=e_i\wedge\eta\,,\ \ \exists\eta\in\left(\bigwedge\nolimits_1^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$$

を得る（[24] 参照）Clifford 代数の代数的自己同型写像についても, 同様に計算をしてみると, 次の定理を得る.

定理 4.1. 線形項の係数が単位行列で書かれる,Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像は次の形で書ける.

$$\varphi_\psi(e_i)=e_i+e_i\wedge\eta+e_i\wedge\omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega^i = 0, \quad \omega^i \wedge \omega^{i+n} = 0, \quad \omega^i + \omega^{i+n} = 0, \quad \omega^i \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \omega^j = 0, \quad \eta \wedge \omega^i = 0$$

ただし, $\psi \in Aut_E \left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle \llbracket \nu \rrbracket , * \right), \varphi_\psi \in Aut_E \left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge \right), \eta \in \left(\bigwedge_1^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge \right), \omega^i \in \left(\bigwedge_0^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge \right)$ とおいた.

証明は $(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial})^p$ の計算で項の次数が full でない項が必ず表れ係数が 0 になることを利用する. この結果から $\varphi_\psi(e_i) = e^{-\frac{1}{2}B_{<e_i>}(\eta+\omega^i)} \wedge e_i \wedge e^{\frac{1}{2}(\eta+\omega^i)}$ と随伴積分解可能である.

ここから先は, 代数的自己同型写像の合成について話を進める. Grassmann 代数に関しての次の計算公式は有用である (後述する parity map における exp の部分の"重み"がかかる理由が分かる).

$$(e_i + e_i \wedge \omega_A + e_i \wedge \omega_B^i) \wedge \left(e_j + e_j \wedge \omega_A + e_j \wedge \omega_B^j\right) = e_i \wedge e_j \wedge (1+\omega_B^i) \wedge \left(1+\omega_B^j\right)$$

$$\prod_{p\,=\,i,j,k\,:\wedge} (e_p + e_p \wedge \omega_A + e_p \wedge \omega_B^p) = e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge (1+\omega_B^i) \wedge \left(1+\omega_B^j\right) \wedge (1+\omega_B^k+\omega_A)$$

等が成り立つ.

Grassmann 代数の代数的自己同型写像 $\varphi(e_i) = e_i + e_A^i + e_B^i \ \left(e_A^i : even\,,\, e_B^i : odd\right)$ のうち,e_B^i の項が e_i を含む形に限定して考える（Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 射影はこの形に含まれている）. 限定された Grassmann 代数の代数的自己同型写像の合成に関しては

$$\varphi_1(e_i) = e_i + e_i \wedge \omega_A + e_i \wedge \omega_B^i$$
$$\varphi_2(e_i) = e_i + e_i \wedge \omega_C + e_i \wedge \omega_D^i$$

に対して, 計算公式を利用すれば

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(e_i) = e_i \wedge \{(1+\omega_B^i)^a \wedge (1+\omega_B^i) \wedge \omega_A + (1+\omega_D^i)^b \wedge \omega_B^i \wedge (1+\omega_C+\omega_D^i)\}$$

となる. ここで φ_1, φ_2 として,$\psi_1\,,\,\psi_2 \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ に対する Grassmann 代数への射影 $\varphi_{\psi_1}, \varphi_{\psi_2} \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を考え,$\omega_A \wedge \omega_B^i = 0\,,\, \omega_C \wedge \omega_D^i = 0, e_i \wedge \omega_A^i + e_j \wedge \omega_B^j = 0\,,\, e_i \wedge \omega_C^i + e_j \wedge \omega_D^j = 0$ に気を付けながら展開すれば

$$\varphi_{\psi_2} \circ \varphi_{\psi_1}(e_i) = e_i \wedge \left(\frac{1}{2}(1+\omega_A+\omega_B^i) \circ_\wedge (1+\omega_C+\omega_D^i) + \sum_{a\in A} \omega_D^a \wedge \omega_A + \sum_{b \in B} \omega_D^b \wedge \omega_B\right)$$

が成り立つ (ただし,$\circ_\wedge$は対称積である).

講演者は Grassmann 代数の代数的自己同型写像および Clifford 代数の代数的自己同型写像に対して,$\mathbb{Z}_2$-graded parity の"odd 方向のずれ"を特徴づける写像 (parity map と呼ぶことにする) と parity 項（この項は奇元である）の定義を行った.

定義 4.2. （parity map, parity 項の定義）$\psi_1, \psi_2 \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ に対して,
$\Pi : Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right) \times Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right) \longrightarrow Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を次のように定める.

$$\Pi\begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_1\end{pmatrix}(\cdot) := \left(exp\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\partial} - \overrightarrow{\partial}\right)\varphi_{\psi_2}\circ\varphi_{\psi_1}(\cdot)\right)\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\partial} + \overrightarrow{\partial}\right)(\varphi_{\psi_2}\circ\varphi_{\psi_1}(\cdot))$$

これを parity map と呼ぶことにする．特に,$Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ の 2 つの元のうち, 少なくとも一方に恒等写像が含まれる場合に,

$$\Pi(\psi_1)(e_i)\doteq\Pi\left(\begin{array}{c}\psi_1\\ id\end{array}\right)(e_i)=-\Pi\left(\begin{array}{c}id\\ \psi_1\end{array}\right)(e_i)$$

と定める．これを $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ の元 ψ_1 に対しての parity 項と呼ぶ.

上の parity map の定義は,$Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ に対して行ったが,$Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],\wedge\right)$ においても線形項の部分の行列式を考慮することで定義可能である．ここでは割愛する）.

そこで odd deformation によって, 従来の Poisson 括弧がどのような変更を受けるのかを考察した（Hochschild cohomology の計算が必要になる.[9] を参照した）.

定義 4.3. $X:\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\times\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\to\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を $\mathbb{R}-bilinear\ map$ とする（以下,$A=\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ と略記することもある）.

$\widetilde{\delta}_\eta:Map(A,A)$ を次の式で定義する（ただし,$\eta\in\left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ とする）.

$$\widetilde{\delta}_\eta X(f,g)=-X(\eta\wedge Od(f),g)+\eta\wedge Od(X(f,g))-X(f,\eta\wedge Od(g))\quad f,g\in A$$

以下では X として,Poisson 括弧式 $\{\,,\,\}=\sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{e_j}}$ と wedge 積 $\wedge(f,g)=f\wedge g$ を用いることになる (特に $\widetilde{\delta}_\eta^2\{\,,\,\}=0\iff\{\eta,\eta\}=0$ が成り立つ．この部分の計算の詳細や成り立つ性質を示す必要があるが, ここでは割愛する).

定義 4.4. $\delta_\eta\in Map(A,A)$ を次で定義する.

$$\delta_\eta=\exp\widetilde{\delta}_\eta-1$$

δ_η は次の性質を持つ.

命題 4.1. $X=\wedge,\{\,,\,\}$ とする．このとき, 次が成り立つ.

1. $\delta_\eta\wedge=0$
2. $\delta_\xi\delta_\eta X=\delta_\eta\delta_\xi X$
3. $(1+\delta_{\xi+\eta})X=(1+\delta_\xi)(1+\delta_\eta)X$
4. $\delta_\varsigma\delta_\xi\delta_\eta X=0$

定理 4.2. 次の同値が成り立つ.

$$\delta_\eta\neq\delta_\xi\iff\eta\neq\xi$$

定義 4.5. Grassmann 代数上の Poisson 括弧の odd deformation : $:\{\,,\}:_\eta\ :\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\times\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\to\left(\bigwedge_0^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ は次で与えられる.

$$:\{f,g\}:_\eta=(1+\delta_\eta)\{f,g\}$$

また, 次も成立する.

命題 4.2. 次の等式が成り立つ.

$$:\{f,g\}:_{\eta+\xi}=(1+\delta_\eta)(1+\delta_\xi)\{f,g\}$$

次の定理から, 異なる odd 元に対して異なる Poisson 括弧が定まる.

定理 4.3. odd 元が異なることと,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の odd deformation が異なることとは同値である（parity 項を決めること Poisson 構造を決めることとは同じことである）.

$$:\{f,g\}:_\eta\neq:\{f,g\}:_\xi\Longleftrightarrow\eta\neq\xi$$

系 4.1. $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧が保存される Grassmann 代数の代数的自己同型写像は parity 保存な写像に限る.

5 主定理

主定理を述べるために, 言葉をいくつか用意する.（代数表示の変更を行っていることを強調するため）

定義 5.1. $*$ 積と $\wedge$ 積の代数的自己同型写像 φ による表示を以下で定義する.

$$:*:_\varphi=\varphi(\cdot)*\varphi(\cdot)$$
$$:\wedge:_\varphi=\varphi(\cdot)\wedge\varphi(\cdot)$$

代数の基本関係式は表示よらず（偶元で表示されているため）一定の形を保つことは明らかである.

定義 5.2. Grassmann 代数上の Poisson 括弧式を以下で定義する.

$$:\{,\}:_\varphi=\lim_{\nu\to0}\frac{:*:_\varphi-:\wedge:_\varphi}{\nu} \tag{1}$$

（ただし, 上の式での極限は記号的に書いているだけで形式的なものであり,ν 冪の一次の項を抜き出す意味である.）このとき, 次が成り立つ.

定理 5.1. （主定理）任意の Clifford 代数の代数的自己同型写像 ψ に対して,

$$:\{\,,\}:_\psi=exp\left(\delta_{\prod(\varphi_{\psi_E})}\right)\{\,,\}$$

により,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の代数的自己同型写像による表示が与えられる.

参考文献

[1] F.A.Berezin.*Introduction to superanalysis.* Math Phys and Applied Math.Vol.9,D.Reidel Publ Comp.Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo(1987)

[2] F.A.Berezin and M.S.Marinov.*Particle spin dynamics as Grassmann variant classical mechanics.*Ann.Phys.104(1977),pp336-362

[3] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer.*Deformation theory and quantization I* Ann.Phys.111(1978),pp61-110

[4] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer.*Deformation theory and quantization II* Ann.Phys.111(1978),pp111-151

[5] F.Cantrijin and Ibort. *Introduction to Poisson supermanifolds.*
Diff.Geom.and its Appli.1(1991),pp133-152

[6] R.Casalbuoni.*On the quantization of systems with anticommuting variables.* Il Nuovo Cimento Vol33 A N.1(1976),pp.115-125

[7] B.S.DeWitt *Supermanifolds.* Cambridge Univ.Press London(1984)

[8] A.Inoue and Y.Maeda.*Foundations of Calculus on super Euclidean space* $R^{m|n}$ *based on a Fréchet-Grassmann algebra.*Kodai.Math.J.14(1991),pp.72-112

[9] S.MacLane.*Homology.* Berlin Springer(1963)

[10] N.Cantarini and V.G.Kac.*Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras* arXiv:math.QA/0608390v1 15 Aug 2006

[11] D.A.Leites.*Introduction to the Theory of Supermanifolds.*
Russian Math.surveys 35:1(1980),pp1-64

[12] D.A.Leites.*Selected problems of supermanifold theory.*
Duke Math.J.Vol.54(1987),pp-649-656

[13] D.A.Leites. *The Schrodinger equation,Supplement3,Quantization and supermanifolds.*
Kluwer Dordrecht(1991)

[14] D.A.Leites.*Odd Parameters in geometry*- arXiv:2210.17096

[15] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*Weyl manifolds and deformation quantization.* Adv.in Math.85(1991),pp224-255

[16] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*A construction of a deformation quantization of a Poisson algebras.* Proceedings of Workshop on Gem.and its Appli. in Honor of Morio Obata,World Scientific(1993),pp.201-218

[17] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (I), -(Jacobi’ s theta functions and* $*$ *-exponential functions)*- arXiv:1104.2109

[18] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (II), -(Weyl algebra of 2m-generators)*- - arXiv:1105.1218

[19] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (III), -Generic product formula for* $*$*-exponentials of quadratic forms*- arXiv:1107.2474

[20] 大森 英樹, 一般力学系と場の幾何学, 裳華房（1991）

[21] 大森 英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版会（2004）

[22] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *I*　表示変形論, 導入編,　現代数学社（2018）

[23] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *II*　表示変形論, 応用編,　現代数学社（2019）

[24] K.Yagi. *Super differential calculus.* Osaka J.Math.25(1988),pp243-257