3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量の公式と計算

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
鈴木龍正 (Tatsumasa SUZUKI) *

概要

2003 年に Ozsváth 氏と Szabó 氏は, d 不変量と呼ばれる, 3 次元有理ホモロジー球面とその spin^c 構造に有理数を割り当てる, 有理ホモロジー spin^c 同境不変量を導入した. 本講演では, 最も基本的かつ重要な 3 次元ホモロジー球面の一つである 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量を求める既存の公式の精密化を行う. 更に, この精密化により新たに計算可能になった可算無限個の 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量の具体例について紹介する. 本講演は丹下基生氏 (筑波大学) との共同研究の内容を含む.

1 導入

本稿では, 多様体は全て滑らか, コンパクト, 連結かつ向き付けられているとする. 本節ではいくつかの記号と定義を紹介する. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq m}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ正の整数全体, 整数全体, m 以上の整数全体, 有理数全体, 実数全体, 複素数全体とする. また, $B^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < 1\}$ を n 次元開球体, $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$ を n 次元球面とする $(n \in \mathbb{N})$[*1].

定義 1.1 Y を n 次元閉多様体とする. 任意の整数 k に対して $H_k(Y;\mathbb{Z}) \cong H_k(S^n;\mathbb{Z})$ が成立するとき, Y を n **次元ホモロジー球面** ($\mathbb{Z}HS^n$) と呼ぶ.

定義 1.2 W を n 次元多様体とする. 任意の整数 k に対して $H_k(W;\mathbb{Z}) \cong H_k(B^n;\mathbb{Z})$ が成立するとき, W を n **次元ホモロジー球体** ($\mathbb{Z}HB^n$) と呼ぶ.

n 次元有理ホモロジー球面 ($\mathbb{Q}HS^n$), n 次元有理ホモロジー球体 ($\mathbb{Q}HB^n$) も $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ に置き換えることで全く同様に定義される.

1.1 d 不変量

2003 年に, Ozsváth 氏と Szabó 氏は, $\mathbb{Q}HS^3$ Y と Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ の組に有理数を与える, d 不変量 $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ を導入した. $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ は $+$ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^+(Y, \mathfrak{s}(Y))$ 内の ∞ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^\infty(Y, \mathfrak{s}(Y))$ の像内の任意の非捩れ元の最小次数として定義される [OS, Definition 4.1][*2]. d 不変量は Frøyshov 氏により [F, Section 3] で定義さ

* E-mail:suzuki.t.do@m.titech.ac.jp
[*1] 本稿の内容とは直接関係ないが, 0 次元球面は $S^0 := \{-1, 1\}$ である.
[*2] Heegaard Floer 理論についての背景や詳細については [UM1], [UM2] または [OS] の参考文献を参照.

れた Seiberg-Witten 理論[*3]の不変量と等価である．d 不変量は有理ホモロジー spin^c 同境不変量である．[OS, Proposition 4.2] により，任意の $\mathbb{Q}HS^3$ Y と Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ の組に対して，$d(-Y, \mathfrak{s}(Y)) = -d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ が成り立つ．ここで，$-Y$ は Y の向きを逆にした多様体を表す．Y が $\mathbb{Z}HS^3$ であるときは，Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ は丁度 1 個であることから，$d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ を $d(Y)$ と略記する．このとき，$d(Y) \in 2\mathbb{Z}$ であり，d 不変量はホモロジー同境不変量である．

3 次元多様体論において，以下の素朴な未解決問題が存在する:

問題 1.3（Kirby の list の Problem 4.2 (の更新版)） どのような $\mathbb{Z}HS^3$ が $\mathbb{Z}HB^4$ の境界に微分同相になるか．

注意 1.4 任意の $\mathbb{Z}HS^3$ は，ある $\mathbb{Z}HB^4$ の境界にホモトピー同値である．

一般に，$d(Y, \mathfrak{s}(Y)) \neq 0$ であるとき，Y は任意の $\mathbb{Q}HB^4$ の境界に微分同相にならない．特に，Y が $\mathbb{Z}HS^3$ かつ $d(Y) \neq 0$ であるとき，Y は任意の $\mathbb{Z}HB^4$ の境界に微分同相にならない．

1.2 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(p, q, r)$

(p, q, r) を $0 < p < q < r$ かつ $\gcd(p, q) = \gcd(q, r) = \gcd(r, p) = 1$ を満たす整数の組とする．S^5_ε を十分小さい半径 ε をもつ 5 次元球面とする．3 次元閉多様体

$$\Sigma(p, q, r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \cap S^5_\varepsilon | x^p + y^q + z^r = 0\}$$

を 3 次元 **Brieskorn ホモロジー球面**と呼ぶ．

3 次元閉多様体 $\Sigma(p, q, r)$ は 3 次元ホモロジー球面であることから，

$$e_0pqr + p'qr + pq'r + pqr' = -1, \ 0 < p' < p, \ 0 < q' < q, \ 0 < r' < r$$

を満たす唯一の整数の組 (e_0, p', q', r') が存在する．p, q, r をそれぞれ p_1, p_2, p_3 と適宜表記する．

$$-\frac{p_i}{p'_i} = t_{i1} - \cfrac{1}{t_{i2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{t_{im_i}}}}, \ t_{im_i} \neq -1 \ (i = 1, 2, 3)$$

のように一意的に連分数展開されるので，$\Sigma(p, q, r)$ の手術図式 (surgery diagram) は図 1 に示される頂点に数字が付いたグラフで表現される．ここで，3 次元閉多様体の微分構造を変えない手術図式上の変形方法[*4]である slam-dunk は図 2 の操作に相当する．

$\Sigma(1, q, r) = S^3 = \partial B^4$ より，$d(\Sigma(1, q, r)) = d(S^3) = 0$ である．以下，$p > 1$ とする．$\Sigma(2, 3, 5)$ は Poincaré ホモロジー球面であり，3 次元球面 S^3 に同相[*5] ではない 3 次元ホモロジー球面の最初の例としてよく知られている．

[*3] Heegaard Floer 理論と Seiberg-Witten 理論においては，今回の不変量の場合以外にも多くの等価な概念が双方の理論で発見されている．

[*4] 3 次元閉多様体上の手術図式上の変形方法についての詳細は，[M], [GS], [A] を参照．

[*5] 任意の 3 次元多様体 M, N において，M と N が同相であることと，M と N が微分同相であることは同値である．つまり，全ての 3 次元多様体において，エキゾチック微分構造は存在しない．

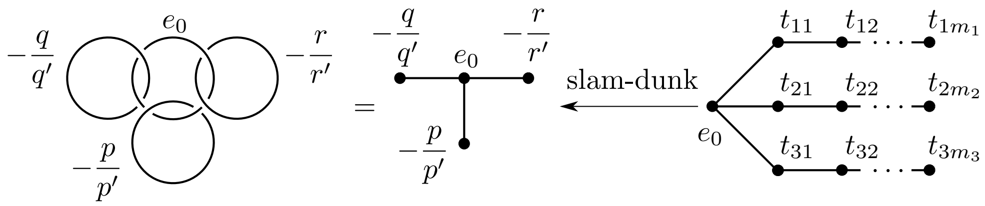

図 1　$\Sigma(p,q,r)$ の手術図式.

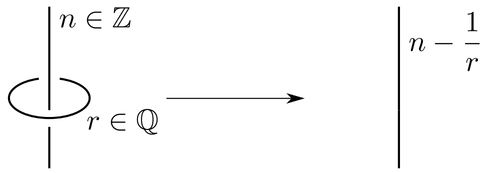

図 2　slam-dunk.

3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(p,q,r)$ は 3 次元ホモロジー球面の最も基本的かつ重要なクラスの一つであるが, 未解決問題 1.3 は $\Sigma(p,q,r)$ のみに限定しても未解決である. 特に, $\Sigma(p,q,r)$ に対する d 不変量を統一的かつ具体的に計算する方策が明確ではない.

[OS, Subsection 8.1] により,

$$d(\Sigma(2,3,6n-1)) = 2,\ d(\Sigma(2,3,6n+1)) = 0\ (n \in \mathbb{N})$$

であるから, 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ を含む $\Sigma(2,3,6n-1)$ $(n \in \mathbb{N})$ は任意の 4 次元ホモロジー球体の境界に微分同相ではないことが分かる[*6].

2　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量

2.1　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての先行研究

この節では, $pq+pr-qr=1$ を満たすとする[*7]. この場合の 3 次元閉多様体 $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式は図 1 の一番右の方法で表現すると, 図 3 に示されるグラフになる.

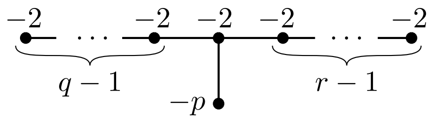

図 3　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式.

これらのグラフは, 単純線形グラフに 1 個の頂点と 1 個の辺を枝分かれになるように繋ぐことで構成されることから, 概単純線形グラフ (almost simple linear graph) と呼ばれる. Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ の手術図式は E_8 graph になる.

Karakurt 氏とŞavk 氏は, $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量について調べた:

[*6] 他にもいくつかの可算無限個の $d(\Sigma(p,q,r))$ の具体的な計算方法が知られている.

[*7] この節の内容の証明等の詳細について興味のある方は, [S] を参照して頂けたらと思います.

命題 2.1（Karakurt-Şavk [KŞ, Proposition 4.5]） p が偶数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \frac{q+r}{4} = \frac{r^2-1}{4(r-p)} = \frac{q^2-1}{4(q-p)}(>0).$$

p を奇数とし, $n := (p-1)/2$ とする. $\mathfrak{L} := \{\pm1, \pm3, \dots, \pm p\} \times \{0, 1, \dots, n\}$,
$R := \{(x,y) \in \mathfrak{L} | F(x,y) \geq F(1,1)\}$ とする.

定理 2.2（Karakurt-Şavk [KŞ, Theorem 1.1]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in R} F(a,m)(\geq F(1,1) = p-1 > 0).$$

注意 2.3　命題 2.1 と定理 2.2 より, 任意の $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ は, 任意の 4 次元ホモロジー球体の境界に微分同相ではないことが分かる.

2.2　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての主結果

p が奇数の場合により具体的に計算する. n を $q-p$ で割ったときの商と剰余をそれぞれ, t, α とする: $n = (q-p)t + \alpha$, $0 \leq \alpha < q-p$.

$$f(x,y) := -(q+r)x^2 + 4qxy - 4(q-p)y^2 - 4y,\ F(x,y) := \frac{f(x,y)+q+r}{4},$$

$$\mathfrak{M}' := \{(a,m) \in \mathbb{Z}^2 | a \in 2\mathbb{N}+1, a < m \leq n\},\ \mathfrak{M} := \{(1,t+1)\} \sqcup \mathfrak{M}',$$

$S := \{(x,y) \in \mathfrak{M} | F(x,y) \geq F(1,1)\}$ とする.

定理 2.4（S. [S, Theorem 1.2]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in S} F(a,m) \geq F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha).$$

注意 2.5　t が奇数のとき, $t+1$ は偶数であり, t が偶数のとき, $n+\alpha = t(q-p)+2\alpha$ は偶数であるから, 任意の整数 t に対して, $F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha)$ は偶数である.

注意 2.6　任意の $(a,m) \in \mathfrak{M}'$ に対して, $F(a,m) \leq (t+1)(n+\alpha)$ であるとき, 定理 2.4 より $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$ である.

例 2.7　[KŞ, Theorem 1.3] にある全ての具体例は, 定理 2.4 の不等式の等号が成立する十分条件になる. 具体的には, p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$q \in \{p+1, (5p+1)/4, (5p+3)/4, (3p-1)/2, (3p+1)/2, 2p-1\}$$

の場合は $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$ が成り立つ.

$\mathfrak{L}$ の点全体と $\mathfrak{M}$ の点の候補全体を図示した様子は図 4 になる.

命題 2.2 を定理 2.4 に精密化することで, 以下の計算結果を新たに得ることができた.

系 2.8（S. [S, Corollary 5.1]） $q-p=2$ であるとき, $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$.

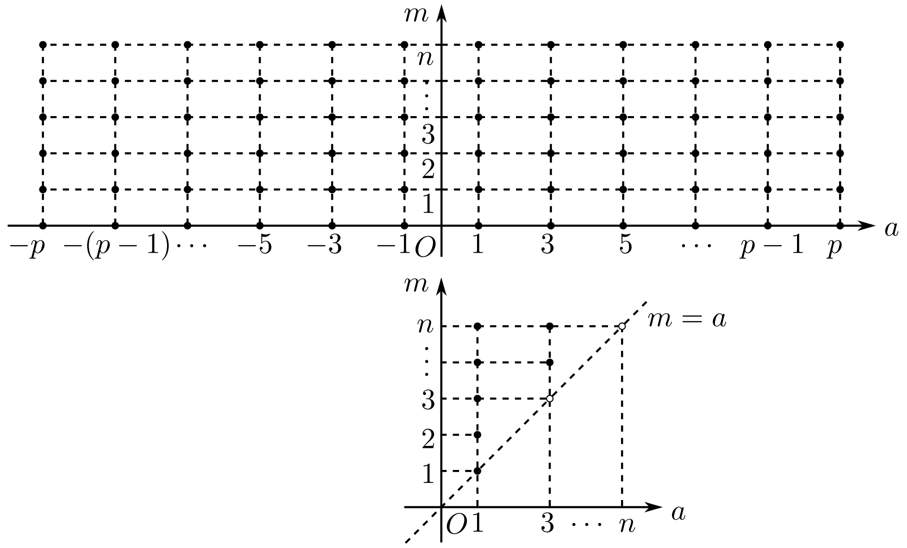

図 4　$\mathfrak{L}$ の点全体 (上) と $\mathfrak{M}$ の点の候補全体 (下).

系 2.9（S. [S, Corollary 5.2]）　$p \le 23$ かつ $q - p \ge n$ であるとき, $d(\Sigma(p,q,r)) = p-1$.

$$D(p,q,r) := \begin{cases} (t+1)(n+\alpha) & (p \in 2\mathbb{N}+1), \\ d(\Sigma(p,q,r)) & (p \in 2\mathbb{N}) \end{cases}$$

とする.

命題 2.10（S. [S, Proposition 4.1]）　(p_i, q_i, r_i) を $1 < p_i < q_i < r_i$ かつ $p_iq_i + p_ir_i - q_ir_i = 1$ を満たす整数の組とする $(i = 1,2)$. $p_1 = p_2 = p$ かつ $q_1 \ge q_2$ であるとき,

$$2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \le D(p_1,q_1,r_1) \le D(p_2,q_2,r_2) \le \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor .$$

特に,

$$d(\Sigma(p, 2p-1, 2p+1) = 2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor,\ d(\Sigma(p, p+1, p^2+p-1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor .$$

また, 以下の命題を得た:

命題 2.11（S. [S, Proposition 4.2]）　p が奇数であるとき, $D(p,q,r) = p-1 \iff q - p \ge n$.

注意 2.12　$A_0 := \{(p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{Z}^3_{\ge 2} | p_1 < p_2 < p_3, \gcd(p_i,p_j) = 1 (i \ne j), p_1p_2 + p_1p_3 - p_2p_3 = 1\}$, $A_1 := \{(p,q,r) \in A_0 | p \in \{(3p-1)/2, (3p+1)/2, 2p-1\}$ または $p \le 23$ かつ $q - p \ge n\}$ とし, $A_2 := \{(p,q,r) \in A_0 | q - p < n\}$ とする. 任意の $(p_i,q_i,r_i) \in A_i$ $(i = 1,2)$ に対して,

$$d(\Sigma(p_1,q_1,r_1)) = p-1 < D(p_2,q_2,r_2) \le d(\Sigma(p_2,q_2,r_2)).$$

これにより, $\Sigma(p_1,q_1,r_1)$ と $\Sigma(p_2,q_2,r_2)$ はホモロジー同境ではないことが分かる.

次の例は [KŞ] で紹介されている具体例の中で, 唯一明示的に計算されていない例である.

例 2.13（S. [S, Example 5.4]） F_k を第 k 次 Fibonacci 数とする．$(p,q,r)=(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3})$ とすると

$$\begin{aligned} pq+pr-qr &= F_{2n+1}F_{2n+2}+F_{2n+1}F_{2n+3}-F_{2n+2}F_{2n+3} \\ &= F_{2n+1}F_{2n+3}+(F_{2n+1}-F_{2n+3})F_{2n+2} \\ &= F_{2n+1}F_{2n+3}-F_{2n+2}^2=(-1)^{2n+2}=1. \end{aligned}$$

$F_k\in\mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は $k\in 3\mathbb{Z}$ である．$2n+1\in 3\mathbb{Z}$ であるとき, 命題 2.4 より

$$d(\Sigma(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3}))=\frac{F_{2n+2}+F_{2n+3}}{4}=\frac{F_{2n+4}}{4}.$$

$2n+1\notin 3\mathbb{Z}$ であるとき, $(F_{2n+1}-1)/2$ を F_{2n} で割ったときの商は 0 であり, 剰余は $(F_{2n+1}-1)/2$ であるから, $D(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3})=F_{2n+1}-1$.

3　一般の $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量

本節は丹下基生氏 (筑波大学数理物質系) との共同研究の内容である.

3.1　レンズ空間間の d 不変量の相互法則の一般化

sawtooth function $((\cdot)):\mathbb{R}\to(-1/2,1/2)$ を

$$((x)):=\begin{cases}\{x\}-1/2 & (x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}),\\ 0 & (x\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

で定義する．ここで, $\{x\}:=x-\lfloor x\rfloor$ である．$Z:=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\gcd(a,b)=1\}$ とする．Dedekind 和 $s:Z-\{(1,0)\}\to\mathbb{R}$ を

$$s(a,b):=\sum_{n=1}^{|b|}\left(\left(\frac{n}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{an}{b}\right)\right)$$

で定義する． 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $((-x))=-((x))$ であることから $s(-a,b)=-s(a,b)$ $((a,b)\in Z-\{(1,0)\})$ である．Dedekind 和間の相互法則:

$$s(a,b)+s(b,a)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\right)$$

が任意の $(a,b)\in Z_0:=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\gcd(x,y)=1\}$ に対して成り立つ.

$L(a,b)$ を (a,b) 型のレンズ空間とする $((a,b)\in Z_0)$．任意の整数 k に対して, $L(a,b+ak)=L(a,b)$ である．$\mathrm{Spin}^c(L(a,b))\cong\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ であることから, 任意の $L(a,b)$ の spin^c 構造はある整数に対応する．任意の整数 n に対して,

$$d(L(a,b),n+a)=d(L(a,b),n)$$

であることに注意する．以下, $d(L(a,b),n)$ を $d(a,b;n)$ と略記する.

整数 k を整数 l で割ったときの剰余を $[k]_l$ と表記する．レンズ空間間の d 不変量の相互法則は Ozsváth 氏と Szabó 氏により示されている.

命題 3.1（Ozsváth-Szabó [OS, Proposition 4.8]） $(a,b) \in Z_0,\ a > b,\ 0 \leq n < a+b$ であるとき,

$$d(a,b;n) = -d(b,a;n) - \frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab}.$$

本稿でのレンズ空間 $L(a,b)$ の向きは [OS] の向きとは異なることに注意する.

任意の整数 n に対して, $\varepsilon(a,b;n) := \#\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 | ak+bl \leq n\}$ とする. 任意の $n < a+b$ に対して, $\varepsilon(a,b;n) = 0$ である. 命題 3.1 を次のように拡張した:

定理 3.2 $(a,b) \in Z_0,\ n \geq 0$ であるとき,

$$d(a,b;n) = -d(b,a;n) - \frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab} - 2\varepsilon(a,b;n).$$

[証明の概略] 命題 3.1 における相互法則の a と b の対称性から, $a > b$ の場合に成り立てば $b > a$ の場合も同時に成り立つ. a^-, b^- をそれぞれ

$$a^-a \equiv 1 \pmod{b},\ 1 \leq a^- \leq b-1,\ b^-b \equiv 1 \pmod{a},\ 1 \leq b^- \leq a-1$$

を満たす唯一の整数とする.

$$E(a,b;n) := -\frac{1}{2}\left(d(a,b;n) + d(b,a;n) + \frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab}\right)\ (n \geq 0)$$

とすると, $E(a,b;0) = 0,\ \varepsilon(a,b;0) = 0$,

$$\begin{aligned} E(a,b;n) - E(a,b;n-1) &= \frac{n}{ab} - 1 + \frac{[-b^-n]_a}{a} + \frac{[-a^-n]_b}{b} \\ &= \#\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 | ak+bl = n\} = \varepsilon(a,b;n) - \varepsilon(a,b;n-1)\ (n \geq 0) \end{aligned}$$

であるから, $E(a,b;n) = \varepsilon(a,b;n)\ (n \geq 0)$ である. □

注意 3.3 命題 3.2 より, 任意の $(a,b) \in Z_0$ と任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} d(a,b;n) &= d(a,b;[n]_{ab}) \\ &= -d(b,a;[n]_{ab}) - \frac{ab-(2[n]_{ab}+1-a-b)^2}{4ab} - 2\varepsilon(a,b;[n]_{ab}). \end{aligned}$$

3.2 τ, κ, λ の定義と計算

正の整数 s に対して, δ-function $\delta_s : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ を

$$\delta_s(n) := \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod{s}), \\ 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{s}) \end{cases}$$

で定義する.

$A := \{(p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} | p_1 < p_2 < p_3, \gcd(p_i,p_j) = 1 (i \neq j)\}$ とする. $\Delta : A \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned} \Delta(p,q,r;n) &:= 1 - e_0 n - \left\lceil \frac{p'n}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{q'n}{q} \right\rceil - \left\lceil \frac{r'n}{r} \right\rceil \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{n}{pqr} - \sum_{i=1}^{3}\left(\left(\left(-\frac{p_i'n}{p_i}\right)\right) - \frac{1}{2}\delta_{p_i}(n)\right), \end{aligned}$$

$\tau : A \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ を

$$\tau(p,q,r;n) := \begin{cases} 0 & (n=0), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Delta(p,q,r;i) & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で定義する.

丹下氏によるレンズ空間の d 不変量の公式 [T, Theorem 4] と [T, Lemma 1] により,

$$d(a,b;n) = 3s(b,a) + \frac{a-1-2[n]_a}{2a} - 2\sum_{k=0}^{[n]_a} \left(\left(-\frac{b^{-}k}{a}\right)\right) \ ((a,b) \in Z_0,\ n \in \mathbb{Z})$$

になることを用いることで, τ は以下のように計算できる:

補題 3.4　任意の非負の整数 n に対して,

$$\begin{aligned} \tau(p,q,r;n+1) = &\frac{n^2}{2pqr} - \frac{pqr-pq-qr-rp-1}{2pqr}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \\ &+\frac{1}{2}(d(p,-qr;n) + d(q,-rp;n) + d(r,-pq;n)) \\ &+\frac{3}{2}(s(qr,p) + s(rp,q) + s(pq,r)). \end{aligned}$$

$\lambda(p,q,r)$ を $\Sigma(p,q,r)$ の Casson 不変量とし,

$$\kappa(p,q,r) := \#\left\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \middle| \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} < 1\right\}$$

とする.

$\kappa(p,q,r)$ は Rosen 氏の主結果 [R, Theorem 1.1]:

$$\begin{aligned} &\#\left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \middle| x,y,z \geq 0, 0 < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} < 1\right\} \\ = &\frac{pqr}{6} + \frac{pq+qr+rp}{4} + \frac{p+q+r}{4} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{12pqr} - 2 \\ &-s(qr,p) - s(pr,q) - s(pq,r) \end{aligned}$$

から, 次のように計算できる:

補題 3.5

$$\begin{aligned} \kappa(p,q,r) = &\frac{pqr}{6} - \frac{pq+qr+rp}{4} + \frac{p+q+r}{4} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{12pqr} - \frac{1}{2} \\ &-(s(qr,p) + s(pr,q) + s(pq,r)). \end{aligned}$$

$\Sigma(p,q,r)$ の Casson 不変量 $\lambda(p,q,r)$ も Fintushel 氏と Stern 氏の結果: [FS, Theorem 2.10] と [FS, p. 116–117] から

$$\lambda(p,q,r) = \frac{1}{8}\sigma(B(p,q,r)) = -\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{8} + \frac{1}{2}\kappa(p,q,r)$$

であるから, 補題 3.5 と組み合わせることで, 次のように計算できる:

補題 3.6

$$\lambda(p,q,r) = -\frac{pqr}{24} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{24pqr} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}(s(qr,p)+s(pr,q)+s(pq,r)).$$

3.3 一般の $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての主結果

$\mathcal{T}(p,q,r;n) := 2(\tau(p,q,r;n+1)+\lambda(p,q,r)+\kappa(p,q,r))$ とする．以下の一般の $\Sigma(p,q,r)$ に対する d 不変量の関係式が Can 氏と Karakurt 氏により構成されている:

命題 3.7（Can-Karakurt [CK]）

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{n\geq -1} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

$$N_0(p,q,r) := pqr - pq - qr - rp,$$

$$R(p,q,r) := \left\{ n\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \max\left\{\frac{N_0(p,q,r)}{2} - pq, -1\right\} \leq n \leq \frac{N_0(p,q,r)-1}{2} \right\}$$

とする．命題 3.7 の最小値の候補を pq 以下の場合にまで制限した:

定理 3.8

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{n\in R(p,q,r)} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

[証明の概略] 任意の $n\geq -1$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}(p,q,r;n)\\ =&\frac{1}{pqr}\left(n - \frac{N_0(p,q,r)-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + d(p,-qr;n) + d(q,-pr;n) + d(r,-pq;n)\end{aligned}$$

が成り立つ．任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $D(p,q,r;n) := d(p,-qr;n)+d(q,-rp;n)+d(pq,r;n)$,

$$F(p,q,r;n) := -\frac{pq-p-q-1}{pq}\left(n - \frac{N_0(p,q,r)+r-pq-2}{4}\right)$$

とすると, [T, Lemma 1]: $d(r,-pq;n) = d(r,r-pq;n) = -d(r,pq;n+pq)$ と定理 3.2 より任意の $n\geq -1$ に対して,

$$\mathcal{T}(p,q,r;n) = D(p,q,r;n) + F(p,q,r;n) + 2\varepsilon(r,pq;n+pq).$$

[CK, Theorem 1.3] により, $\Delta(p,q,r;n)\geq 0$ $(n > N_0(p,q,r))$,
$\Delta(p,q,r;n) = -\Delta(p,q,r;N_0(p,q,r)-n)$ $(0\leq n\leq N_0(p,q,r))$ であるから,

$$\min_{n\geq 0}\tau(p,q,r;n) = \min_{0\leq n\leq N_0(p,q,r)+1}\tau(p,q,r;n)$$

かつ $\tau(p,q,r;N_0(p,q,r)+1-n) = \tau(p,q,r;n)$ $(0\leq n\leq \lfloor (N_0(p,q,r)+1)/2\rfloor)$ であるから,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{-1\leq n\leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2\rfloor} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

$\sigma(p,q) := (pq-p-q-1)/2$ とすると, 任意の $n \geq pq-1$ に対して, $D(p,q,r;n) = D(p,q,r;n-pq)$, $F(p,q,r;n) - F(p,q,r;n-pq) = -2\sigma(p,q)$, $\varepsilon(r,pq;n+pq) - \varepsilon(r,pq;n) = \lfloor n/r \rfloor$ であるから,

$$\mathcal{T}(p,q,r;n) - \mathcal{T}(p,q,r;n-pq) = -2\left(\sigma(p,q) - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right).$$

$pq-1 \leq n \leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2 \rfloor$ であるとき,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor &\leq \left\lfloor \frac{N_0(p,q,r)-1}{2r} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{pqr-pq-qr-rp-1}{2r} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{(pq-p-q-1)r+r-pq-1}{2r} \right\rfloor = \sigma(p,q) + \left\lfloor \frac{r-pq-1}{2r} \right\rfloor \leq \sigma(p,q). \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{T}(p,q,r;n) \leq \mathcal{T}(p,q,r;n-pq)$ $(pq-1 \leq n \leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2 \rfloor)$.

よって, 定理 3.8 の主張が成立する. □

謝辞

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106 (鈴木) の支援と科研費 (課題番号:21K03216)(丹下) の助成を受けたものです. 特に, このプログラムの一環として東京大学大学院数理科学研究科の逆井卓也氏の研究室で本稿の内容を発表した際に, $\alpha > 0$ だけでなく $\alpha = 0$ のときも $F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha)$ が成立することをご教示してくださった黒田直樹氏に感謝致します. 改めて, 共同研究者の丹下基生氏, 私が所属している遠藤久顕氏の研究室の皆様, 逆井卓也氏の研究室の皆様にこの場を借りて感謝申し上げます.

参考文献

[A] S. Akbulut, *4-manifolds*, Oxf. Grad. Texts Math., 25 Oxford University Press, Oxford, 2016. xii+262 pp.

[CK] M. B. Can and C. Karakurt, *Calculating Heegaard-Floer homology by counting lattice points in tetrahedra*, Acta Math. Hungar. **144** (2014), no. 1, 43–75.

[F] K. A. Frøyshov, *The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no.3, 373390.

[FS] R. Fintushel and R. J. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3), **61** (1990), 109–137.

[GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, Volume **20**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[KŞ] C. Karakurt and O. Şavk, *Ozsváth-Szabó d-invariants of almost simple linear graphs*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 5, 2050029, 17 pp.

[M] 茂手木公彦, デーン手術, ひろがるトポロジー, 共立出版 (2022).

[OS] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261.

[R] K. H. Rosen, *Dedekind-Rademacher sums and lattice points in triangles and tetrahedra*, Acta Arith. **39** (1981), no. 1, 59-75.

[S] T. Suzuki, *The d-invariant of any Brieskorn homology sphere with an equation*, arXiv:2310.14279.

[T] M. Tange, *Ozsváth Szabó's correction term and lens surgery*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 1, 119–134.

[UM1] 上正明, 松本幸夫, 4 次元多様体 I, 朝倉数学体系, 朝倉書店 (2022).

[UM2] 上正明, 松本幸夫, 4 次元多様体 II, 朝倉数学体系, 朝倉書店 (2022).