

# ユークリッド空間における勾配樹木と その余接束における正則円盤の対応について

千葉大学 大学院融合理工学府  
数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース  
鈴木英正 (Hidemasa SUZUKI) \*

## 概要

リーマン多様体  $M$  上の十分一般的な  $C^\infty$  関数  $f_1, \dots, f_k$  によって得られる勾配樹木のなすモジュライ空間と、余接束  $T^*M$  内のラグランジュ部分多様体  $graph(\epsilon df_1), \dots, graph(\epsilon df_k)$  を境界にもつ概正則円盤のなすモジュライ空間は、 $\epsilon > 0$  が十分小さいときに微分同相になることが知られている。本稿では Schwarz-Christoffel 写像によって構成された  $T^*\mathbb{R}$  や  $T^*\mathbb{R}^2$  内の正則円盤を級数表示し、これらが各点で勾配樹木に収束する現象をもって正則円盤と勾配樹木の間を関係を定式化する。

## 1 導入

リーマン多様体  $M$  上の十分一般的な  $C^\infty$  関数  $f_1, f_2, \dots, f_k$  から得られる勾配樹木のなすモジュライ空間の元と、余接束  $T^*M$  内のラグランジュ部分多様体  $graph(\epsilon df_1), graph(\epsilon df_2), \dots, graph(\epsilon df_k)$  たちを境界に持つ概正則円盤のなすモジュライ空間の元は、 $\epsilon > 0$  を十分小さくとれば 1 対 1 に対応することが知られている [5]。本稿では  $M = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  の場合で、 $M$  上の勾配樹木と  $T^*M$  内の概正則円盤を具体的に与えた上で  $\epsilon \downarrow 0$  とすれば一致することを示す。 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  上の勾配樹木といくつかの  $T^*\mathbb{R}, T^*\mathbb{R}^2$  内の概正則円盤の具体的な構成方法は [9] や [10] で提示した。例えば  $M = \mathbb{R}$  で  $k = 3$  の場合を考えてみる。 $f_1 = 0$ ,  $f_2, f_3$  を 2 次関数とすると、 $graph(\epsilon df_i)$  たちは  $\mathbb{R}^2$  内の直線となる。また、 $f_{i+1} - f_i$  が Morse 関数であるとき、 $f_{i+1} - f_i$  の臨界点  $p_i$  が唯一に定まる。 $\mu(p_i)$  を  $p_i$  における  $f_{i+1} - f_i$  の Morse 指数とすると、 $\sum_{i=1}^3 \mu(p_i) = 2$  のとき  $f_1, f_2, f_3$  に付随する勾配樹木が一意に得られ、 $graph(\epsilon df_1), graph(\epsilon df_2), graph(\epsilon df_3)$  に囲まれる概正則円盤の 1 つが円盤から 3 直線に囲まれる三角形への双正則写像である Schwarz-Christoffel 写像によって得られる ([9], [10] を参照)。ここで  $\epsilon$  を 0 に近づけると、三角形の高さが徐々に低くなり、次第に線分に潰され、勾配樹木による樹木の像と一致することがわかる (図 1)。本稿では、この様子を単位円盤から三角形への Schwarz-Christoffel 写像の代わりに  $0, 1, \infty$  を三角形の 3 頂点に写す上半平面から三角形への Schwarz-Christoffel 写像を用い、 $0, 1, \infty$  の近傍でそれぞれ  $\epsilon \downarrow 0$  の考察をすることによって定式化する。まず、概正則写像を構成するのに必要な上半平面から三角形への Schwarz-Christoffel 写像

---

\* E-mail:ahma1477@chiba-u.jp

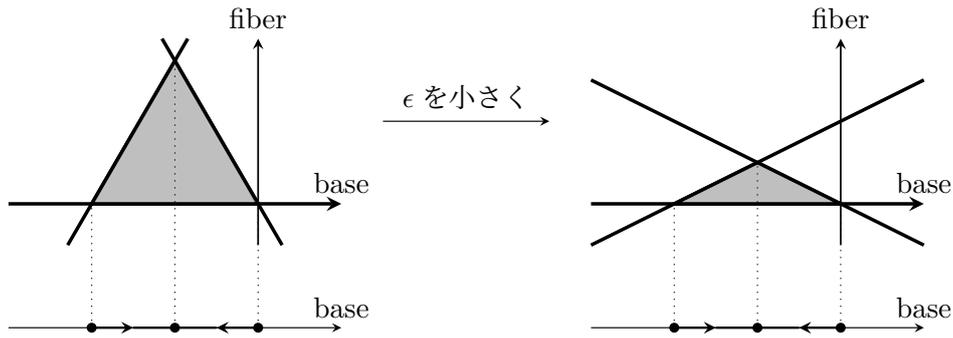


図1  $\epsilon \downarrow 0$  のイメージ (上が概正則円盤, 下が勾配樹木)

を特異点である  $0, 1, \infty$  の付近で級数表示させる. その後, 論文 [4] にならって特異点の近傍で変数変換を行い,  $\epsilon \rightarrow 0$  とすると勾配樹木に一致することを確認する. さらに,  $M = \mathbb{R}^2$  においても同様に示すことのできる場合があることも紹介する.

## 2 準備

### 2.1 勾配樹木と正則円盤

勾配樹木とは樹木と呼ばれる単体複体からリーマン多様体へのある写像のことである. 本稿ではその樹木として図2の形のみを考える. 図2中の  $v_i$  は外点,  $v$  は内点,  $e_i$  は  $v_i$  と  $v$  を結んだ線分とする.

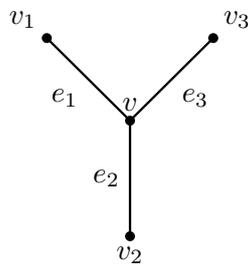


図2 本稿で扱う樹木

る. この場合における勾配樹木は以下のように具体的に定められる.

**定義 2.1.**  $M$  をリーマン多様体,  $g$  を多様体  $M$  がもつリーマン計量,  $T$  を図2で定められた樹木,  $f_1, f_2, f_3$  を任意の  $i$  に対して  $f_{i+1} - f_i$  ( $f_4 = f_1$ ) がモース関数となるような  $M$  上の実数値関数とする. 連続写像  $I : T \rightarrow M$  が以下を満たすとする.

- $I(v_i)$  は  $f_{i+1} - f_i$  のある臨界点  $p_i$  に一致する
- $e_i - \{v_i\}$  を  $(-\infty, 0]$  と同一視し,  $grad_g f$  を  $M$  上の実数値関数  $f$  に関する勾配ベクトル場とすると

$$\frac{dI|_{e_i}}{dt} = -grad_g(f_{i+1} - f_i)$$

- $I|_{e_1}(0) = I|_{e_2}(0) = I|_{e_3}(0) (= I(v))$

このとき、 $I$  またはその像を  $M$  上の  $f_1, f_2, f_3$  に付随する**勾配樹木**という ([5] を参照).

概正則円盤を定義する前にシンプレクティック多様体とそのラグランジュ部分多様体について定義する.

**定義 2.2.**  $X$  を  $2n$  次元実多様体とする.  $X$  が  $\omega^{\wedge n} \neq 0$  となる  $X$  上の閉 2 次形式  $\omega$  をもつとき,  $X$  を**シンプレクティック多様体**という.  $L$  を  $X$  の  $n$  次元部分多様体とし,  $\omega|_L = 0$  を満たすとき,  $L$  を  $X$  の**ラグランジュ部分多様体**という.

シンプレクティック多様体は 2 次形式  $\omega$  と両立する概複素構造をもつ.

**定義 2.3.**  $J: X \rightarrow \text{hom}(TX, TX): p \mapsto J_p \in \text{hom}(T_p X, T_p X)$  が  $X$  の**概複素構造**であるとは,  $X$  の任意の点  $p$  に対して  $J_p^2 = -\text{id}_{T_p X}$  が成り立つものをいう.

以上を踏まえ, 本稿で扱う 3 個のラグランジュ部分多様体に囲まれるシンプレクティック多様体上の概正則円盤を定義する.

**定義 2.4.**  $D$  を  $\mathbb{C}$  における原点中心の半径 1 の開円盤,  $z_1, z_2, z_3$  を  $\partial D$  上の反時計回りに順序づけされた 3 点とする.  $\partial_i D$  を  $z_{i-1}$  と  $z_i$  を端点にもち, 2 点以外の点  $z_j$  を含まない円弧とする. また,  $X$  をシンプレクティック多様体,  $L_1, L_2, L_3$  を  $X$  のラグランジュ部分多様体とする. そして,  $X, \mathbb{C}$  がもつ概複素構造をそれぞれ  $J, j$  とする. このとき,  $w: D \rightarrow X$  が

$$dw \circ j = J \circ dw, \quad w(\partial_i D) \subset L_i, \quad w(z_i) \in L_i \cap L_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, L_4 = L_1)$$

を満たすとき, それを  $L_1, L_2, L_3$  に囲まれる**概正則円盤**という ([5] を参照).

特に  $X = T^*\mathbb{R}^n$  のとき, 概正則円盤が満たす微分方程式はコーシー・リーマン方程式と一致する. 本稿ではこの場合, つまり  $T^*M$  の  $M = \mathbb{R}^n$  の場合について議論するため, 以下  $T^*\mathbb{R}^n$  内の概正則円盤のことを正則円盤と呼ぶ.

## 2.2 Schwarz-Christoffel 写像

[9][10] では  $T^*\mathbb{R}$  や  $T^*\mathbb{R}^2$  内の正則円盤を Schwarz-Christoffel 写像を用いて具体的に構成した. Schwarz-Christoffel 写像とは, 以下に述べるように上半平面やそれと等角同値な単位円盤から複素平面内の多角形への双正則写像 (等角写像) のことである.

**定理 2.5** ([2]).  $P$  を  $w_1, \dots, w_n$  を反時計回りの順序で頂点に持ち, 点  $w_i$  における内角が  $\alpha_i \pi$  である多角形の内部とする.  $f$  を  $f(\infty) = w_n$  を満たす上半平面から  $P$  への等角写像とする. このとき,  $A, C \in \mathbb{C}$  と上半平面の境界上の点  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$  が存在して

$$f(z) = A + C \int \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta$$

と表され,  $f(z_k) = w_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$  が成り立つ.

定理中に登場した  $f(z)$  が Schwarz-Christoffel 写像である (以下 SC 写像と呼ぶことにする). ち

なみに、単位円盤の内部は上半平面と等角同値であるから、変数変換を施すことで単位円盤から多角形への双正則写像を考えることもできる。本稿では  $n = 3$  の場合について考察する。以下、主結果の証明に使うため、定理 2.5 の SC 写像の  $z_1, z_2$  と無限遠点  $\infty$  の周りにおける級数表示について述べる。また、複素平面上の相異なる 3 点は一次分数変換によって  $0, 1, \infty$  に写すことができるので、 $z_1 = 0, z_2 = 1$  の場合で考えればよい。SC 写像  $f(z)$  は以下の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left( \sum_{k=1}^2 \frac{1 - \alpha_k}{z - z_k} \right) \frac{df}{dz} = 0$$

を満たすことがわかる ([2] や [8], [12] などにおける定理 2.5 の証明を参照)。これにより、この微分方程式の解を各特異点  $z = z_1, z_2, \infty$  付近で級数表示すればよい。

**補題 2.6.** 3 点  $x_1, x_2, x_3$  を頂点とする三角形に対して、頂点を番号通りに辿ると三角形の境界を反時計回りに一周できると仮定する。また、三角形の頂点  $x_1, x_2$  における外角をそれぞれ  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2$  とする。このとき、上半平面から 3 点  $x_1, x_2, x_3$  を結んでできる三角形への SC 写像  $f$  で

$$f(0) = x_1, f(1) = x_2, f(\infty) = x_3$$

を満たすものは以下のように記述される。

$$f(z) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; 1)} z^{1 - \alpha_1} F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; z) \quad (|z| < 1)$$

$$f(z) = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1)} (1 - z)^{1 - \alpha_2} F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1 - z) \quad (|1 - z| < 1)$$

$$f(z) = x_3 + \frac{x_2 - x_3}{F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; 1)} z^{1 - \alpha_1 - \alpha_2} F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; z^{-1}) \quad (|z^{-1}| < 1)$$

*Proof.* 今考えている微分方程式はガウスの超幾何微分方程式

$$z(1 - z) \frac{d^2 f}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\} \frac{df}{dz} - \alpha\beta f = 0$$

において  $\alpha = 0, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \gamma = \alpha_1$  としたものである。まず、超幾何微分方程式の確定特異点  $z = 0, 1, \infty$  の近傍における解の級数表示は以下の通りである ([6], [7] 参照)。

$$f(z) = A_1 F(\alpha, \beta, \gamma; z) + B_1 z^{1 - \gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \quad (|z| < 1)$$

$$f(z) = A_2 F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) + B_2 (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) \quad (|1 - z| < 1)$$

$$f(z) = A_3 z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; z^{-1}) + B_3 z^{-\beta} F(\beta - \gamma + 1, \beta, \beta - \alpha + 1; \zeta^{-1}) \quad (|z^{-1}| < 1)$$

ここで、 $\alpha = 0, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \gamma = \alpha_1$  とすれば、

$$f(z) = A_1 + B_1 z^{1 - \alpha_1} F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; z) \quad (|z| < 1)$$

$$f(z) = A_2 + B_2 (1 - z)^{1 - \alpha_2} F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1 - z) \quad (|1 - z| < 1)$$

$$f(z) = A_3 + B_3 z^{1 - \alpha_1 - \alpha_2} F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; z^{-1}) \quad (|z^{-1}| < 1)$$

となる。最後に、 $f(0) = x_1, f(1) = x_2, f(\infty) = x_3$  により  $A_j, B_j$  が求まる。□

### 3 主定理とその証明

本節では  $M = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  における結果を述べる. 初めに  $M = \mathbb{R}$  における結果から述べる.

**定理 3.1.**  $f_1 = 0, f_2 = a_2x^2, f_3 = a_3x^2 + b_3x$  とし, 各  $k = 1, 2, 3$  に対して  $f_{k+1} - f_k$  が Morse 関数で,  $p_k$  を  $f_{k+1} - f_k$  の唯一の臨界点,  $\mu(p_k)$  を  $p_k$  における  $f_{k+1} - f_k$  の Morse 指数とするとき,  $\sum_{i=1}^3 \mu(p_i) = 4$  が成り立つとする.  $I_j$  を  $p_j$  から出る  $f_{j+1} - f_j$  による勾配曲線とし,  $I_1, I_2, I_3$  によって  $f_1, f_2, f_3$  から得られる勾配樹木を構成されるとする. また,  $w_\epsilon$  を上半平面から 3 つのラグランジュ部分多様体  $\text{graph}(\epsilon df_j)$  に囲まれる三角形への SC 写像で,  $x_j$  を  $\text{graph}(\epsilon df_j)$  と  $\text{graph}(\epsilon df_{j+1})$  の交点として

$$w_\epsilon(0) = x_1, w_\epsilon(1) = x_2, w_\epsilon(\infty) = x_3$$

を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ. ただし,  $\tau \in (-\infty, 0), \sigma \in [0, 1]$  とする.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) &= I_1(\tau) \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( 1 - \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right) &= I_2(\tau) \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( \exp \left[ -\pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) &= I_3(\tau) \end{aligned}$$

定理 3.1 の証明に入る前に, 勾配樹木と  $z$  と  $\tau, \sigma$  の間の変換について言及する. まず, 定理 3.1 に登場する勾配曲線  $I_j$  は次のように書ける.

**補題 3.2.** 関数  $f_{j+1} - f_j = ax^2 + bx + c$  の非退化な臨界点  $p_j$  を通る勾配曲線  $I_j(t)$  は以下の通りである.

$$I_j(t) = \begin{cases} -\frac{b}{2a} & (a > 0) \\ \chi_i(0)e^{-2at} - \frac{b}{2a} & (a < 0) \end{cases}$$

証明は [9][10] に記載されている. また, 定理 3.1 における  $f_1, f_2, f_3$  が定理 3.1 中の仮定を満たすとき, 勾配樹木が一意に得られることも [9][10] で示されている. 次に変数変換について説明する. 定理 3.1 における  $\epsilon \downarrow 0$  としたときの結果はそれぞれ上から  $|z| < 1, |1 - z| < 1, |z^{-1}| < 1$  における解析の結果であることに留意すべきである. 例えば, 一つ目の結果で使用した変換は, 原点を中心とした半円  $\{|z| < 1; \text{Im}z \geq 0\}$  から幅 1 の帯への変換を意味する (図 3). この変換は実際に [4] において使われていたものである. 以上を踏まえて定理 3.1 を証明する.

*Proof.* (定理 3.1 の証明)

初めに  $a_2 < 0, a_3 > 0, b_3 > 0$  の場合において成り立つことを示す. 3 点  $x_1, x_2, x_3$  を頂点に持つ三角形の  $x_1, x_2$  における外角をそれぞれ  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2$  とすると

$$\pi\alpha_1 = \pi + \arctan 2a_2\epsilon, \pi\alpha_2 = \arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon$$

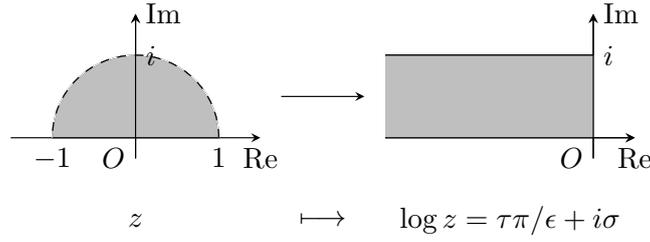


図3  $|z| < 1$  における変換

となる. これから補題 2.6 を用いて 3 点  $z = 0, 1, \infty$  の近傍における  $w_\epsilon$  の級数展開をし,  $z$  を  $\tau, \sigma$  で変換し,  $\epsilon$  に関して極限をとる. まず,  $|z| < 1$  において  $w_\epsilon$  は以下のように記述される.

$$\left\{ -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3 - a_2} i \right\} \frac{1}{F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; 1)} z^{1 - \alpha_1} F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; z)$$

ここで  $z = \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right]$  として  $\epsilon \downarrow 0$  を考えると,

$$\begin{aligned} F(1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; 1) &= \frac{\Gamma(2 - \alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_2)}{\Gamma(2 - \alpha_1 - \alpha_2)} \\ &= \frac{\Gamma(1 - (\arctan 2a_2 \epsilon) / \pi) \Gamma(1 - (\arctan 2a_3 \epsilon - \arctan 2a_2 \epsilon) / \pi)}{\Gamma(1 - (\arctan 2a_3 \epsilon) / \pi)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right)^{(-\arctan 2a_3 \epsilon) / \pi} &= \left( \exp \left[ \frac{\pi}{\epsilon} \tau \right] + \exp[\pi i \sigma] \right)^{(-\arctan 2a_3 \epsilon) / \pi} \\ &= \exp \left[ -\frac{\arctan 2a_2 \epsilon}{\epsilon} \tau \right] \exp[-i\sigma \arctan 2a_2 \epsilon] \rightarrow \exp[-2a_2 \tau] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F \left( 1 - \alpha_1, \alpha_2, 2 - \alpha_1; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \\ &= F \left( -\frac{\arctan 2a_2 \epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3 \epsilon - \arctan 2a_2 \epsilon}{\pi}, 1 - \frac{\arctan 2a_2 \epsilon}{\pi}; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$w_\epsilon \left( \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} e^{-2a_2 \tau} = I_1(\tau)$$

が成り立つ.  $|1 - z| < 1$  において  $w_\epsilon$  は以下のように記述される.

$$\begin{aligned} -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3 - a_2} i - \left\{ -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3 - a_2} i \right\} \frac{1}{F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1)} \\ \cdot (1 - z)^{1 - \alpha_2} F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1 - z) \end{aligned}$$

ここで,  $1 - z = \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right]$  として  $\epsilon \downarrow 0$  を考えると,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; 1) &= \frac{\Gamma(2 - \alpha_2) \Gamma(1 - \alpha_1)}{\Gamma(2 - \alpha_1 - \alpha_2)} \\ &= \frac{\Gamma(2 - (\arctan 2a_3 \epsilon - \arctan 2a_2 \epsilon) / \pi) \Gamma((-\arctan 2a_2 \epsilon) / \pi)}{\Gamma(1 - (\arctan 2a_3 \epsilon) / \pi)} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right)^{1 - (\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi} \\ &= \exp \left[ \frac{\pi}{\epsilon} \tau \right] \exp \left[ -\frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\epsilon} \tau \right] \exp \left[ -\pi i \left( 1 - \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi} \right) t \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F \left( \alpha_1, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_2; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right) \\ &= F \left( -\frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, 1 - \frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$w_\epsilon \left( 1 - \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} = I_2(\tau)$$

が成り立つ.  $|z|^{-1} < 1$  において  $w_\epsilon$  は以下のように記述される.

$$-\frac{b_3}{2a_3} + \left\{ -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3 - a_2} i + \frac{b_3}{2a_3} \right\} \frac{1}{F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; 1) \cdot z^{1 - \alpha_1 - \alpha_2} F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; z^{-1})}$$

ここで,  $z = \exp \left[ -\pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right]$  として  $\epsilon \downarrow 0$  を考えると

$$\begin{aligned} F(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; 1) &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2) \Gamma(1 - \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + (\arctan 2a_3\epsilon)/\pi) \Gamma(1 - (\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi)}{\Gamma(1 + (\arctan 2a_2\epsilon)/\pi)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\left( \exp \left[ -\pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right)^{-(\arctan 2a_3\epsilon)/\pi} \exp \left[ \frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\epsilon} \tau \right] \exp[it \arctan 2a_3\epsilon] \rightarrow e^{2a_3\tau}$$

$$\begin{aligned} & F \left( \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \alpha_1 + \alpha_2; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \\ &= F \left( \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\pi}, 1 + \frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\pi}; \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$w_\epsilon \left( \exp \left[ -\pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) \rightarrow -\frac{b_3}{2a_3} + \left\{ -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} + \frac{b_3}{2a_3} \right\} e^{2a_3\tau} = I_3(\tau)$$

が成り立つ. 以上の議論から,  $a_2 < 0, a_3 > 0, b_3 > 0$  において定理 3.1 が成り立つことがわかる. 同様にすると,  $a_2 < 0, a_3 > 0, b_3 < 0$  としても成り立つことがわかり, さらに  $0 < a_2 < a_3, a_2 < a_3 < 0$  の場合でも成り立つこともわかる.  $\square$

定理 3.1 により,  $M = \mathbb{R}^2$  において次がわかる.

**定理 3.3.**  $f_1 = 0, f_2 = a_2x^2 + b_2y^2, f_3 = a_3x^2 + b_3y^2 + c_3x + d_3y$  として, 各  $k = 1, 2, 3$  に対して  $f_{k+1} - f_k$  が Morse 関数であり,  $p_k, \mu(p_k)$  を定理 3.1 と同様に定義するとき,  $\sum_{i=1}^3 \mu(p_i) = 4$  が成り立つとする.  $I_j$  を  $p_j$  から出る  $f_{j+1} - f_j$  による勾配曲線とし,  $I_1, I_2, I_3$  によって  $f_1, f_2, f_3$  から得られる勾配樹木を構成されるとする. また,  $w_\epsilon$  を上半平面から 3 つのラグランジュ部分多様体  $\text{graph}(\epsilon df_j)$  に囲まれる三角形への SC 写像で,  $x_j$  を  $\text{graph}(\epsilon df_j)$  と  $\text{graph}(\epsilon df_{j+1})$  の交点として

$$w_\epsilon(0) = x_1, w_\epsilon(1) = x_2, w_\epsilon(\infty) = x_3$$

を満たすものとする. このとき, 次が成り立つ. ただし,  $\tau \in (-\infty, 0), \sigma \in [0, 1]$  とする.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) &= I_1(\tau) \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( 1 - \exp \left[ \pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau - i\sigma \right) \right] \right) &= I_2(\tau) \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left( \exp \left[ -\pi \left( \frac{1}{\epsilon} \tau + i\sigma \right) \right] \right) &= I_3(\tau) \end{aligned}$$

*Proof.* [9][10]において, 仮定を満たす  $f_k$  たちから得られる  $\mathbb{R}^2$  上の勾配樹木と  $f_k$  たちから得られる  $\text{graph}(\epsilon df_k)$  に囲まれる  $T^*\mathbb{R}^2$  内の正則円盤は具体的に構成されている. まず, Morse 関数  $f_{j+1} - f_j = ax^2 + by^2 + cx + dy$  の臨界点  $p_j$  から出る勾配曲線  $I_j(t)$  は次の式で記述できる.

$$I_j(t) = \begin{pmatrix} C_1 \exp[-2at] \\ C_2 \exp[-2bt] \end{pmatrix} + p_j \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

特に,  $a, b > 0$  の場合は  $C_1, C_2 = 0$  となり,  $a > 0 > b$  または  $a < 0 < b$  の場合は  $C_1 C_2 = 0$  が成り立ち,  $a, b < 0$  の場合は  $I(0) = p_j$  となるように適当に  $C_1, C_2$  をとることができる ([9][10] 参照). また, 正則円盤は以下の方法で得られる.  $T^*\mathbb{R}^2$  上の点を  $(x, y, \xi_x, \xi_y)$  と書き,  $(x, y)$  を  $\mathbb{R}^2$  上の点,  $(\xi_x, \xi_y)$  を  $(x, y)$  上のファイバー成分とする. 今, 射影  $\pi_1, \pi_2 : T^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$\pi_1 : (x, y, \xi_x, \xi_y) \mapsto (x, \xi_x), \quad \pi_2 : (x, y, \xi_x, \xi_y) \mapsto (y, \xi_y)$$

で定義する. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{graph}(\epsilon df_1)) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \pi_1(\text{graph}(\epsilon df_2)) = \{(x, 2a_2x) : x \in \mathbb{R}\} \\ \pi_1(\text{graph}(\epsilon df_3)) &= \{(x, 2a_3x + c_3) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \pi_2(\text{graph}(\epsilon df_1)) = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\}, \\ \pi_2(\text{graph}(\epsilon df_2)) &= \{(y, 2b_2y) : y \in \mathbb{R}\}, \quad \pi_2(\text{graph}(\epsilon df_3)) = \{(y, 2b_3y + d_3) : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

このことから  $\pi_1(T^*\mathbb{R}^2)$  内に 3 直線  $\pi_1(\text{graph}(\epsilon df_1)), \pi_1(\text{graph}(\epsilon df_2)), \pi_1(\text{graph}(\epsilon df_3))$  に囲まれる三角形,  $\pi_2(T^*\mathbb{R}^2)$  内に 3 直線  $\pi_2(\text{graph}(\epsilon df_1)), \pi_2(\text{graph}(\epsilon df_2)), \pi_2(\text{graph}(\epsilon df_3))$  に囲まれる三角形ができる. 以上から

$$(x, \xi_x) \leftrightarrow x + \sqrt{-1}\xi_x, \quad (y, \xi_y) \leftrightarrow y + \sqrt{-1}\xi_y$$

で  $\mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{C}$  と同一視し,

$$(x, y, \xi_x, \xi_y) \leftrightarrow (x + \sqrt{-1}\xi_x, y + \sqrt{-1}\xi_y)$$

で  $T^*\mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{C}^2$  と同一視することにより, 上半平面から前者の三角形への SC 写像を  $u_\epsilon$ , 後者の三角形への SC 写像を  $v_\epsilon$  とすると,  $w_\epsilon(z) = (u_\epsilon(z), v_\epsilon(z))$  はコーシー・リーマン方程式と境界条件を満

たす. 定理 3.3 中の  $w_\epsilon$  はこのことを指す. また, 射影  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\phi_1 : (x, y) \mapsto x, \quad \phi_2 : (x, y) \mapsto y$$

で定義する. このとき,  $u_\epsilon, v_\epsilon$  に対して定理 3.1 を適用すると,  $u_\epsilon$  は  $\phi_1(I_1), \phi_1(I_2), \phi_1(I_3)$  へ,  $v_\epsilon$  は  $\phi_2(I_1), \phi_2(I_2), \phi_2(I_3)$  へ近づくことがわかる. これにより命題が示された.  $\square$

## 参考文献

- [1] DA SILVA, A. Cannas. Lectures on symplectic geometry. Berlin: Springer, 2008.
- [2] TOBIN A. Driscoll, LLOYD N. Trefethen. Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge University Press, 2002.
- [3] FUKAYA, Kenji. Morse homotopy,  $A^\infty$ -category and Floer homologies, in Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology, ed. by H. J. Kim, Seoul National University, Korea, 1993.
- [4] FUKAYA, Kenji. Multivalued Morse theory, Asymptotic Analysis, and Mirror symmetry. 2002.
- [5] FUKAYA, Kenji; OH, Yong-Geun. Zero-loop open strings in the cotangent bundle and homotopy. Asian Journal of Mathematics, 1997, 1.1: 96-180.
- [6] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.
- [7] 原岡喜重, 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.
- [8] NEHARI, Zeev. Conformal mapping. Courier Corporation, 2012.
- [9] 鈴木英正, ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述, 千葉大学大学院融合理工学府令和 4 年度修士論文, 2023.
- [10] 鈴木英正, ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の求田的記述について, 第 19 回数学総合若手研究集会: 数学の交叉点, p.661-669, 2023.
- [11] 佐藤全, 平面上の勾配樹木の分類について, 千葉大学大学院融合理工学府令和 2 年度修士論文, 2021.
- [12] ELIAS M. Stein; RAMI Shakarchi. Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis II. Princeton University Press, 2003.