1 の冪根における量子 SL_2 の余イデアル部分代数について

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群
杉谷礼 (Rei SUGITANI) *†

概要

余イデアル部分代数は量子等質空間の定式化として知られており，ホップ代数の理論における部分群に対応する概念とも考えられている．本講演では「量子線形空間の持ち上げ」と呼ばれるクラスのホップ代数の余イデアル部分代数の分類に関する結果を与える．応用として 1 の冪根における SL_2 型の量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ および量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数のリストを与える．

1 導入

アフィン群スキーム $\mathbf{G}$ は米田の補題によって可換ホップ代数 $H := \mathcal{O}(\mathbf{G})$ に対応する [Wat79]．さらにその閉部分群スキームによる剰余類空間がアフィンであるとき，対応する可換代数は，H の余イデアル部分代数と呼ばれるものとなる．Takeuchi [Tak79] はアフィンであるような $\mathbf{G}$ の剰余類空間を

$$H \text{ が } A\text{-加群として忠実平坦である} \tag{1.1}$$

という性質を満たすような H の余イデアル部分代数 A として特徴づけた．

一方で，量子群の研究の進展とともに量子等質空間，つまり量子群が上手く作用する空間が考えられ始めた．そこで Müller と Schneider は量子等質空間を抽象的に扱う枠組みを考えるために，これまで具体的な形で現れていた量子等質空間たちの忠実平坦性などの性質を調べ，条件 1.1 を満たす余イデアル部分代数を一般のホップ代数 H に対する等質空間とみなすことを提唱した [MS99]．このような経緯から，余イデアル部分代数はホップ代数および量子群の理論において重要な研究対象であると認識されている．実際，余イデアル部分代数に関して様々な研究が行われていることが [OWR15] から見受けられる．

本研究では主に有限次元の可換とは限らないホップ代数を考える．その際に極めて重要なのが Skryabin による次の結果である．

定理 1.1 ([Skr07, Theorem 6.1])**.** *H を有限次元ホップ代数，A を H の余イデアル部分代数とする．このとき H は自由 A-加群である．特に $\dim H$ は $\dim A$ で割り切れる．*

* E-mail:rsugitani@math.tsukuba.ac.jp
† 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものです．

これより有限次元ホップ代数の任意の余イデアル部分代数は条件 1.1 を満たすことがわかる．また有限群 G 上の等質空間 (つまり推移的な G-集合) は，G のある部分群による剰余類の集合と同型であるから，G の部分群に対応していると考えられる．さらに有限群の群環やその双対の余イデアル部分代数はその群の部分群と対応していることも示される．これらのことから，有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数は有限群の部分群のようなものであると考えられている [CW14].

さて，以上に述べたことからホップ代数の余イデアル部分代数の分類は重要な問題とされる．例えば q が 1 の冪根でない量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の場合，群的元を全て含むような余イデアル部分代数の分類は既に完了している [HS13, Theorem 7.3], [HK12, Theorem 3.8]．また群的元を全て含まない場合もある条件のもとで分類の結果がある [HK13, Theorem 2.15]．さらに Vocke [Voc18] によって，$U_q(\mathfrak{g})$ の群的元全体の集合との共通部分が部分ホップ代数となるような余イデアル部分代数の生成元も考えられており，その応用として $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ の余イデアル部分代数の生成元のリストが与えられている．他にもそれぞれ Chirvasitu-Kasprzak-Szulim [CKS20] と Burciu [Bur15] によって，タフト代数と余中心カッツ代数と呼ばれるクラスの有限次元ホップ代数の場合も分類されている．

本稿では有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類に関する結果を紹介する．特に双対ホップ代数および， Andruskiewitsch-Schneider [AS98] によって導入された「量子線形空間の持ち上げ」と呼ばれるクラスのホップ代数の場合を考える．最後に以上の議論の応用として 1 の冪根における量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ およびその座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数の分類リストを与える．

2　ホップ代数と余イデアル部分代数

定義 2.1 (余代数, ホップ代数, 点状ホップ代数)．線形空間 C が線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \Bbbk$ を持ち，これらが

$$(\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta$$
$$(\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_C = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta$$

を満たすとき C を余代数という．この Δ, ε はそれぞれ余積，余単位と呼ばれる．また余積 Δ を，$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ と表す（Sweedler 記法)．

代数 H が余代数であり余積と余単位がともに代数射であるとする．さらに $m : H \otimes H \to H$ を代数 H の積とするとき，$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ は

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H))$$

で定まる積に関して代数となる．$\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ がこの積に関する逆元 $S \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ をもつとき，H をホップ代数という．この S は対合射と呼ばれる．

C を余代数とする．C の単純部分余代数がすべて 1 次元のとき，C を点状余代数という．特に C がホップ代数のとき，C を点状ホップ代数という．

定義 2.2 (余イデアル部分代数)．ホップ代数 H の部分代数 A が右余イデアル，すなわち

$$\Delta(A) \subset A \otimes H$$

を満たすとき，A を右余イデアル部分代数という．左余イデアル部分代数も同様に定義される．本稿では余イデアル部分代数といえば右余イデアル部分代数をさすことにする．

定義 2.3 (群的元，歪原始元)**.** H をホップ代数とする．

$$\mathrm{G}(H) = \{g \in H \mid \Delta(g) = g \otimes g,\ \varepsilon(g) = 1\}.$$

の元を群的元といい，

$$\mathrm{P}_{g,h}(H) = \{p \in H \mid \Delta(p) = p \otimes g + h \otimes p\} \quad (g, h \in \mathrm{G}(H))$$

の元を (g,h)-歪原始元という．

有限次元ホップ代数について次の事実が知られている：

定理 2.4. 有限次元ホップ代数 H の双対空間 H^* は，余積と余単位を次のように定めることによりホップ代数となる：

$$f_{(1)}(a) \otimes f_{(2)}(b) = f(ab),\ \varepsilon(f) = f(1) \quad (f \in H^*,\ a, b \in H).$$

3 双対ホップ代数の余イデアル部分代数

H を有限次元ホップ代数とし，A を H の余イデアル部分代数とする．

定義 3.1. H の右余イデアル部分代数 A に対し

$$A^+ := A \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$$

とおく．H/A^+H は H の商余代数として左 H-加群余代数になっており，その双対空間 $(H/A^+H)^*$ は右 H^*-余加群代数，つまり H^* の右余イデアル部分代数とみなせる．

双対ホップ代数の余イデアル部分代数の分類において次の定理が重要である：

定理 3.2 ([Mas92, Proposition 2.10]，[Skr07, Corollary 6.5])**.** 対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ は H の余イデアル部分代数と，H^* の余イデアル部分代数の間の全単射を与える．

この A に対応する $(H/A^+H)^*$ の良い表示を得るために記号を導入しよう．L と K を有限次元ホップ代数とし，$\mathcal{C}(K)$ で K の余イデアル部分代数全体の集合を表すことにする．ホップ代数の同型射 $\phi : K \to L^*$ が与えられたとする．以下，$k \in K$ と $\ell \in L$ に対し $(k, \ell) := \phi(k)(\ell)$ とする．このとき定理 3.2 の対応と同型写像 $\phi : K \to L^*$ を組み合わせて得られる写像

$$\mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)\,;\ A \mapsto A^{\diamondsuit} := \phi^{-1}\left(\left(L/A^+L\right)^*\right)$$

は全単射となる．このとき K には ϕ を通して，L^* の右 L-加群構造から誘導される右 L-加群の構造が入る．この L-作用を $\leftharpoonup$ で表す．つまり

$$k \leftharpoonup \ell = \left(k_{(1)}, \ell\right) k_{(2)} \quad (k \in K, \ell \in L).$$

以上の記号のもとで次が成り立つ：

補題 3.3. $A \in \mathcal{C}(L)$ に対して

$$A^{\Diamond} = \{k \in K \mid k \leftharpoondown a = \varepsilon(a)k \text{ for all } a \in A\}$$

が成り立つ．

証明. $\phi : K \to L^*$ はホップ代数の同型であるから，

$$(k \leftharpoondown \ell, \ell') = \left(k_{(1)}, \ell\right)\left(k_{(2)}\ell'\right) = (k, \ell\ell') \quad (k \in K, \ell, \ell' \in L)\,. \tag{3.1}$$

$k \in A^{\Diamond}$，$a \in A$ とする．このとき $A^{\Diamond}$ の定義より，任意の $x \in A^+L$ に対して $(k, x) = 0$ である．$a^+ := a - \varepsilon(a)1$ は A^+ に含まれるから，任意の $\ell \in L$ に対して

$$(k \leftharpoondown a, \ell) - (\varepsilon(a)k, \ell) = \left(k \leftharpoondown a^+, \ell\right) \overset{(3.1)}{=} \left(k, a^+\ell\right) = 0$$

を得る．$(-,-)$ の非退化性より，$k \leftharpoondown a = \varepsilon(a)k$．以上より "$\subset$" がわかった．逆を示そう．$k \in K$ を任意の $a \in A$ に対して $k \leftharpoondown a = \varepsilon(a)k$ となるような元とする．$a \in A^+$ と $\ell \in L$ に対して，$\varepsilon(a) = 0$ だから

$$\phi(k)(a\ell) = (k, a\ell) \overset{(3.1)}{=} (k \leftharpoondown a, \ell) = (\varepsilon(a)k, \ell) = 0$$

が成り立つ．従って $k \in \phi^{-1}\left((A^+L)^*\right)$ がわかり証明が完了した． □

この $A^{\Diamond}$ の次元に関して次のことが成立する：

命題 3.4. $\dim A^{\Diamond} = \dim(H)/\dim(A)$ が成り立つ．

証明. H は左 A-加群かつ右 (H/A^+H)-余加群として $A \otimes (H/A^+H)$ と同型である [Skr07, Theorem 6.1]．従って，

$$\dim(H) = \dim(A) \cdot \dim\left(H/A^+H\right) = \dim(A) \cdot \dim\left(A^{\Diamond}\right)$$

となる． □

4 量子線形空間の持ち上げ

ニコルス代数は対称代数の一般化のようなものであり，有限次元点状ホップ代数の分類を背景に盛んに研究されてきた．量子線形空間とは，対角型と呼ばれるクラスのニコルス代数のうち最も基本的なものである．Andruskiewitsch と Schneider [AS98] は有限次元量子線形空間の持ち上げとして得られる有限次元点状ホップ代数の分類を行なった．本節では分類の結果として得られるホップ代数 $U(\mathcal{D})$ の定義を紹介し，小さい量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ がこのクラスに含まれることを説明する．$U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数については次節で議論する．

θ を正整数とする．データ

$$\mathcal{D} = \left(\Gamma, (g_i)_{1 \le i \le \theta}, (\chi_i)_{1 \le i \le \theta}, (\lambda_{ij})_{1 \le i < j \le \theta}, (\mu_i)_{1 \le i \le \theta}\right) \tag{4.1}$$

は以下のようなものとする：

- Γ は有限アーベル群である．
- $g_i \in \Gamma$，$\chi_i \in \hat{\Gamma} := \mathrm{Hom}\left(\Gamma, \Bbbk^\times\right)$ である．但し，
$$\chi_i\left(g_i\right) \neq 1,\ \chi_i\left(g_j\right)\chi_j\left(g_i\right) = 1 \quad (i, j = 1, \cdots, \theta\,;\, i \neq j).$$
であることを要請する．
- $\lambda_{ij} \in \Bbbk$ である．但し，$g_i g_j = e$ または $\chi_i\chi_j \neq \varepsilon$ のとき $\lambda_{ij} = 0$ であることを要請する．ここに e および ε は，Γ および $\hat{\Gamma}$ の単位元である．
- $\mu_i \in \{0, 1\}$ とする．但し，$g_i^{N_i} = e$ または $\chi_i^{N_i} \neq \varepsilon$ のとき，$\mu_i = 0$ であることを要請する．ここに N_i は $\chi_i\left(g_i\right)$ の位数である．

定義 4.1. 式 (4.1) のデータ $\mathcal{D}$ が与えられたとき，ホップ代数 $U(\mathcal{D})$ が次のように定義される：

生成元	$u_g\ (g \in \Gamma),\ x_i\ (i = 1, \cdots, \theta).$
関係式	$u_e = 1, \quad u_g u_h = u_{gh}, \quad u_g x_i = \chi_i(g) x_i u_g, \quad x_i^{N_i} = \mu_i\left(1 - u_{g_i}^{N_i}\right)$
	$x_j x_i = \chi_i\left(g_j\right) x_i x_j + \lambda_{ij}\left(1 - u_{g_i} u_{g_j}\right), \quad (g, h \in \Gamma,\ i, j \in \{1, \cdots, \theta\},\ i < j).$
ホップ代数構造	$u_g \in \mathrm{G}\left(U(\mathcal{D})\right),\ x_i \in \mathrm{P}_{u_{g_i}, 1}\left(U(\mathcal{D})\right),\ .$

以降 $u_g\ \ (g \in G)$ を単に g と書くことにする．

例 4.2. $N > 1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．(4.1) のデータ $\mathcal{D}$ を次のように定める：

$$\theta = 2,\ \Gamma = \left\langle g \mid g^N = e\right\rangle,\ g_1 = g_2 = g,\ \chi_1(g) = q^2,\ \chi_2(g) = q^{-2},\ \lambda_{12} = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (4.2)$$

このときホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ は次のようになる：

生成元	$g,\ x_1,\ x_2$
関係式	$g^N = 1,\ gx_1 = q^2 x_1 g,\ gx_2 = q^{-2} x_2 g,\ x_1^N = x_2^N = 0,\ x_2 x_1 = q^2 x_1 x_2 + 1 - g^2.$
ホップ代数構造	$g \in \mathrm{G}\left(U(\mathcal{D})\right),\ x_1, x_2 \in \mathrm{P}_{g,1}\left(U(\mathcal{D})\right),\ \varepsilon(g) = 1,\ \varepsilon\left(x_1\right) = \varepsilon\left(x_2\right) = 0.$

このホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ の生成元を $K = g$，$E = x_1$，$F = \left(q - q^{-1}\right)^{-1} g^{-1} x_2$ ととりなおすと，関係式とホップ代数構造は

$$K^N = 1,\ KE = q^2 EK,\ KF = q^2 FK,\ E^N = F^N = 0,\ EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}},$$
$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F.$$

となる．すなわちデータ (4.2) から得られるホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ は，よく知られた小さい量子群 $u_q\left(\mathfrak{sl}_2\right)$ と同じものである．

5　主結果

5.1　小さい量子群 $u_q\left(\mathfrak{sl}_2\right)$ の余イデアル部分代数

記号は定義 4.1 のとおりとする．ホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ の余イデアル部分代数について議論するために，まずは記号を準備しよう．G を Γ の部分群とし，$G^\perp = \{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \chi(g) = 1 \text{ for all } g \in G\}$ とす

る．添字集合 $\{1,2,\ldots,\theta\}$ に同値関係 $\sim_G$ を

$$i\sim_G j \Longleftrightarrow g_i\equiv g_j \pmod G \ \text{かつ}\ \chi_i\equiv\chi_j \pmod G^{\perp}$$

で定め，$[j]$ で j の $\sim_G$ に関する同値類を表す．$[j]=\{i_1,\ldots,i_n\}$ $(i_1<\cdots<i_n)$ とし，

$$\xi_j\left(c_1,\cdots,c_n,a\right)=g_j\sum_{s=1}^{n}c_s g_{i_s}^{-1}x_{i_s}+ag_j \quad \left(c_1,\cdots,c_n,a\in\Bbbk\right).$$

と定める．このとき $\xi:=\xi_j\left(c_1,\cdots,c_n,a\right)$ は

$$\Delta(\xi)=\xi\otimes g_j+\sum_{s=1}^{n}c_s g_j g_{i_s}^{-1}\otimes x_{i_s}\in(\Bbbk\xi+\Bbbk G)\otimes U(\mathcal{D})$$

を満たす．さらに $n\times n$ 行列 C とベクトル $\boldsymbol{a}\in\Bbbk^n$ が与えられたとき，

$$X(j,C,\boldsymbol{a})=\left\{\xi_j\left(c_{r1},\ldots,c_{rn},a_r\right)\mid r=1,\cdots,n\right\},$$

とおく．但し $c_{r,s}$ は C の (r,s)-成分で，a_r は $\boldsymbol{a}$ の r-成分である．最後にある行列 C と $\boldsymbol{a}\in\Bbbk^n$ の組 $(C,\boldsymbol{a})$ が

(RD1) C は簡約階段形をもつ．
(RD2) $\chi_j\not\equiv\varepsilon\left(\mathrm{mod} G^{\perp}\right)$ のとき $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$．
(RD3) C の r-列目が $\mathbf{0}$ のとき $a_r=0$．

の 3 条件を満たすとき，$(C,\boldsymbol{a})$ を同値類 $[j]$ の簡約データと呼ぶことにする．以上の準備のもとで次が成り立つ：

定理 5.1. A を $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数とする．

$$G=A\cap\Gamma \tag{5.1}$$

とし，$\{j_1,\cdots,j_m\}$ を $\sim_G$ の同値類の完全代表系とする．このとき

$$G\cup X\left(j_1,C_1,\boldsymbol{a}_1\right)\cup\cdots\cup X\left(j_m,C_m,\boldsymbol{a}_m\right) \tag{5.2}$$

が A を生成するような，$[j_k]$ $(k=1,\ldots,m)$ の簡約データ $(C_k,\boldsymbol{a}_k)$ が存在する．

注意 5.2. 定理 5.1 は $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の完全な分類を与えるものではないことに注意されたい．Γ の部分群 G と簡約データ $(C_k,\boldsymbol{a}_k)$ $(k=1,\ldots,m)$ が与えられたとき (5.2) によって余イデアル部分代数 A が生成されるが，一般に条件 5.1 は成り立つとは限らない．すなわち $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の分類を完了するには，このように得られた余イデアル部分代数 A に対して $A\cap\Gamma=G$ が成り立つか否かを調べなければならぬ．

以下では $U(\mathcal{D})$ を例 4.2 のものとし，これに定理 5.1 を適用する．A を $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数とする．$G=A\cap\Gamma$ とおくとき，G は $\{e\}$ か，N でない N のある正の約数 $r\in\mathbb{Z}$ に対して $\langle g^r\rangle$ のいずれかである．

$G=\{e\}$ のとき　このとき $G^{\perp}=\Gamma$ で，$1\sim_G 2$ である．$[1]=\{1,2\}$ に対する簡約データ $(C,\boldsymbol{a})$ は $\alpha,\beta\in\Bbbk$ として次のものたちである：

$$\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\right).$$

これらに対応する A は,

$$u_{\alpha\beta}=x_1+\alpha x_2+\beta g,\quad w_\beta=x_2+\beta g,\quad v_\alpha=x_1+\alpha g$$

とおくとき，それぞれ $\Bbbk$，$\langle u_{\alpha,\beta}\rangle$，$\langle w_\beta\rangle$，$\langle v_\alpha,w_\beta\rangle$ である．

$G=\langle g^r\rangle$ $(r\mid N, r\neq N)$ のとき　N は奇数という仮定より，$1\nsim_G 2$ となる．従って A は $\langle g^r\rangle$，$\langle g^r,x_1\rangle$，$\langle g^r,x_2\rangle$，$\langle g^r,x_1,x_2\rangle$ のいずれかである．

$U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の分類を完了させるために，上記で得られた余イデアル部分代数が条件 5.1 を満たすか否かをを調べよう．

$A=\langle u_{\alpha,\beta}\rangle$ のとき　A は可換であり，e を除く Γ の各元は $u_{\alpha,\beta}$ と可換でないから $A\cap\Gamma=\{e\}$ である．

$A=\langle v_\alpha,w_\beta\rangle$ のとき　直接的な計算により

$$w_\beta v_\alpha-q^2v_\alpha w_\beta=1+\left\{\alpha\beta\left(1-q^2\right)-1\right\}g^2$$

を得る．よって

$$\alpha\beta=\left(1-q^2\right)^{-1}\tag{5.3}$$

を満たすとき，$\left\{v_\alpha^m w_\beta^n\mid m,n=0,\cdots,N-1\right\}$ が A の基底となり，$A\cap\Gamma=\{e\}$ を満たす．また式 (5.3) が成り立たないとき $g^2\in A$ となる．つまり $A\cap\Gamma=\{e\}$ となることの必要十分条件は式 (5.3) が成り立つことである．

$A=\langle g^r,x_1,x_2\rangle$ のとき　x_1x_2 を計算することにより

$$g^2=q^{-2}x_1x_2-x_2x_1+1\in A$$

を得る．N は奇数であり，r は N の約数だから $g\in A$ である．よって $A\cap\Gamma=\langle g^r\rangle$ となることの必要十分条件は $r=1$ である．

その他　$A=\langle g^r\rangle$，$\langle g^r,x_1\rangle$，$\langle g^r,x_2\rangle$ のとき $A\cap\Gamma=\langle g^r\rangle$ となることは明らかである．

以上により 1 の冪根における $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数の分類が完了した．

定理 5.3. 1 の冪根における量子群 $U(\mathcal{D})\cong u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数は以下で全てである：

$$U(\mathcal{D}),\quad \langle g^r\rangle,\quad \langle g^r,x_1\rangle,\quad \langle g^r,x_2\rangle\ \ (r\in\mathbb{Z}\text{ は }N\text{ の正の約数}),$$
$$\langle u_{\alpha\beta}\rangle\ \ (\alpha,\beta\in\Bbbk,(\alpha,\beta)\neq(0,0)),\quad \langle w_\beta\rangle\ \ (\beta\in\Bbbk,\beta\neq0),$$
$$\langle v_\alpha,w_\beta\rangle\ \ \left(\alpha,\beta\in\Bbbk\text{ s.t. }\alpha\beta=\left(1-q^2\right)^{-1}\right).$$

注意 5.4. q が 1 の冪根でない $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合に関して，Vocke [Voc18] は $A\cap \mathrm{G}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ が部分ホップ代数となるような余イデアル部分代数 $A\subset U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を分類している．我々が分類した，q が 1 の冪根である $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数はすべて [Voc18] の分類リストにも含まれている．

5.2 量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数

まず $\overline{O_q(SL_2)}$ について簡単にまとめておこう．q を 1 の冪根，N を奇数，$r\in\mathbb{Z}$ を N の正の約数とする．$\overline{O_q(SL_2)}$ は次のように定義されるホップ代数である：

生成元	a,b,c,d
関係式	$ba=qab,\ ca=qac,\ db=qbd,\ dc=qcd,\ bc=cb,\ ad=q^{-1}bc+1,\ da=qbc+1$ $a^N=d^N=1,\ b^N=c^N=0.$
ホップ代数構造	$\Delta(a)=a\otimes a+b\otimes c,\ \Delta(b)=a\otimes b+b\otimes d,\ \Delta(c)=c\otimes a+d\otimes c,$ $\Delta(d)=c\otimes b+d\otimes d,\ \varepsilon(a)=\varepsilon(d)=1,\ \varepsilon(b)=\varepsilon(c)=0.$

$\overline{O_q(SL_2)}$ の定義において，d は可逆元だから $a=\left(q^{-1}bc+a\right)d^{-1}$ と書ける．よって

$$\overline{O_q(SL_2)}:=\left\langle b,c,d\mid d^N=1,\ b^N=c^N=0,\ db=qbd,\ dc=qcd,\ bc=cb\right\rangle$$

と表すことができ，このとき

$$\left\{b^ic^jd^k\mid 0\leq i,j,k\leq N-1\right\} \tag{5.4}$$

が $\overline{O_q(SL_2)}$ の基底となる．さらに $\overline{O_q(SL_2)}\cong u_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ が成り立つ．また $\overline{O_q(SL_2)}$ の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用を "$\triangleright$" で表すとき

$$g^r\triangleright b^ic^jd^k=q^{r(-i+j-k)}b^ic^jd^k \tag{5.5}$$

となる．以上の同型 $\overline{O_q(SL_2)}\cong u_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ や $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用については [Zac19] が詳しい．

さて，補題 3.3 によって $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数も決定される．

定理 5.5. 量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数は，補題 3.3 の記号と定理 5.3 の余イデアル部分代数を用いて以下で全てである：

$$U(\mathcal{D})^\diamondsuit,\quad \langle g^r\rangle^\diamondsuit,\quad \langle g^r,x_1\rangle^\diamondsuit,\quad \langle g^r,x_2\rangle^\diamondsuit,\quad \langle u_{\alpha\beta}\rangle^\diamondsuit,\quad \langle w_\beta\rangle^\diamondsuit,\quad \langle v_\alpha,w_\beta\rangle^\diamondsuit.$$

最後に $\langle g^r\rangle^\diamondsuit$ の生成元を求めてみよう．$\varepsilon(g^r)=1$ であるから補題 3.3 と式 (5.5) より，$q^{r(-i+j-k)}b^ic^jd^k=b^ic^jd^k$ を満たす $b^ic^jd^k$ で生成される代数が $\langle g^r\rangle^\diamondsuit$ である．従って

$$r(-i+j-k)\equiv 0\pmod N\iff -i+j-k=\frac{N}{r}l\quad(l\in\mathbb{Z})\iff k=-i+j-\frac{N}{r}l$$

より $\left\{b^ic^jd^{-i+j-\frac{N}{r}l}\mid 0\leq i,j\leq N-1,\ l\in\mathbb{Z}\right\}$ が $\langle g^r\rangle^\diamondsuit$ の基底となる．生成元で書けば $\langle g^r\rangle^\diamondsuit=\left\langle bd^{-1},cd,d^{\frac{N}{r}}\right\rangle$ である．また $\dim\langle g^r\rangle^\diamondsuit=rN^2$ も容易にわかり，$\dim\langle g^r\rangle=\frac{N}{r}$ であるから $\frac{N}{r}\cdot rN^2=N^3$ となり，これは命題 3.4 の結果とも合致している．

他の $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数の基底や生成元について，$\langle g^r,x_1\rangle^\diamondsuit$，$\langle g^r,x_2\rangle^\diamondsuit$ は $\langle g^r\rangle^\diamondsuit$ と同様な $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用によって決定でき，$\langle g^r,x_1\rangle^\diamondsuit=\left\langle cd,d^{\frac{N}{r}}\right\rangle$，$\langle g^r,x_2\rangle^\diamondsuit=\left\langle bd^{-1},d^{\frac{N}{r}}\right\rangle$ となる．$\langle u_{\alpha\beta}\rangle^\diamondsuit$，$\langle w_\beta\rangle^\diamondsuit$，$\langle v_\alpha,w_\beta\rangle^\diamondsuit$ の場合は，作用が複雑になり同じ方法では難しいと思われるが，基底 (5.4) の代わりに $\overline{O_q(SL2)}$ の PBW 基底 [RS19] を用いると作用が比較的簡単になる．現在はこの基底を用いて，$\langle u_{\alpha\beta}\rangle^\diamondsuit$，$\langle w_\beta\rangle^\diamondsuit$，$\langle v_\alpha,w_\beta\rangle^\diamondsuit$ の基底や生成元について研究中である．

参考文献

[AS98] N. Andruskiewitsch and H. -J. Schneider. Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3. J. Algebra, 209(2):658–691, 1998.

[Bur15] S. Burciu. On coideal subalgebras of abelian cocentral extensions and a generalization of Wall's conjecture, J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 2.

[CKS20] A. Chirvasitu, P. Kasprzak and P. Szulim. Integrals in Left Coideal Subalgebras and Group-Like Projections, Algebras and Representation Theory (2020) 23:1499–1522.

[CW14] M. Cohen and S. Westreich. Character tables and normal left coideal subalgebras. J. Pure Appl. Algebra, 218(10):1845–1866, 2014.

[HK12] I. Heckenberger and S. Kolb. Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras, Bull. London Math. Soc. 44, 837-848, 2012.

[HK13] I. Heckenberger and S. Kolb. Right coideal subalgebras of the Borel part of a quantized enveloping algebra, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 2, pp 419-451, 2011

[HS13] I. Heckenberger and H. -J. Schneider. Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid. Israel J. Math.197(2013), no.1, 139–187.

[Mas92] A. Masuoka. Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras, Comm. Algebra 20 (1992), no. 5, 1353–1373.

[MS99] E. -F. Müller and H. -J. Schneider. Quantum homogeneous spaces with faithfully flat module structures, Israel Journal of Mathematics volume 111, pages 157–190 (1999).

[OWR15] I. Heckenberger, S. Kolb and J. V. Stokman. Mini-workshop: Coideal Subalgebras of Quantum Groups. Abstracts from the mini-workshop held February 15–21, 2015. Oberwolfach Rep.12(2015), no.1, 533–569.

[RS19] A. Ryan, M. Shahn. Co-double bosonisation and dual bases of cq[SL2] and cq[SL3]. J. Algebra518(2019), 75–118.

[Skr07] S. Skryabin. Projectivity and freeness over comodule algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 6, 2597–2623.

[Tak79] M. Takeuchi. Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria. J. Algebra 60 (1979), no. 2, 452–471.16A24.

[Voc18] K. Vocke. On right coideal subalgebras of quantum groups. arXiv e-prints, page arXiv:1804.10007, April 2018.

[Wat79] W. C. Waterhouse. Introduction to affine group schemes. Graduate Texts in Mathematics, 66. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. xi+164 pp. ISBN: 0-387-90421-2.

[Zac19] C. Zachary. Extending actions of Hopf algebras to actions of the Drinfel'd double. Temple University, 2019, Ph.D. thesis. https://math.temple.edu/grad/current/recent/theses/ZacharyCline.pdf