Key 多項式と flagged Schur 多項式

杉本 奨吾 (Sugimoto Shogo)

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

Abstract

Key 多項式は Demazure によって導入された A 型 Demazure 加群の指標を表す特殊多項式である．Assaf は key 多項式の組合せ論的表示のひとつである semi standard key tableaux 表示を与えた．我々は Assaf とは別の方法での証明を与える．また Key 多項式は flagged Schur 多項式の一般化になっており Liner–Shimozono は Key 多項式が flagged Schur 多項式となる必要十分条件を与えた．我々は彼らとは別の Key 多項式が flagged Schur 多項式となる必要十分条件を与える．本内容は松村朝雄氏との共同研究に基づく．

1 導入

Key 多項式は Demazure [2] によって導入された A 型 Demazure module の指標を表す表現論的な関数である．この多項式は composition（0 以上の整数列）を添字に持ちある作用素を用いて定義される．Kohnert [3] は Key 多項式を Kohnert diagram とよばれる図形を用いた組合せ論的表示を与えた．彼の表示から発展して Assaf [1] はこの多項式の別の組合せ論的表示（tableaux 公式）を与えた．

Schubert 多項式は Lascoux–Schützenberger [4] によって導入された旗多様体の cohomology 環の Schubert 基底を表す特殊多項式である．この多項式は対称群を添字にもつ多項式であり特殊な permutation においては flagged Schur 多項式となる．つまり flagged Schut 多項式は幾何的な関数である．

さらに Reiner–Shimozono [5] は幾何的な関数である flagged Schur 多項式の族が表現論的関数である key 多項式の族に含まれることと, key 多項式が flagged Schur 多項式となるときの必要十分条件を与えた．

本稿では Assaf の与えた Key 多項式の tableaux 公式の別証明と Reiner–Shimozono の与えた key 多項式が flagged Schur 多項式となるときの必要十分条件の別条件を与える．

2 Key 多項式

2.1 Demazure 作用素

Key 多項式は次の作用素（Demazure 作用素）を用いて定義される．

定義 2.1. 作用素 $\pi_i : \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ （$i = 1, \cdots, i-1$）を

$$\pi_i(f) = \frac{x_i f - x_{i+1} s_i(f)}{x_i - x_{i+1}}$$

で定義する．ここで $s_i(f)$ は多項式 $f \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ の x_i と x_{i+1} を入れ替えて得られる多項式である．この作用素 π_i を *Demazure* 作用素という．

命題 2.2. *Demadure* 作用素には次の性質がある．

(1) $\pi_i^2 = \pi_i \quad (i = 1, \cdots, i-1)$

(2) $\pi_1 \pi_j = \pi_j \pi_i \quad (|i-j| \geq 2)$

(3) $\pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, i-2)$

Demazure 作用素は整数を添え字にもつ作用素であるがこれを対称群の元を添字にもつように拡張する．

定義 2.3. S_n を n 次対称群とする．$w \in S_n$ の最短表示を $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ とする．ここで $i_1, \cdots, i_\ell \in \{1, \cdots, n-1\}$ であり s_i は $i, i+1$ の互換を表す．このとき π_w を

$$\pi_w = \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_\ell}$$

で定義する．

命題 2.2 から π_w は最短表示のとりかたによらないことがわかる．

2.2 Key 多項式の定義

定義 2.4. 0 以上の有限整数列を *composition* という．
さらに *composition* であり単調減少の数列を *partition* といい 単調増加である数列を *flag* という．
Composition $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して $\lambda(\alpha)$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を入れ替えて得られる *partition* とする．
$w(\alpha) \in S_n$ を $\alpha w(\alpha) = \lambda(\alpha)$ となる *permutation* であり *length* が最短であるものとする．
ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \in S_n$ に対して αw を $\alpha w = (\alpha_{w_1}, \cdots, \alpha_{w_n})$ で定義する．

定義 2.5. *[2]* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を *composition* とする．*Key* 多項式 κ_α を次で定義する．

$$\kappa_\alpha = \pi_{w(\alpha)}(x^{\lambda(\alpha)})$$

例 1. $\alpha = (0,1,2,1)$ とする．このとき $\lambda(\alpha) = (2,1,1,0), w(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ である（$w(\alpha) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ であることに注意）．$w(\alpha)$ を最短表示すると $w = s_2 s_1 s_2 s_3$ である．よって

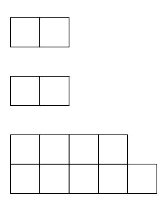
$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha &= \pi_{w(\alpha)}(x^{\lambda(\alpha)}) = \pi_2\pi_1\pi_2\pi_3(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0) \\
&= \pi_2\pi_1\pi_2\frac{x_1^2x_2^1x_3^2x_4^0 - x_1^2x_2^1x_3^0x_4^2}{x_3 - x_4} = \pi_2\pi_1\pi_2(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1) \\
&= \pi_2\pi_1\frac{(x_1^2x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^2x_3^0x_4^1) - (x_1^2x_2^1x_3^2x_4^0 + x_1^2x_2^0x_3^2x_4^1)}{x_2 - x_3} = \pi_2\pi_1(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^1) \\
&= \pi_2\frac{(x_1^3x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^3x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^3x_2^0x_3^1x_4^1) - (x_1^1x_2^3x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^3x_3^0x_4^1 + x_1^0x_2^3x_3^1x_4^1)}{x_1 - x_2} \\
&= \pi_2(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^1x_2^2x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^0x_2^2x_3^1x_4^1) \\
&= x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^2x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^0x_4^1 \\
&\quad + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^0x_3^2x_4^1 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^0x_2^2x_3^1x_4^1 + x_1^0x_2^1x_3^2x_4^1
\end{aligned}$$

3 Key 多項式の tableaux 公式

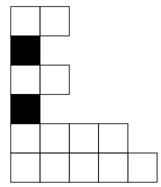
3.1 Semi standard key tableaux

定義 3.1. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell)$ を *compositiion* とする．$\mathbb{D}(\alpha)$ を各 i 行に α_i 個の箱を左詰めでならべた図形とする．ここで $i = 1, \cdots, \ell$ である．

例 2. $\alpha = (2,0,2,0,4,5)$ のとき
$\mathbb{D}(\alpha)$ は



であるが 2 行目, 4 行目が 0 であることをあらわすために



と表すこともある.

定義 3.2. *[1]* $\mathbb{D}(\alpha)$ の各箱に次の条件で整数を入れた盤を *semi standard key tableau* という.

(1) 各行は左から右に単調減少

(2) 各行の最大の整数はその行番号を超えない

(3) 各列に同じ整数はあらわれない

(4) 整数 j の下に同じ列で i があり $j < i$ のとき j のすぐ右に必ず整数 i より大きい整数が入る

定義 3.3. *Composition* α に対して多項式 K_α を

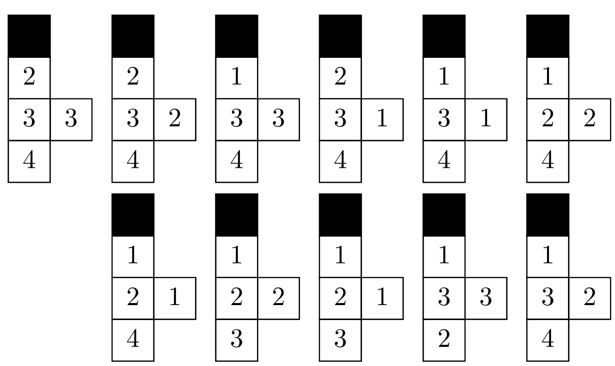
$$K_\alpha = \sum_{T \in SSKT(\alpha)} x^T$$

で定義する. ここで $x^T = x_1^{wt(T)_1} x_2^{wt(T)_2} \cdots$ である. ただし $wt(T)_i$ は T のなかで i のあらわれる回数である.

定理 3.4. *[1]* α を *composition* とする. このとき次の等式が成立する.

$$\kappa_\alpha = K_\alpha$$

例 3. $\alpha = (0,1,2,1)$ のとき $SSKT(\alpha)$ は次の *tableaux* で構成される.



よって

$$\begin{aligned} K_\alpha \quad = \quad & x_1^0x_2^1x_3^2x_4^1 + x_1^0x_2^2x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^0x_3^2x_4^1 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^2x_3^0x_4^1 \\ & + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^1x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^2x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 \end{aligned}$$

であり, 例 *1* とあわせて $\kappa_\alpha = K_\alpha$ となることがわかる.

3.2 定理 3.4 の証明

Assaf は定理 3.4 を Kohnert[3] が示した key 多項式のもう一つの組合せ論的表示を用いて証明した．我々は定理 3.4 の直接的な証明を与える．

命題 3.5. $\alpha = (\alpha_1, \cdots .\alpha_n)$ を *composition* とする．

(1) α が *partiton* のとき $\kappa_\alpha = K_\alpha$ である．

(2) $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ とするとき $\kappa_\alpha = \pi_i \kappa_{\alpha s_i}$, $K_\alpha = \pi_i K_{\alpha s_i}$ が成立する．

この命題から $\{i | \alpha_i < \alpha_{i+1}\}$ （ascent という）の個数の帰納法で定理 3.4 は証明できる．

4 Flagged Schur 多項式

定義 4.1. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *partition*, $f = (f_1, \cdots, f_\ell)$ を *flag* とする．$\mathbb{D}(\lambda)$ の各箱に次の条件で整数を入れた盤を *flagged semi standard tableau* という．

(1) 各行左から右に = 付きで単調増加

(2) 各列上から下に真に単調増加

(3) 各行の最大の整数は f_i 以下

(λ, f) に対する *flaged semi standard tableaux* 全体を $T(\lambda, f)$ と表す．

例 4. $\lambda = (3,2), f = (1,4)$ のとき $T(\lambda, f)$ は次の 6 つの *tableaux* で構成される．

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2&2\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3&3\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 4&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

例 5. $\lambda = (2,1,1), f = (3,3,4)$ のとき $T(\lambda, f)$ は次の 11 個の *tableaux* で構成される．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

定義 4.2. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を *partiiton*, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ を *flag* とする．*Flagged Schur* 多項式 $s_{\lambda,f}$ を

$$s_{\lambda,f} := \sum_{T \in T(\lambda,f)} x^T$$

で定義する．

例 6. 上の例 *4* から $\lambda = (3,2), f = (1,4)$ のとき

$$s_{\lambda,f} = x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2 x_4 + x_1^3 x_3^2 + x_1^3 x_3 x_4 + x_1^3 x_4^2$$

である．

例 7. 上の例 *5* から $\lambda = (2,1,1), f = (3,3,4)$ のとき

$$\begin{aligned} s_{\lambda,f} &= x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_4 \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 x_4 + x_2^2 x_3 x_4 + x_2 x_3^2 x_4 \end{aligned}$$

である．

4.1 Key 多項式と flagged Schur 多項式

Flagged Schur 多項式は Lascoux– Schützenberger[4] によって導入された Schur 多項式を一般化した多項式であり特殊な場合の Schubert 多項式となっている．Flagged Schur 多項式 $s_{\lambda,f}$ は適当な composition α をとることで $s_{\lambda,f} = \kappa_\alpha$ となる．とくに $\lambda(\alpha) = \lambda$ である．つまり Key 多項式は flagged Schur 多項式の一般化となっている．Reiner–Shimozono [5] は Key 多項式が flagged Schur 多項式となるための必要十分条件を与えた．

定義 4.3. *$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell)$ を composition とする．$key(\alpha)$ を i （$i = 1, \cdots, \ell$）が 1 列目から α_i 列目までちょうど 1 回現れる semi standard tableau とする．*

例 8. $\alpha = (0, 2, 5, 3, 4)$ のとき $key(\alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & \\ \cline{1-4} 4 & 4 & 5 & & \\ \cline{1-3} 5 & 5 & & & \\ \cline{1-2}\end{array}$ である．

定義 4.4. *T を $T(\lambda, f)$ の tableau とする．T のどの整数もその整数より大きい値におきかえたとき $T(\lambda, f)$ の元とならないとき T は flag f で entrywise maximum という．*

例 9. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 5 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$ はどのような *flag f* でも *entrywise maximum* とはならない．左上の 1 を 2 に置き換えても *flagged semi standard tableau* となるためである．また $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 5 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$ は *flag* $f = (2, 3, 5)$ で *entrywise maximum* であるが *flag* $f = (2, 3, 4)$ では *entrywise maximum* でない．

定理 4.5. *[5] α を composition とする．$key(\alpha)$ がある flag f で entrywise maximum であることと $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),f}$ であることは同値である．*

例 10. $\alpha = (0, 1, 2, 1)$ のとき $key(0, 1, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} 4 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ でありこれは $f = (3, 3, 4)$ で *entry wise maximum* となる．例 *1, 7* から $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),f}$ となることがわかる．

定義 4.6. *α を composition とする．$\phi(\alpha)_i$ を $key(\alpha)$ の i 行目の最も右の箱にある整数とし $\phi(\alpha) = (\phi(\alpha)_1, \cdots, \phi(\alpha)_r)$ とおく．*

$u(\alpha)$ を $u(\alpha) = u^{(1)} \cdots u^{(r)}$, $u^{(i)} = s_{g_i - 1} \cdots s_{i+1} s_i$ とおく．ただし $g(\alpha)_i$ を $\alpha u^{(1)} \cdots u^{(i-1)}$ の i 以降の part で最も大きい整数でもっとも左の位置とする．$g(\alpha) = (g(\alpha)_1, \cdots, g(\alpha)_r)$ とおく．

定理 4.7. *α を composition とする．$g(\alpha) = \phi(\alpha)$ であることと $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),\phi(\alpha)}$ であることは同値．*

References

[1] Sami Assaf. Nonsymmetric Macdonald polynomials and a refinement of Kostka-Foulkes polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 370, No. 12, pp. 8777–8796, 2018.

[2] Michel Demazure. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 7, pp. 53–88, 1974.

[3] Axel Kohnert. Weintrauben, Polynome, Tableaux. *Bayreuth. Math. Schr.*, No. 38, pp. 1–97, 1991. Dissertation, Universität Bayreuth, Bayreuth, 1990.

[4] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Géométric algébrique-polynômes de schubert,. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 294, , 1982.

[5] Victor Reiner and Mark Shimozono. Key polynomials and a flagged Littlewood-Richardson rule. *J. Combin. Theory Ser. A*, Vol. 70, No. 1, pp. 107–143, 1995.